A tiempo

Para los aspirantes a licenciatura que presenten el examen de Ciencias Básicas e Ingeniería

Canek: Portal de Matemática

Colección Guías de Estudio

A tiempo

Para los aspirantes a licenciatura que presenten el examen de Ciencias Básicas e Ingeniería

Ernesto Javier Espinosa Herrera (coordinador)
María Teresa Castañeda Briones
Luz María García Cruz
Aída Méndez Sosa
Teresa Merchand Hernández
Alejandro de la Mora Ochoa
Rafael Pérez Flores
José Ángel Rocha Martínez
Carlos Antonio Ulín Jiménez

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

RECTOR GENERAL
Dr. Enrique Fernández Fassnacht
SECRETARIA GENERAL
Mtra. Iris Santacruz Fabila

COORDINADORA GENERAL DE INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Dra. María José Arroyo Paniagua
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE ADMISIÓN
Gerardo Gutiérrez Santiago

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – UNIDAD AZCAPOTZALCO

RECTORA
Mtra. Paloma Gabriela Ibáñez Villalobos
SECRETARIO DE UNIDAD
Ing. Darío Eduardo Guaycochea Guglielmi

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
Dr. Luis Enrique Noreña Franco
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
Dr. David Elizarraraz Martínez

ISBN de la colección 978-607-477-402-3
ISBN del volumen

Primera edición 2013
Impreso en México. *Printed in Mexico*

Captura de datos: Alberto Rodríguez Sánchez

Cuidado editorial: Mtra. en Ed. Concepción Asuar

Este trabajo ha sido realizado por los autores en colaboración con el Departamento de Admisión, de la Coordinación General de Información Institucional, de la Rectoría General.
Éste es un material de apoyo para la preparación de los aspirantes que deseen ingresar al nivel licenciatura en la Universidad, por lo que resolver adecuadamente los ejercicios no constituye una garantía de ingreso.

Todo el material de *A tiempo* se encuentra en línea en la dirección: http://canek.azc.uam.mx

Índice

Sección II. Soluciones de los reactivos 269

Sección III. Desarrollos de los reactivos 287

Prólogo

La obra, *A tiempo. Para los aspirantes a licenciatura que presenten el examen de Ciencias Básicas e Ingeniería*, constituye un material que ha sido elaborado para quienes han concluido sus estudios de nivel medio superior y desean presentar el examen de Ciencias Básicas e Ingeniería (CBI), para ingresar a la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM).

Contiene temas de MATEMÁTICA, FÍSICA, QUÍMICA, RAZONAMIENTO VERBAL Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, del nivel medio superior, importantes y necesarios para iniciar la formación universitaria en el campo de las ciencias básicas y las ingenierías. Cada uno de los temas se presenta de manera sintética y se acompaña con un conjunto de ejemplos y ejercicios similares a los que integran el examen de CBI para ingresar a la UAM.

La obra ha sido dividida en las siguientes secciones:

I. Teoría y ejercicios

II. Soluciones

III. Desarrollos

Bibliografía

Esto es, en este libro encontrarás cápsulas de información (Teoría y ejercicios) que rescatan lo fundamental de cada tema; a continuación se proponen preguntas de opción múltiple, tanto conceptuales como problemas y ejercicios; encontrarás, además ayudas útiles (pie de página), por toda la obra. Y en los Desarrollos, para cada problema, se plantea una estrategia que conduce a entender por qué se resuelve de esa forma.

Los autores, profesores de la Universidad que contamos con muchos años de haber impartido clases en esos temas, hemos trabajado de manera multidisciplinaria en su construcción, pensando siempre en el aspirante a alumno de la UAM. Por esta razón, en las páginas de *A tiempo* se encuentra una didáctica adecuada para coadyuvar en la comprensión de contenidos y con el desarrollo de las competencias implícitas en éstos.

Prepararte, en los meses previos, para el examen de ingreso a la Universidad es un aspecto central en tus actividades; estudiar es una tarea que implica tiempo y capacidad de organización: recordar lo que ya sabes, repasar, reaprender..., en algunas ocasiones aunque aparentemente sientes que no avanzas, si te dedicas con compromiso y consciencia de la transcendencia de esta tarea para tu vida futura, el resultado final indudablemente va ser muy positivo para ti mismo.

Para encontrar la opción correcta de cada ejercicio del libro *A tiempo*, es necesario que antes actualices los conocimientos que has aprendido, tanto de manera formal en la escuela, como aquellos adquiridos en las diversas situaciones de la vida cotidiana. También es necesario que prestes un nivel óptimo de atención, de concentración, en la lectura del libro que tienes entre tus manos. Además, te sugerimos lo siguiente:

- Leer detenidamente cada pregunta, con el fin de entenderla bien.
- Tener tus libros de bachillerato a tu lado, por si te fuese necesario consultarlos.
- Asimismo, al final de este libro, te será de mucha utilidad una bibliografía que podrás consultar y utilizar cuando lo creas necesario.

- Examinar las opciones de respuesta propuestas y razonar sus diferencias.
- Seleccionar la opción o, en su caso, las opciones que consideres son lo correcto para lo que se te pregunta.
- Asegurarte bien de que es correcta la opción que estás eligiendo.
- Al final, cuando compares lo elegido por ti con las opciones indicadas en las Soluciones, revisa con detenimiento los Desarrollos, tanto para entender mejor esa pregunta, como para comprender qué pasos dar para poder responderla sin error.

Es indudable que este material ayuda a preparar el examen de admisión a la UAM, pero también constituye una importante herramienta para el desarrollo de habilidades comunicativas y para la solución de problemas en las áreas de matemática, física, química y razonamiento verbal.

Aunque ciertamente éste es un material de apoyo para la preparación de los aspirantes que deseen ingresar al nivel licenciatura en la Universidad, resolver adecuadamente los ejercicios de este libro no constituye una garantía de ingreso.

Todo el material de *A tiempo* se encuentra en línea en la dirección: http://canek.azc.uam.mx

Ernesto Javier Espinosa Herrera
Coordinador

Sección I

Teoría y reactivos

1. Matemática

1.1 Aritmética

1.1.1 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

En este subtema, vamos a trabajar exclusivamente con el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, donde:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\} \text{ es el conjunto de los números naturales.}$$

- Decimos que a divide a b si $b = ac$.
  Así, 5 divide a 20 puesto que $20 = 5 \cdot 4$.
  Otras maneras de expresar esta condición son:

  b es un múltiplo de a.
  a es un factor de b.
  b es divisible entre a.
  a es divisor de b.

- *División euclideana*. Dados dos números naturales a, b existen dos únicos números q, r tales que:

  $$b = qa + r, \text{ donde } 0 \leq r < a.$$

  Decimos que q es el cociente de la división b entre a y que r es el residuo de dicha división.
  Si $b = 23$ y si $a = 5$, al dividir 23 entre 5, obtenemos:

  $$23 = 4 \cdot 5 + 3.$$

  En este caso $q = 4$; $0 < r = 3 < 5$.
  Si $b = 5$ y si $a = 23$, al dividir 5 entre 23, obtenemos:

  $$5 = 0 \cdot 23 + 5.$$

  En este caso $q = 0$; $0 < r = 5 < 23$.

Considerando lo anterior, se dice que a divide a b si al efectuar la división a entre b el residuo es $r = 0$.

- Decimos que un número natural p es primo si sus únicos divisores son 1 y p.
  Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

- Decimos que n es un número compuesto si

  $$n = ab, \text{ donde } 1 < a < n \text{ y donde } 1 < b < n.$$

  Por ejemplo, el número 10 es compuesto, ya que $10 = 2 \cdot 5$.

- *Teorema fundamental de la aritmética*. Todo número natural n se puede factorizar en números primos de manera única (salvo el orden).

Ejemplos:

$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7.$

$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11.$

Sea el número $175 = 5^2 \cdot 7$, notación que representa su descomposición en números primos. El número total de divisores de 175 es $(2+1)(1+1) = 6$. Para obtener estos divisores observamos la siguiente tabla:

		Divisor
0	0	$5^0 \cdot 7^0 = 1$
0	1	$5^0 \cdot 7^1 = 7$
1	0	$5^1 \cdot 7^0 = 5$
1	1	$5^1 \cdot 7^1 = 35$
2	0	$5^2 \cdot 7^0 = 25$
2	1	$5^2 \cdot 7^1 = 175$

Un divisor de un número n tiene obligatoriamente potencias de primos que se encuentran en la descomposición de n. Si $b = ac$ es un múltiplo de a, entonces todos los primos de la descomposición de a se encuentran en la descomposición de b.

- El máximo común divisor de dos números naturales a, b [el cual denotaremos como $\text{mcd}(a, b)$] es un número que divide a ambos números y cumple con la condición que, si n es otro número que divide a ambos números, entonces $n \leq \text{mcd}(a, b)$.

  Para calcular el $\text{mcd}(a, b)$, descomponemos primero en números primos ambos números; luego se consideran los primos comunes en dichas descomposiciones, se toman las potencias mínimas de dichos primos y se multiplican esas potencias mínimas. Cuando no hay primos comunes se tiene $\text{mcd}(a, b) = 1$.

- El mínimo común múltiplo de dos números naturales a, b [el cual denotaremos como $\text{mcm}(a, b)$] es un número que es múltiplo de ambos números y cumple con la condición que, si n es múltiplo común de a, b, entonces $\text{mcm}(a, b) \leq n$.

  Para calcular el $\text{mcm}(a, b)$, primero se descomponen en números primos ambos números, se toman las potencias máximas de todos los primos existentes en dichas descomposiciones y se multiplican dichas potencias máximas.

Reactivos de Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

Soluciones: véase la página 271. Desarrollos: véase la página 289

1. Sean los números $n = 12, m = 90$. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de ambos. Elige la opción correspondiente ______.

   A. $\text{mcd}(12, 90) = 12, \quad \text{mcm}(12, 90) = 180$
   B. $\text{mcd}(12, 90) = 6, \quad \text{mcm}(12, 90) = 360$
   C. $\text{mcd}(12, 90) = 12, \quad \text{mcm}(12, 90) = 90$
   D. $\text{mcd}(12, 90) = 6, \quad \text{mcm}(12, 90) = 180$
   E. $\text{mcd}(12, 90) = 6, \quad \text{mcm}(12, 90) = 90$

2. Sean los números $n = 10, m = 21$. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de ambos. Elige la opción correspondiente ______.

   A. $\text{mcd}(10, 21) = 1, \quad \text{mcm}(10, 21) = 105$

B. $\text{mcd}(10, 21) = 5, \quad \text{mcm}(10, 21) = 210$
C. $\text{mcd}(10, 21) = 1, \quad \text{mcm}(10, 21) = 210$
D. $\text{mcd}(10, 21) = 5, \quad \text{mcm}(10, 21) = 105$
E. $\text{mcd}(10, 21) = 10, \quad \text{mcm}(10, 21) = 210$

3. Sean los números $n = 30$, $m = 140$ & $r = 75$. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los tres. Indica la opción ________.

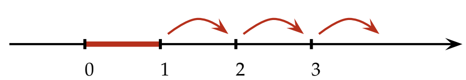
A. $\text{mcd}(30, 140, 75) = 30, \quad \text{mcm}(30, 140, 75) = 180$
B. $\text{mcd}(30, 140, 75) = 6, \quad \text{mcm}(30, 140, 75) = 360$
C. $\text{mcd}(30, 140, 75) = 12, \quad \text{mcm}(30, 140, 75) = 90$
D. $\text{mcd}(30, 140, 75) = 5, \quad \text{mcm}(30, 140, 75) = 2\,100$
E. $\text{mcd}(30, 140, 75) = 6, \quad \text{mcm}(30, 140, 75) = 90$

4. Sean los números $n = 15$, $m = 14$ & $r = 22$. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los tres. Escribe cuál es la opción correcta ________.

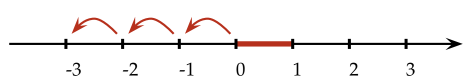
A. $\text{mcd}(15, 14, 22) = 1, \quad \text{mcm}(15, 14, 22) = 2\,310$
B. $\text{mcd}(15, 14, 22) = 3, \quad \text{mcm}(15, 14, 22) = 2\,310$
C. $\text{mcd}(15, 14, 22) = 2, \quad \text{mcm}(15, 14, 22) = 4\,620$
D. $\text{mcd}(15, 14, 22) = 3, \quad \text{mcm}(15, 14, 22) = 4\,620$
E. $\text{mcd}(15, 14, 22) = 5, \quad \text{mcm}(15, 14, 22) = 2\,310$

1.1.2 Operaciones con fracciones numéricas

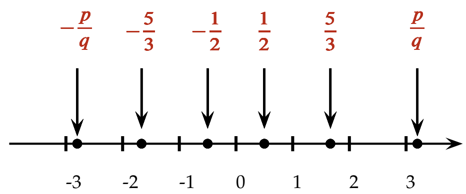
Para la representación de los números enteros en una recta, colocamos en ella un punto fijo 0 llamado el origen, una unidad de longitud convencional (arbitraria) y un sentido positivo, hacia la derecha. Si a partir del origen marcamos la unidad de longitud consecutivamente en el sentido del eje, obtendremos una sucesión de puntos cuya distancia al origen es, respectivamente, $1,\ 2,\ 3, \cdots$; estos puntos representan a los números naturales.



Los simétricos de estos puntos con respecto al origen, es decir, los puntos que se obtienen al marcar repetidamente la unidad de longitud en el sentido contrario al del eje, representan a los números enteros negativos.



Además, hay puntos en el eje cuya distancia al origen es el número racional $\dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Si dividimos la unidad de longitud en q partes iguales y tomamos p de ellas en el sentido del eje o bien p en sentido opuesto, encontramos puntos cuya distancia al origen es $\dfrac{p}{q}$. Estos puntos corresponden a los números racionales $\dfrac{p}{q}$ y $-\dfrac{p}{q}$, respectivamente.



- Dos números racionales son iguales si al multiplicar cruzados numerador con denominador, se obtiene el mismo resultado:

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} \text{ puesto que } 10 \cdot 6 = 12 \cdot 5 = 60.$$

- Si se multiplican o dividen el numerador y el denominador de un racional por un mismo número se obtiene un número racional igual.

  Multiplicando por 2:

$$\frac{10}{12} = \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 12} = \frac{20}{24}.$$

  Multiplicando por $\frac{1}{2}$ (o lo que es lo mismo, diviendo entre 2) se tiene:

$$\frac{10}{12} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10}{\frac{1}{2} \cdot 12} = \frac{5}{6}.$$

- Para sumar dos racionales con el mismo denominador se suman los numeradores y se deja el mismo denominador:

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = \frac{3+7}{5} = \frac{10}{5}.$$

- Para restar dos racionales con el mismo denominador se restan los numeradores y se deja el mismo denominador:

$$\frac{3}{5} - \frac{7}{5} = \frac{3-7}{5} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}.$$

- Para sumar o restar dos números racionales con distinto denominador, se convierten ambos racionales en otros equivalentes con igual denominador y se aplican las reglas anteriores:

  Usando el producto de los denominadores como denominador común:

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{10} = \frac{10 \cdot 5}{10 \cdot 6} + \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot 10} = \frac{50}{60} + \frac{6}{60} = \frac{56}{60}.$$

  Usando el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $\text{mcm}(6, 10) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$:

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{10} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 10} = \frac{25}{30} + \frac{3}{30} = \frac{28}{30}.$$

- Para multiplicar dos racionales, se multiplican los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

- Para multiplicar un racional por un entero, se multiplica el entero por el numerador del racional:

$$2 \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7}.$$

- Puesto que
$$\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}=\frac{35}{35}=1,$$
el inverso multiplicativo de un racional se obtiene intercambiando numerador y denominador:
$$\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}=\frac{7}{5}.$$

- Para dividir dos racionales, se multiplica el racional numerador por el inverso multiplicativo del racional denominador:
$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{21}{10}.$$

Reactivos de Operaciones con fracciones numéricas

Soluciones: véase la página 271. Desarrollos: véase la página 291

1. Elegir una opción al calcular:
$$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\_\_\_\_\_\_.$$
   A. 2
   B. 8
   C. 4
   D. 6
   E. 10

2. Elegir una opción al calcular:
$$\frac{5}{2}-\frac{2}{3}=\_\_\_\_\_\_.$$
   A. $-\frac{3}{6}$
   B. -3
   C. $\frac{11}{2}$
   D. $\frac{11}{3}$
   E. $\frac{11}{6}$

3. Elegir una opción al calcular:
$$\frac{5}{4}-\frac{1}{12}=\_\_\_\_\_\_.$$
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{7}{2}$
   C. $\frac{7}{6}$
   D. $\frac{7}{4}$
   E. $\frac{1}{6}$

4. Elegir una opción al calcular:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

A. $\frac{21}{14}$
B. $\frac{21}{10}$
C. $\frac{5}{12}$
D. $\frac{9}{7}$
E. $\frac{6}{35}$

5. Calcular:

$$3 \cdot \frac{7}{5} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(Elige la opción correspondiente).

A. $\frac{7}{35}$
B. $\frac{8}{5}$
C. $\frac{21}{5}$
D. $\frac{7}{8}$
E. $\frac{22}{5}$

6. Calcular:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(Elige la opción correspondiente).

A. $\frac{3}{20}$
B. $\frac{5}{4}$
C. $\frac{5}{13}$
D. $\frac{2}{3}$
E. $\frac{16}{15}$

7. Calcular:

$$\frac{\frac{2}{5}}{3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(Elige la opción correspondiente).

A. $\frac{2}{15}$
B. $\frac{6}{5}$

C. $\frac{10}{3}$
D. $\frac{5}{6}$
E. $\frac{15}{2}$

8. Calcular:

$$\frac{7}{\frac{9}{5}} = \_\_\_\_\_\_\_ .$$

¿Qué opción es la correcta?

A. $\frac{7}{45}$
B. $\frac{35}{9}$
C. $\frac{9}{35}$
D. $\frac{45}{7}$
E. $\frac{12}{9}$

9. Elige qué opción es la respuesta al calcular:

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}{\frac{1}{7}+\frac{3}{2}} = \_\_\_\_\_\_\_ .$$

A. $\frac{9}{10}$
B. $\frac{10}{3}$
C. $\frac{266}{345}$
D. $\frac{7}{15}$
E. $\frac{437}{210}$

10. Indica cuál opción corresponde al calcular:

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \_\_\_\_\_\_\_ .$$

A. $\frac{43}{3}$
B. $\frac{87}{6}$
C. $\frac{253}{360}$
D. $\frac{83}{6}$
E. $\frac{55}{46}$

1.2 Álgebra

1.2.1 Valor numérico de expresiones algebraicas

En una expresión algebraica, las letras (variables) pueden ser sustituidas por otras expresiones algebraicas o números. Cuando esto ocurre, se dice que la expresión algebraica original se ha evaluado.
Veamos, como ejemplo, la siguiente expresión:

$$\frac{a^3 - b}{a^2 - b^2}.$$

1. Cuando utilizamos $a = 1$, $b = 2$, obtenemos:

$$\frac{(1)^3 - 2}{(1)^2 - (2)^2} = \frac{1-2}{1-4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

2. Cuando usamos $a = 2x + 3$, $b = 3y^2$, encontramos:

$$\frac{(2x+3)^3 - (3y^2)}{(2x+3)^2 - (3y^2)^2};$$

también podemos simplificar o bien sustituir las nuevas letras por otras expresiones algebraicas o números, si así se desea.

Reactivos de Valor numérico de expresiones algebraicas

Soluciones: véase la página 271. Desarrollos: véase la página 293

1. Al evaluar la expresión:

$$\frac{a^2b - ab^2}{a - b},$$

con $a = 5$ y con $b = 3$, se obtiene: ________ .

A. 25
B. 10
C. 20
D. 15
E. 30

2. Al evaluar la expresión:

$$\frac{a^{-2}b + ab^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}},$$

con $a = 5$ y con $b = 3$, se obtiene: ________ .

A. $-\frac{47}{15}$
B. $-\frac{51}{15}$
C. $-\frac{76}{15}$
D. $-\frac{27}{15}$
E. $-\frac{13}{15}$

3. Al evaluar la expresión:
$$\frac{a+b^2}{a^2-b},$$
con $a = \frac{1}{5}$ y con $b = \frac{1}{3}$, hallamos: ______ .

A. $-\frac{105}{99}$
B. $-\frac{100}{99}$
C. $-\frac{95}{99}$
D. $-\frac{115}{99}$
E. $-\frac{101}{99}$

4. Al evaluar la expresión:
$$\frac{a^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-1}},$$
con $a = \frac{1}{5}$ y con $b = \frac{1}{3}$, hallamos: ______ .

A. $\frac{9}{11}$
B. $\frac{5}{11}$
C. $\frac{7}{11}$
D. $\frac{12}{11}$
E. $\frac{13}{11}$

1.2.2 Reducción de términos semejantes

Decimos que los términos $5x^2y^3$ & $8x^2y^3$ son semejantes, ya que tienen la misma parte literal x^2y^3. Reducir términos semejantes quiere decir sumar o restar términos semejantes. Para esto se suman o restan los coeficientes numéricos correspondientes.

Suma de términos semejantes:
$$(5x^2y^3) + (8x^2y^3) = (5+8)x^2y^3 = 13x^2y^3.$$

Resta de términos semejantes:
$$(5x^2y^3) - (8x^2y^3) = (5-8)x^2y^3 = -3x^2y^3.$$

Reactivos de Reducción de términos semejantes
Soluciones: véase la página 271. Desarrollos: véase la página 294

1. Al reducir la expresión:
$$5x^2 + 2x + 3 - 3x^2 + 7x - 9,$$
se obtiene: ______ .

A. $2x^2 + 9x - 6$
B. $2x^2 + 7x - 6$
C. $2x^2 + 9x + 6$
D. $2x^2 + 9x - 12$
E. $2x^2 + 9x + 12$

2. Reducir la expresión:
$$3x^2y + 9xy^2 - 2x^2y - 11xy^2.$$
Elige la opción que corresponda ______.

A. $x^2y - 2xy^2$
B. $-x^2y + 2xy^2$
C. $x^2y + 2xy^2$
D. $-x^2y - 2xy^2$
E. $2x^2y - xy^2$

3. Sumar los polinomios:
$$3x^3 + 2x - 7 \quad \& \quad -x^3 + 3x^2 + 3.$$
Elige la opción correspondiente ______.

A. $2x^3 + 3x^2 - 4$
B. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 4$
C. $2x^3 + 2x^2 + 2x - 4$
D. $2x^3 + 3x^2 + 2x - 4$
E. $2x^3 + 3x^2 + x - 4$

4. Reducir la expresión:
$$2m^3n - mn^2 + 7m^2n - 5m^3n + 3mn^2 - 7mn.$$
Escribir la opción correspondiente ______.

A. $-3m^3n + 2mn^2 + 7m^2n - 7mn$
B. $-3m^3n - 2mn^2 + 7m^2n - 7mn$
C. $-3m^3n + 2mn^2 - 7m^2n - 7mn$
D. $-3m^3n + 2mn^2 + 7m^2n + 7mn$
E. $3m^3n + 2mn^2 + 7m^2n - 7mn$

1.2.3 Símbolos de agrupación

Las expresiones matemáticas contienen operadores y operandos.

- Los operadores suma $(a+b)$, resta $(a-b)$, multiplicacion $(a\times b)$ y división (a/b) son operaciones binarias, es decir, requieren dos operandos (a, b).
- Existen operadores unarios, los cuales requieren un solo operando, tal como la inversa aditiva $(-a)$.

Cuando queremos calcular la expresión $5 + 4 - 7$, la ley asociativa nos dice que esta expresión puede ser calculada de dos formas diferentes y se obtiene el mismo resultado:
$$(5 + 4) - 7 = 5 + (4 - 7) \;\Rightarrow\; 9 - 7 = 5 - 3 = 2.$$

En el cálculo anterior, hemos usado los paréntesis ( ) para indicar el orden en el cual se desean ejecutar las operaciones. Con la misma idea se pueden usar los corchetes [ ] y las llaves { }. Estos símbolos se conocen como símbolos de agrupación.
Los podemos encontrar anidados (una o varias parejas de símbolos dentro de otra) y siempre se efectúan los cálculos en la pareja más interna. *Cuando existe un símbolo que abre debe existir otro que cierra la agrupación*.
En el siguiente ejemplo:

$$-[(2-7)-1]+\{3+[1-5]\},$$

se operan primero las parejas de símbolos de agrupación

$$(2-7)=(-5)=-5; \quad [1-5]=[-4]=-4,$$

ya que son las más internas. Usando estos resultados se obtiene:

$$-[-5-1]+\{3-4\};$$

y finalmente, continuamos operando los siguientes símbolos de agrupación:

$$-[-6]+\{-1\}=6-1=5.$$

Reactivos de Símbolos de agrupación

Soluciones: véase la página 271. Desarrollos: véase la página 295

1. Reducir la expresión:
$$-[(5+3)-9]+[-(7-9)+3].$$
Elegir la opción correspondiente ______.
   - A. 5
   - B. 7
   - C. 6
   - D. 8
   - E. 9
2. Reducir la expresión:
$$-\{-[(5-7)+3]+[-(9-5)-8]\}.$$
Elegir la opción ______.
   - A. 13
   - B. 12
   - C. 9
   - D. 11
   - E. 14

1.2.4 Leyes de los exponentes y radicales

Si n, m, r son números naturales $(1, 2, 3, \ldots)$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ veces}}.$
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$
- $(ab)^n = a^n b^n.$

- $(a^n)^m = a^{nm}$.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
- $a^0 = 1$.
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, con $a \geq 0$, si n es par.
- $\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$.
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$.

Reactivos de Leyes de los exponentes y radicales

Soluciones: véase la página 271. Desarrollos: véase la página 296

1. Al simplificar $(a^2b^3)^5$, se obtiene: ______.

   A. a^7b^8
   B. a^7b^{15}
   C. $a^{10}b^7$
   D. $a^{10}b^8$
   E. $a^{10}b^{15}$

2. Al simplificar $\dfrac{a^5}{a^3}$, se obtiene: ______.

   A. a^{-2}
   B. a^{-8}
   C. a^8
   D. a^3
   E. a^2

3. Al simplificar $(ab)^7(ab^2)^{-1}$, se obtiene: ______.

   A. a^7b^5
   B. a^6b^4
   C. a^8b^5
   D. a^6b^9
   E. a^6b^5

4. Al simplificar $\sqrt[3]{a^{-7}b^5}$, se obtiene: ______.

   A. $\dfrac{b^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{7}{3}}}$
   B. $\dfrac{b^{\frac{5}{3}}}{a^{-\frac{7}{3}}}$

C. $\dfrac{b^{-\frac{5}{3}}}{a^{\frac{7}{3}}}$

D. $\dfrac{b^{-\frac{5}{3}}}{a^{-\frac{7}{3}}}$

E. $\dfrac{b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{3}{7}}}$

5. Simplificar $\dfrac{(a^3b^2)^5}{(a^2b^3)^4}$ y elegir la opción correspondiente ______.

A. $\dfrac{a^8}{b^3}$

B. $\dfrac{a^6}{b^2}$

C. $\dfrac{a^7}{b^2}$

D. $\dfrac{a^7}{b^3}$

E. $\dfrac{a^5}{b^2}$

6. Simplificar $\left(\dfrac{a^2b^3}{a^4b^2}\right)^4$ y escribir qué opción corresponde ______.

A. $\dfrac{b^4}{a^4}$

B. $\dfrac{b^5}{a^8}$

C. $\dfrac{b^4}{a^8}$

D. $\dfrac{b^{-4}}{a^8}$

E. $\dfrac{b^4}{a^{-8}}$

7. Simplificar $\dfrac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt[3]{a^2b^5}}$ y escribir la opción correspondiente ______.

A. $\sqrt[6]{\dfrac{a^5}{b^9}}$

B. $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^7}}$

C. $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^9}}$

D. $\sqrt[6]{\dfrac{a^9}{b^3}}$

E. $\sqrt[6]{\dfrac{a^5}{b^7}}$

8. Simplificar $\dfrac{c^{\frac{1}{3}}}{(c+c^2)^{-1}}$; indicar la opción ______.

   A. $c^{\frac{4}{3}} + c^{-\frac{7}{3}}$
   B. $c^{-\frac{4}{3}} + c^{\frac{7}{3}}$
   C. $c^{-\frac{4}{3}} + c^{-\frac{7}{3}}$
   D. $c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}$
   E. $c^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{7}{3}}$

9. Simplificar $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}(b+b^2)}{b^{\frac{1}{3}}}$; escribir qué opción es correcta ______.

   A. $b^{\frac{7}{6}} + b^{-\frac{13}{6}}$
   B. $b^{-\frac{7}{6}} + b^{\frac{13}{6}}$
   C. $b^{-\frac{7}{6}} + b^{-\frac{13}{6}}$
   D. $b^{\frac{7}{6}} + b^{\frac{13}{6}}$
   E. $b^{\frac{1}{6}} + b^{-\frac{2}{3}}$

10. Simplificar $\dfrac{x^{\frac{1}{n}}(x^n + x^{-\frac{1}{n}})}{x^n(x^{\frac{1}{n}} + x^{-n})}$ e indicar qué opción es correcta ______.

   A. x^n
   B. -1
   C. 1
   D. x^{-1}
   E. x^{-n}

1.2.5 Operaciones con polinomios

Suma de polinomios. Para sumar dos o más polinomios (sumandos) se escriben uno a continuación de otro, luego se eliminan los paréntesis y finalmente se reducen términos semejantes.

Ejemplo. La suma de los polinomios $(4x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3)$ y $(-8x^3y + 2x^2y^2 - 5xy^3)$ es:

$$\begin{aligned}(4x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3) + (-8x^3y + 2x^2y^2 - 5xy^3) &= 4x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3 - 8x^3y + 2x^2y^2 - 5xy^3 = \\ &= (4-8)x^3y + (-3+2)x^2y^2 + (9-5)xy^3 = \\ &= -4x^3y - x^2y^2 + 4xy^3.\end{aligned}$$

También se pueden escribir uno debajo de otro formando columnas con términos semejantes que luego son reducidos. El orden en que se coloquen los sumandos no altera la suma.

$$\begin{array}{rcrcrl} 4x^3y & - & 3x^2y^2 & + & 9xy^3 & \\ -8x^3y & + & 2x^2y^2 & - & 5xy^3 & + \\ \hline -4x^3y & - & x^2y^2 & + & 4xy^3. & \end{array}$$

Resta de polinomios. Para restar un polinomio (sustraendo) de otro (minuendo), se cambian los signos del sustraendo y se suma con el minuendo.

Ejemplo. Restar el polinomio $(-8x^3y + 2x^2y^2 - 5xy^3)$ al polinomio $(4x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3)$.

$$\begin{aligned}(4x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3) - (-8x^3y + 2x^2y^2 - 5xy^3) &= 4x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3 + 8x^3y - 2x^2y^2 + 5xy^3 \\ &= (4+8)x^3y + (-3-2)x^2y^2 + (9+5)xy^3 = \\ &= 12x^3y - 5x^2y^2 + 14xy^3.\end{aligned}$$

El orden en que se coloquen los polinomios sí altera la diferencia, ya que $x - y \neq y - x$.

Multiplicación de monomios. El producto de dos o más monomios se obtiene multiplicando por separado los coeficientes y las potencias de igual base.

Se debe aplicar la regla de los signos para la multiplicación, así como la igualdad $x^n x^m = x^{n+m}$.

Ejemplo: El producto de los monomios $(4x^5y^3)$, $(-3x^3y^4)$ y $(5xy^5)$ es:

$$(4x^5y^3)(-3x^3y^4)(5xy^5) = (4)(-3)(5)(x^5x^3x)(y^3y^4y^5) = -60\,x^{5+3+1}\,y^{3+4+5} = -60x^9y^{12}.$$

Monomio por polinomio. El producto de un monomio por un polinomio se obtiene multiplicando el monomio por cada término del polinomio y sumando algebraicamente los productos obtenidos.

Ejemplo. El producto del monomio $(-4x^5y^3)$ por el polinomio $(-8x^3y + 2x^2y^2 - 5xy^3)$ es:

$$\begin{aligned}(-4x^5y^3)(-8x^3y + 2x^2y^2 - 5xy^3) &= (-4x^5y^3)(-8x^3y) + (-4x^5y^3)(2x^2y^2) + (-4x^5y^3)(-5xy^3) = \\ &= 32x^{5+3}y^{3+1} - 8x^{5+2}y^{3+2} + 20x^{5+1}y^{3+3} = \\ &= 32x^8y^4 - 8x^7y^5 + 20x^6y^6.\end{aligned}$$

Polinomio por polinomio. El producto de dos polinomios se obtiene multiplicando cada término del primer polinomio por el segundo polinomio, y sumando algebraicamente los productos obtenidos.

Ejemplo. El producto de los polinomios $(x^2 - 2x + 3)$ y $(x^2 + 4x - 5)$ es:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 4x - 5) &= x^2(x^2 + 4x - 5) - 2x(x^2 + 4x - 5) + 3(x^2 + 4x - 5) = \\ &= x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 2x^3 - 8x^2 + 10x + 3x^2 + 12x - 15 = \\ &= x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 22x - 15.\end{aligned}$$

En cada una de estas multiplicaciones se debe tener presente que el orden en que se escriben los factores (monomio o polinomio) no afecta al producto.

División de monomios. Para dividir dos monomios se dividen por separado los coeficientes y las potencias de igual base.

Se debe aplicar la regla de los signos para la división, así como la igualdad $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.

Ejemplo. Al dividir el monomio $-24x^5y^3u^2$ entre el monomio $40x^2y^4u^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{-24x^5y^3u^2}{40x^2y^4u^2} &= \frac{-24}{40}\cdot\frac{x^5}{x^2}\cdot\frac{y^3}{y^4}\cdot\frac{u^2}{u^2} = -\frac{(8)(3)}{(8)(5)}\cdot x^{5-2}\cdot y^{3-4}\cdot u^{2-2} = \\ &= -\frac{3}{5}\cdot x^3\cdot y^{-1}\cdot u^0 = -\frac{3}{5}\cdot x^3\cdot\left(\frac{1}{y}\right)\cdot 1 = -\frac{3x^3}{5y}.\end{aligned}$$

Polinomio entre monomio. Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada término del polinomio entre el monomio y se suman algebraicamente los cocientes obtenidos.

Ejemplo. Dividir el polinomio $20x^6y^4 - 12x^4y^6 - 9x^2y^8$ entre el monomio $30x^4y^3$.

$$\begin{aligned}\frac{20x^6y^4 - 12x^4y^6 - 9x^2y^8}{30x^4y^3} &= \frac{20x^6y^4}{30x^4y^3} - \frac{12x^4y^6}{30x^4y^3} - \frac{9x^2y^8}{30x^4y^3} = \\ &= \frac{2x^2y}{3} - \frac{2x^0y^3}{5} - \frac{3y^5}{10x^2} = \\ &= \frac{2x^2y}{3} - \frac{2y^3}{5} - \frac{3y^5}{10x^2}.\end{aligned}$$

Polinomio entre polinomio. Para dividir un polinomio (dividendo) entre otro (divisor), se procede como sigue:

1. Se ordenan los términos del dividendo y del divisor, con respecto al exponente de una literal (se sugiere que sea de mayor a menor).
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, para así tener el primer término del cociente.
3. Este primer término se multiplica por el divisor y el resultado se resta al dividendo, para así tener un nuevo dividendo.
4. Se repiten los pasos anteriores, hasta que el nuevo dividendo sea de grado menor (con respecto a la misma literal) que el divisor.
5. Cuando esto sucede, la división se da por terminada; al último denominador se le denomina residuo y se escribe:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}.$$

Ejemplo. Al dividir el polinomio $6x^4 - 13x^3 + 19x^2 - 15x + 2$ entre el polinomio $2x^2 - 3x + 1$, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3x^2 & -2x & +5 & & \\ \hline
2x^2 - 3x + 1 & 6x^4 & -13x^3 & +19x^2 & -15x & +2 \\
 & -6x^4 & +9x^3 & -3x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -4x^3 & +16x^2 & -15x & +2 \\
 & & +4x^3 & -6x^2 & +2x & \\ \cline{3-5}
 & & & 10x^2 & -13x & +2 \\
 & & & -10x^2 & +15x & -5 \\ \cline{4-6}
 & & & & 2x & -3\,.
\end{array}$$

Por lo tanto,

$$\frac{6x^4 - 13x^3 + 19x^2 - 15x + 2}{2x^2 - 3x + 1} = 3x^2 - 2x + 5 + \frac{2x - 3}{2x^2 - 3x + 1}.$$

Reactivos de Operaciones con polinomios

Soluciones: véase la página 272. Desarrollos: véase la página 298

1. Al sumar el polinomio $(6x^2y^3 - 5x^3y^2 - 4x + 3y)$ y el polinomio $(3x^3y^2 + y - x - 2x^2y^3)$, se obtiene: ________ .

   A. $-4x^2y^3 - 2x^3y^2 + 5x + 4y$
   B. $4x^2y^3 - 2x^3y^2 - 5x + 4y$
   C. $8x^2y^3 - 8x^3y^2 - 3x + 2y$
   D. $4x^4y^6 - 2x^6y^4 - 5x^2 + 4y^2$
   E. $-4x^4y^6 - 2x^6y^4 + 5x^2 + 4y^2$

2. Al restar el polinomio $(5x^2y + 6xy^2 - 4xy - 2)$ del polinomio $(2xy^2 - 4xy - 6x^2y + 8)$, se obtiene: ______.

   A. $8xy^2 - 8xy - 11x^2y + 6$
   B. $11x^2y + 4xy^2 - 10$
   C. $10 - 4xy^2 - 11x^2y$
   D. $4xy^2 - x^2y - 8xy + 6$
   E. $10 + xy - 4xy^2 + 11x^2y$

3. Al restar del polinomio $(3x^2+4xy-5y^2)$ la suma de los polinomios $(5xy-x^2-2y^2)$ y $(3y^2-2xy+8x^2)$, se obtiene: ______.

   A. $4x^2 - xy + 6y^2$
   B. $4x^2 + 7xy - 4y^2$
   C. $4y^2 - 7xy - 4x^2$
   D. $-4x^6 + x^3y^3 - 6y^6$
   E. $xy - 4x^2 - 6y^2$

4. ¿Cuál es el resultado de realizar la operación siguiente?:

$$\left(-\frac{3}{2}x^2y^3\right)\left(-2x^3y^2 + \frac{4}{3}x^2y - 6x\right) = \_\_\_\_\_\_.$$

   A. $3x^5y^5 - 2x^4y^4 + 9x^3y^3$
   B. $3x^6y^6 - 2x^4y^3 + 9x^2y^3$
   C. $3x^5y^5 + 2x^4y^4 - 9x^3y^3$
   D. $3x^5y^5 + \frac{4}{3}x^2y - 6x$
   E. $-\frac{7}{2}x^5y^5 + \frac{1}{6}x^4y^4 + \frac{3}{2}x^3y^3$

5. Indica el resultado de efectuar la operación siguiente:

$$(3a^2 - 4ab + 2b^2)(a^2 - 5ab - 3b^2) = \_\_\_\_\_\_.$$

   A. $3a^4 + 20a^2b^2 - 6b^4$
   B. $3a^4 - 19a^3b + 13a^2b^2 - 2ab^3 + 6b^4$
   C. $3a^4 - 19a^3b + 13a^2b^2 + 2ab^3 - 6b^4$
   D. $4a^2 - 9ab - b^2$
   E. $3a^4 - 19a^3b - 13a^2b^2 + 2ab^3 - 6b^4$

6. Indica el resultado de efectuar la operación siguiente:

$$\left(x^{n-1} - x^n\right)\left(x^{n+1} - x^{n+2}\right) = \_\_\_\_\_\_.$$

   A. $x^{2n} - 2x^{2n+1} + x^{2n+2}$
   B. $x^{2n} - x^{2n+2}$
   C. $x^{2n} + 2x^{2n+1} + x^{2n+2}$
   D. $x^{2n} + x^{2n+2}$
   E. $x^{n^2-1} - x^{n^2-3n+2} - x^{n^2+n} + x^{n^2+2n}$

7. Al dividir el polinomio $(3x^4 + 5x^3 - 13x^2 + x - 3)$ entre el polinomio $(x^2 + 2x - 3)$, se obtiene el cociente: ______.

   A. $3x^2 + 11x$
   B. $3x^2 + x + 2$
   C. $3x^2 - x - 2$
   D. $3x^2 - 11x$
   E. $3x^2 - x + 2$

8. Al efectuar la división $\dfrac{8x^3 + 27}{2x + 3}$, se obtiene el cociente: ______.

   A. $4x^2 + 9$
   B. $4x^2 - 9$
   C. $4x^2 + 6x + 9$
   D. $4x^2 - 6x - 9$
   E. $4x^2 - 6x + 9$

1.2.6 Productos notables

Por sus características, algunos productos son denominados productos notables y son identificados con fórmulas que se aplican directamente para simplificar desarrollos.

Producto de dos binomios con un término común. $(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$.

El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto de la suma de los términos diferentes por el término común, más el producto de los términos diferentes.

Ejemplo. El producto de los binomios $(x^3 + 8)$ y $(x^3 - 4)$ es:

$$(x^3 + 8)\,(x^3 - 4) = (x^3)^2 + (8 - 4)x^3 + (8)(-4) = x^6 + 4x^3 - 32.$$

Producto de dos binomios conjugados. Son binomios conjugados aquellos que difieren sólo en un signo y su producto es una diferencia de cuadrados: $(x + m)(x - m) = x^2 - m^2$.

El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del término común, menos el cuadrado del término que difiere en signo.

Ejemplo. El producto de los binomios conjugados $(2x^3 + 3a^2)$ y $(2x^3 - 3a^2)$ es:

$$(2x^3 + 3a^2)\,(2x^3 - 3a^2) = (2x^3)^2 - (3a^2)^2 = 4x^6 - 9a^4.$$

Cuadrado de un binomio. $(x + m)^2 = x^2 + 2xm + m^2$ y $(x - m)^2 = x^2 - 2xm + m^2$.

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Observa que estos productos notables difieren sólo en el signo del doble producto $(2xm)$, que es positivo cuando proviene de una suma y negativo cuando proviene de una diferencia.

Ejemplos. Los desarrollos de $(2x^3 + 3a^2)^2$ y $(2x^3 - 3a^2)^2$ son:

$$(2x^3 + 3a^2)^2 = (2x^3)^2 + 2(2x^3)(3a^2) + (3a^2)^2 = 4x^6 + 12x^3a^2 + 9a^4.$$
$$(2x^3 - 3a^2)^2 = (2x^3)^2 - 2(2x^3)(3a^2) + (3a^2)^2 = 4x^6 - 12x^3a^2 + 9a^4.$$

Cubo de un binomio. $(x+m)^3 = x^3 + 3x^2m + 3xm^2 + m^3$ y $(x-m)^3 = x^3 - 3x^2m + 3xm^2 - m^3$.

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

Observa que los resultados de estos productos notables difieren sólo en dos signos: en $(x+m)^3$ todos los signos son positivos y en $(x-m)^3$ los signos positivo y negativo se alternan.

Ejemplos. Los desarrollos de $(2x^3+3a^2)^3$ y $(2x^3-3a^2)^3$ son:

$$(2x^3+3a^2)^3 = (2x^3)^3 + 3(2x^3)^2(3a^2) + 3(2x^3)(3a^2)^2 + (3a^2)^3 = 8x^9 + 36x^6a^2 + 54x^3a^4 + 27a^6.$$
$$(2x^3-3a^2)^3 = (2x^3)^3 - 3(2x^3)^2(3a^2) + 3(2x^3)(3a^2)^2 - (3a^2)^3 = 8x^9 - 36x^6a^2 + 54x^3a^4 - 27a^6.$$

Reactivos de Productos notables

Soluciones: véase la página 272. Desarrollos: véase la página 301

1. El resultado de la multiplicación de los binomios $(a^2-4)(a^2-9)$ es: ______.

   A. $a^4 + 13a^2 + 36$
   B. $a^4 - 36$
   C. $a^4 + 36$
   D. $a^4 - 13a^2 - 36$
   E. $a^4 - 13a^2 + 36$

2. Al desarrollar $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}\right)^2$, se obtiene: ______.

   A. $\frac{4}{9}x^4 - \frac{9}{4}$
   B. $\frac{4}{9}x^4 - 2x^2 + \frac{9}{4}$
   C. $\frac{4}{9}x^4 - x^2 + \frac{9}{4}$
   D. $\frac{4}{9}x^4 + \frac{9}{4}$
   E. $\frac{4}{9}x^4 + 2x^2 - \frac{9}{4}$

3. Al multiplicar el binomio $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}\right)$ por su conjugado, se obtiene: ______.

   A. $\frac{9}{4}x^4 + \frac{4}{9}$
   B. $\frac{9}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{4}{9}$
   C. $\frac{9}{4}x^4 - \frac{4}{9}$
   D. $\frac{9}{4}x^2 - \frac{4}{9}$
   E. $\frac{9}{4}x^4 - x^2 + \frac{4}{9}$

4. Al desarrollar $\left(x^3 - \frac{2}{3}\right)^3$, se obtiene: ______.

A. $x^6 - 2x^5 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{27}$

B. $x^9 - \frac{8}{27}$

C. $x^6 - \frac{8}{27}$

D. $x^9 - 2x^6 + 4x^3 - \frac{8}{27}$

E. $x^9 - 2x^6 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{27}$

5. El resultado de la multiplicación de los binomios $(u^4 - 5)(3 + u^4)$ es: ______.

   A. $u^6 - 2u^4 - 15$

   B. $u^8 - 15$

   C. $u^{16} - 15$

   D. $u^8 - 2u^4 - 15$

   E. $u^8 + 2u^4 - 15$

6. El resultado de la multiplicación $(a + b + c)(a + b - c)$ es: ______.

   A. $a^2 + b^2 - c^2$

   B. $a^2 + b^2 + c^2$

   C. $a^2 + b^2 - c^2 + 2ac$

   D. $a^2 + b^2 - c^2 + 2bc$

   E. $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

1.2.7 Factorización

La factorización es un procedimiento algebraico mediante el cual una expresión algebraica se escribe como un producto de dos o más factores. Por *ejemplo*: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.
Para factorizar una expresión algebraica es necesario tener presente lo siguiente:

Factor común. Un factor que está formando parte de cada término de una expresión algebraica es denominado factor común de dicha expresión.

¿Cómo factorizar una expresión algebraica que tiene un factor común? Uno de los factores es el factor común y el otro factor se obtiene dividiendo a cada término de la expresión entre dicho factor común. Por *ejemplo*, $(am + bm - cm)$ tiene un factor común que es m y el otro factor es:

$$\left(\frac{am}{m} + \frac{bm}{m} - \frac{cm}{m}\right) = (a + b - c).$$

Por lo tanto,

$$(am + bm - cm) = m(a + b - c).$$

Si una expresión algebraica tiene factores comunes, se toma como factor común al máximo común divisor de sus términos.

Por *ejemplo*, en la expresión algebraica $8x^2u^3 - 36x^3u^2 - 20x^4u$ el máximo común divisor de sus términos es $4x^2u$ y el otro factor es:

$$\left(\frac{8x^2u^3}{4x^2u} - \frac{36x^3u^2}{4x^2u} - \frac{20x^4u}{4x^2u}\right) = (2u^2 - 9xu - 5x^2).$$

Por lo tanto:

$$8x^2u^3 - 36x^3u^2 - 20x^4u \; = \; 4x^2u\,(2u^2 - 9xu - 5x^2).$$

Factorización por agrupación. Algunas expresiones algebraicas que no tienen un factor común pueden ser factorizadas si agrupamos los términos que sí tengan factores comunes.

Por *ejemplo*, $(am+bm-ax-bx)$ no tiene un factor común, pero notamos que los dos primeros términos $(am+bm)$ tienen a m como factor común y los dos últimos términos $(-ax-bx)$ tienen a $(-x)$ como factor común; factorizando cada pareja de términos:

$$\begin{aligned} am+bm-ax-bx &= (am+bm)+(-ax-bx) = \\ &= m(a+b)+(-x)(a+b) = m(a+b)-x(a+b). \end{aligned}$$

Ahora, el binomio $(a+b)$ es un factor común de los últimos términos obtenidos; factorizamos y obtenemos

$$am+bm-ax-bx = m(a+b)-x(a+b) = (a+b)(m-x).$$

Diferencia de cuadrados. Es una expresión algebraica de la forma a^2-b^2.

¿Cómo factorizar a^2-b^2? Del producto notable $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ se desprende que una diferencia de cuadrados es igual al producto de dos binomios conjugados. Esto es:

$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b).$$

Por *ejemplo*:

$$4x^2-9y^2 = (2x)^2-(3y)^2 = (2x+3y)(2x-3y).$$

Diferencia de cubos. Es una expresión algebraica de la forma a^3-b^3.

¿Cómo factorizar a^3-b^3? Al dividir (a^3-b^3) entre $(a-b)$ se obtiene el cociente (a^2+ab+b^2) y el residuo es cero, por lo que:

$$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Por *ejemplo*:

$$8x^3-27y^3 = (2x)^3-(3y)^3 = (2x-3y)[(2x)^2+(2x)(3y)+(3y)^2] = (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2).$$

Suma de cubos. Es una expresión algebraica de la forma a^3+b^3.

¿Cómo factorizar a^3+b^3? Al dividir (a^3+b^3) entre $(a+b)$ se obtiene el cociente (a^2-ab+b^2) y el residuo es cero por lo que:

$$(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Por *ejemplo*:

$$8x^3+27y^3 = (2x)^3+(3y)^3 = (2x+3y)[(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2] = (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2).$$

Trinomio cuadrado perfecto. Es todo trinomio que resulta del desarrollo del cuadrado de un binomio. Así, $(x^2+2ax+a^2)$ y $(x^2-2ax+a^2)$ son trinomios cuadrados perfectos, ya que son los desarrollos respectivos de $(x+a)^2$ y de $(x-a)^2$.

¿Cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto? Primero se deben identificar los términos que conformarían al binomio y luego verificar que el doble producto de ellos coincida con uno de los términos del trinomio dado; y será el signo de este término, el que conecte los términos del binomio.

Por *ejemplo*, para factorizar el trinomio $9x^2-30xy^2+25y^4$, primero vemos que $9x^2 = (3x)^2$ y $25y^4 = (5y^2)^2$; luego vemos que $2(3x)(5y^2) = 30xy^2$, que es precisamente el término intermedio del trinomio dado. Por lo tanto:

$$9x^2-30xy^2+25y^4 = (3x)^2-2(3x)(5y^2)+(5y^2)^2 = (3x-5y^2)^2.$$

Así también:

$$9x^2+30xy^2+25y^4 = (3x)^2+2(3x)(5y^2)+(5y^2)^2 = (3x+5y^2)^2.$$

Trinomio cuadrático $x^2 + px + q$. Del producto notable $(x+m)(x+n) = x^2+(m+n)x+mn$ se desprende que existen trinomios cuadráticos $(x^2 + px + q)$ que pueden ser factorizados como:

$$(x^2 + px + q) = (x + m)(x + n), \text{ donde } m \ \& \ n \text{ son números tales que } mn = q \ \& \ m + n = p.$$

Por *ejemplo*, para factorizar $(x^2 + 2x - 15)$, se buscan dos números m & n tales que: $mn = -15$ y $m + n = 2$. Esos números son $m = 5$ & $n = -3$ ya que $(5)(-3) = -15$ y $(5) + (-3) = 2$. Por lo tanto:

$$(x^2 + 2x - 15) = (x + 5)(x - 3).$$

Trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ Para factorizar ax^2+bx+c existen dos métodos; uno funciona en casos particulares y otro más que se presenta en la nota.

Casos particulares. Algunos trinomios cuadráticos pueden ser factorizados de la manera siguiente: primero se multiplica y se divide entre a, para luego hacer la sustitución $ax = u$:

$$ax^2 + bx + c = \frac{a(ax^2 + bx + c)}{a} = \frac{a^2x^2 + a(bx) + ac}{a} =^{1}$$
$$= \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a} = \frac{u^2 + bu + ac}{a}.$$

Luego se factoriza $(u^2 + bu + ac) = (u + m)(u + n)$, donde $mn = ac$ y donde $m + n = b$. Finalmente, se recupera $u = ax$ y se simplifica eliminando el denominador a.
Por *ejemplo*, para factorizar el trinomio $6x^2 + 5x - 4$ procedemos de la manera siguiente:

$$6x^2 + 5x - 4 = \frac{6(6x^2 + 5x - 4)}{6} = \frac{6^2x^2 + 6(5x) - 24}{6} =^{2} \frac{(6x)^2 + 5(6x) - 24}{6} =$$
$$= \frac{u^2 + 5u - 24}{6} = \frac{(u + m)(u + n)}{6},$$

donde $u = 6x$, $mn = -24$ y $m + n = 5$. Los números son $m = 8$ y $n = -3$ ya que: $(8)(-3) = -24$ y $(8) + (-3) = 5$. Por lo tanto,

$$6x^2 + 5x - 4 = \frac{u^2 + 5u - 24}{6} = \frac{(u + 8)(u - 3)}{6} = \frac{(6x + 8)(6x - 3)}{6} =$$
$$= \frac{2(3x + 4)3(2x - 1)}{6} = (3x + 4)(2x - 1).$$

Nota. Otro procedimiento para intentar factorizar un trinomio cuadrático consiste en completar un trinomio cuadrado perfecto. Para esto se debe tener presente que el trinomio cuadrado perfecto asociado al binomio $(x^2 + \alpha x)$ es:

$$x^2 + \alpha x + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

El procedimiento general es el siguiente:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] =^{3} a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] =$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Suponiendo que $c \neq 0$, esta última expresión podría ser una diferencia de cuadrados, que puede ser factorizada, o bien una suma de cuadrados que no puede puede ser factorizada mediante factores reales.

1. El producto $a(bx)$ se escribe como $b(ax)$.
2. El producto $6(5x)$ se escribe como $5(6x)$.
3. Se suma $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ para completar un trinomio cuadrado perfecto y luego se resta lo mismo para que la expresión no se altere.

Reactivos de Factorización

Soluciones: véase la página 272. Desarrollos: véase la página 302

1. Al factorizar la expresión algebraica $-18a^5b^3 - 24a^4b^4 + 6a^3b^2$, uno de sus factores es: ______.

   A. $-24a^5b^4$
   B. $3a^2b - 4ab^2 + 1$
   C. $6a^5b^4$
   D. $3a^2b + 4ab^2 - 1$
   E. $-3a^2b + 4ab^2 + 1$

2. Al factorizar la expresión algebraica $ax - 6 + 3x - 2a$, uno de sus factores es: ______.

   A. $x + 2$
   B. $a - 3$
   C. $x - a$
   D. $x - 2$
   E. $a - 2$

3. Al factorizar la expresión algebraica $x^2 - 9x + 18$, se obtiene que uno de sus factores es: ______.

   A. $x - 6$
   B. $x + 3$
   C. $x + 6$
   D. $x - 9$
   E. $x - 2$

4. Al factorizar la expresión algebraica $x^2 - 8$, se obtiene que uno de sus factores es: ______.

   A. $x - 4$
   B. $x - 2$
   C. $x - 4\sqrt{2}$
   D. $x + 4$
   E. $x + 2\sqrt{2}$

5. Al factorizar la expresión algebraica $x^2 + x - 12$, uno de sus factores es: ______.

   A. $x - 4$
   B. $x + 4$
   C. $x + 3$
   D. $x - 6$
   E. $x - 2$

6. Al factorizar el polinomio $6x^2 - 5x - 6$, uno de sus factores es: ______.

   A. $2x + 3$
   B. $3x + 2$
   C. $3x - 2$
   D. $6x - 1$
   E. $x - 6$

7. Al factorizar el binomio $x^3 - 125$, uno de sus factores es: ________.

   A. $x + 5$
   B. $x^2 - 5x + 25$
   C. $x^2 + 25$
   D. $x^2 + 5x + 25$
   E. $x^2 - 5x - 25$

8. Al factorizar el polinomio $x^3 - x^2 + 4x - 4$, uno de sus factores es: ________.

   A. $x + 1$
   B. $x - 4$
   C. $x + 4$
   D. $x^2 + 1$
   E. $x - 1$

9. Al factorizar el trinomio $4x^2 - 19x + 12$, uno de sus factores es: ________.

   A. $4x + 3$
   B. $4x - 3$
   C. $x + 4$
   D. $2x - 3$
   E. No se puede factorizar

10. Al factorizar el binomio $1 + a^3$, uno de sus factores es: ________.

   A. $1 + a^2$
   B. $1 + a + a^2$
   C. $1 - a + a^2$
   D. $a^2 - a - 1$
   E. $1 - a$

11. Al factorizar el polinomio $x^2 + 4x - 1$, uno de sus factores es: ________.

   A. $x + 2 + \sqrt{5}$
   B. $x - 1$
   C. $x + 2 - \sqrt{3}$
   D. $x + 1$
   E. $x - 2 - \sqrt{5}$

12. Al factorizar el trinomio $x^3 - x^2 - 12x$, uno de sus factores es: ________.

   A. $x - 3$
   B. $x + 4$
   C. $x - 12$
   D. $x - 4$
   E. $x - 2$

13. Al factorizar el trinomio $8x^2 - 10x - 3$, uno de sus factores es: ________.

   A. $4x - 1$

B. $4x - 3$
C. $2x + 3$
D. $4x + 1$
E. No tiene factores reales

14. Al factorizar el polinomio $x^2 - 2x + 2$, uno de sus factores es: ______.

A. $x - 2$
B. $x + 2$
C. No tiene factores reales
D. $x - 1$
E. $x + 1$

15. Al factorizar el binomio $x^4 - 16$, uno de sus factores es: ______.

A. $x - 4$
B. $x + 4$
C. $x + 2$
D. $x^3 - 8$
E. $x^3 + 8$

16. Al factorizar el polinomio $2x^2 - 6x + 1$, uno de sus factores es: ______.

A. $2x - 3 + \sqrt{7}$
B. $2x + 1$
C. $x - 3 - \sqrt{7}$
D. $x + 1$
E. No se puede factorizar

1.2.8 Operaciones con fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es la razón de un numerador entre un denominador, donde éstos son, en general, expresiones algebraicas. Por *ejemplo*:

$$\frac{x+1}{x-3}; \quad \frac{3}{x^2+1}; \quad \frac{x^2-2x+1}{x^2+4x-12}; \quad \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Un principio fundamental de las fracciones es: si tanto el numerador como el denominador son multiplicados o divididos por una misma cantidad o expresión algebraica, la fracción no se altera. Esto es:

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{mq}; \qquad \& \quad \frac{p}{q} = \frac{\left(\frac{1}{m}\right) p}{\left(\frac{1}{m}\right) q} = \frac{\frac{p}{m}}{\frac{q}{m}}.$$

Por *ejemplo*:

$$\frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-x-6}{x^2-4},$$

así como

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-4} = \frac{\frac{x^2-x-6}{x+2}}{\frac{x^2-4}{x+2}} = \frac{x-3}{x-2}.$$

Si el numerador y el denominador de una fracción tienen una expresión algebraica que es factor común de ambos, se puede eliminar dicho factor. Esto nos permite simplificar la fracción. Cuando numerador

y denominador de una fracción no tienen factores en común, se dice que la fracción está reducida a su mínima expresión, por lo cual es irreducible. De aquí que para reducir una fracción a su mínima expresión, se deben factorizar numerador y denominador, para luego eliminar factores comunes al numerador y al denominador.
Por *ejemplo*, factorizando y luego simplificando:

$$\frac{x^3+x^2-12x}{x^3-5x^2+6x}=\frac{x(x^2+x-12)}{x(x^2-5x+6)}=\frac{\cancel{x}(x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x}(x-2)\cancel{(x-3)}}=\frac{x+4}{x-2}.$$

La última fracción es irreducible.

Suma algebraica. Para sumar y/o restar fracciones algebraicas (que se suponen simplificadas), se llevan a cabo los pasos siguientes:

1. Se factorizan los denominadores.
2. Se obtiene el mínimo común denominador (mcd) de los denominadores, que es igual al producto de los factores comunes y no comunes en su máxima potencia.
3. Se divide el mcd entre cada denominador y el resultado se multiplica por el numerador correspondiente.
4. Se suman y/o restan los productos obtenidos y se reducen términos semejantes, para así tener el numerador de la fracción resultante.
5. Finalmente, se simplifica la fracción algebraica resultante y se reduce a su mínima expresión.

Por *ejemplo*:

$$\begin{aligned}\frac{4}{x^2-x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2-2x+1}&=\frac{4}{x(x-1)}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{4x(x-1)-2(x-1)^2-2x^2}{x^2(x-1)^2}=\\&=\frac{4x^2-4x-2(x^2-2x+1)-2x^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2+4x-2-2x^2}{x^2(x-1)^2}=\\&=\frac{-2}{x^2(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Nótese que en este caso el mcd de los denominadores $x(x-1)$, x^2 y $(x-1)^2$ resultó ser $x^2(x-1)^2$.

Multiplicación. El producto de dos o más fracciones algebraicas es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores, de las fracciones involucradas. Se recomienda simplificar la fracción algebraica resultante, es decir, reducirla a su mínima expresión.

Por *ejemplo*:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x-15}{x^2+5x-14}\cdot\frac{x^3-2x^2}{x^2+6x+9}&=\frac{(x-5)(x+3)}{(x+7)(x-2)}\cdot\frac{x^2(x-2)}{(x+3)^2}=\frac{(x-5)(x+3)x^2(x-2)}{(x+7)(x-2)(x+3)^2}=\\&=\frac{x^2(x-5)(x+3)(x-2)}{(x+7)(x+3)(x+3)(x-2)}=\frac{x^2(x-5)}{(x+7)(x+3)}=\frac{x^3-5x}{x^2+10x+21}.\end{aligned}$$

Fracciones recíprocas. Dos fracciones algebraicas son recíprocas si su producto es 1. De aquí que las fracciones $\frac{m}{n}$ & $\frac{n}{m}$ son recíprocas ya que su producto es:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=\frac{mn}{nm}=1.$$

Para tener la recíproca de una fracción dada, sólo se intercambian los papeles de numerador y denominador. Por *ejemplo*: la fracción recíproca de $\frac{x+5}{x-3}$ es $\frac{x-3}{x+5}$.

División. Para dividir una fracción algebraica (dividendo) entre otra fracción (divisor), se multiplica el dividendo por la fracción recíproca del divisor.

Por *ejemplo*:

$$\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right) \div \left(\frac{x^3+x^2+x}{x^3-x^2+x}\right) = \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right) \cdot \left(\frac{x^3-x^2+x}{x^3+x^2+x}\right) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x(x^2-x+1)}{x(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)x(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)x(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)x(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)x(x^2-x+1)} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Reactivos de Operaciones con fracciones algebraicas

Soluciones: véase la página 272. Desarrollos: véase la página 307

1. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x+2} = \underline{\qquad\qquad}.$$

A. $\dfrac{2x+1}{2x+3}$

B. $\dfrac{-4}{x^2+2}$

C. $\dfrac{-4}{x^2+3x+2}$

D. $\dfrac{2x}{x^2+3x+2}$

E. $\dfrac{2x-3}{2x+3}$

2. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{x^2+5}{x^2} - \frac{x-2}{x} = \underline{\qquad\qquad}.$$

A. $\dfrac{x+3}{x}$

B. $\dfrac{2x+5}{x^2}$

C. $\dfrac{x^2-x+3}{x^2}$

D. $\dfrac{x^2-x+7}{x^2}$

E. $\dfrac{2x^2+5}{x^3}$

3. Efectuar las operaciones siguientes y simplificar.

$$\frac{1}{x(x-1)} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{(x-1)^2} = \underline{\qquad\qquad}.$$

A. $\dfrac{5x-3}{(x^3-x^2)^2}$

B. $\dfrac{-2x}{x^2(x-1)^2}$

C. $\dfrac{-x+3}{x^2(x-1)^2}$

D. $\dfrac{-3x+1}{x^2(x-1)^2}$

E. $\dfrac{5x-3}{x^2(x-1)^2}$

4. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{2}{x(x-2)} - \frac{1}{x-2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

A. $\dfrac{x+2}{x(x-2)}$

B. $\dfrac{1}{x}$

C. $-\dfrac{2+x}{x^2-2x}$

D. $-\dfrac{1}{x}$

E. $\dfrac{2-x}{x^2-2}$

5. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{8}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

A. $-\dfrac{1}{x+1}$

B. $\dfrac{10-2x}{x^2-4}$

C. $-\dfrac{2}{x+2}$

D. $\dfrac{6}{x^2-x-2}$

E. $\dfrac{-8+8x-2x^2}{x^3+8}$

6. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

A. $\dfrac{x^2-4}{x^3-1}$

B. $\dfrac{x^2-2}{x^3-1}$

C. $\dfrac{-2}{x-x^3}$

D. $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$

E. $\dfrac{x+2}{x^2-x+1}$

7. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+\frac{4x^2}{x^2-9}=\_\_\_\_\_\_\_.$$

A. $\dfrac{4x^2-18}{x^2-9}$

B. $\dfrac{4x}{x+3}$

C. $\dfrac{4x^2}{x^2-9}$

D. $\dfrac{4x}{x-3}$

E. $\dfrac{18+4x^2}{x^2-9}$

8. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-8}\right)\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9}\right)=\_\_\_\_\_\_\_.$$

A. $\dfrac{2(x-1)}{3(x-4)}$

B. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-12}$

C. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-12}$

D. $\dfrac{2(2x+3)(x-1)}{3(2x-3)(x-4)}$

E. $\dfrac{-2(x-1)}{3(x-4)}$

9. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2-5x-2}\right)\div\left(\frac{2x^2+3x-2}{3x^2-2x-1}\right)=\_\_\_\_\_\_\_.$$

A. $\dfrac{(x-1)^2}{(x-2)^2}$

B. $\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$

C. $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

D. $\dfrac{(2x-1)^2}{(3x+1)^2}$

E. $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

10. Efectuar las operaciones siguientes y simplificar.

$$\frac{1+\frac{2}{x-2}}{1+\frac{4}{x^2-4}}=\_\_\_\_\_\_\_.$$

A. $\dfrac{x-2}{x}$

B. $\dfrac{x}{x+2}$

C. $\dfrac{x+2}{2}$

D. $\dfrac{2}{x+2}$

E. $\dfrac{x+2}{x}$

1.2.9 Racionalización

En ocasiones es necesario transformar una expresión algebraica que contiene radicales en otra expresión que sea más útil y se pueda manipular.

La racionalización es un procedimiento algebraico que se utiliza con este propósito y que está estrechamente ligado a fracciones algebraicas. Se habla de racionalizar el numerador o el denominador de una fracción algebraica.

Al racionalizar el numerador o el denominador se pretende eliminar el o los radicales del numerador o del denominador, respectivamente. Decimos eliminar, pero realmente lo que se hace es mover radicales del numerador al denominador o viceversa, según la necesidad que se tenga.

Es común racionalizar numeradores o denominadores que son binomios formados con uno o dos radicales del mismo orden o índice.

Para racionalizar una suma o una diferencia de raíces cuadradas, se debe tener presente la identidad:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Para racionalizar una suma o una diferencia de raíces cúbicas, se deben tener presentes las identidades:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \quad \text{y} \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3.$$

Ejemplo. Racionalizar el numerador de la fracción:

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

▼ Para eliminar las raíces cuadradas de la diferencia $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$, multiplicamos el numerador por la suma $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ (por su conjugado) para así generar la diferencia de cuadrados $\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2$ que permita la eliminación requerida; pero también el denominador (h) debe ser multiplicado por la suma mencionada, para que así la fracción no sea alterada.

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$
$$= \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

□

Ejemplo. Racionalizar el numerador de la fracción:

$$\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}.$$

▼ Para eliminar las raíces cúbicas de la diferencia $\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}$, multiplicamos el numerador por el trinomio $\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$ para así generar la diferencia de cubos $\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$ que permita la eliminación requerida. Y para que la fracción no sea alterada, también el denominador (h) debe ser multiplicado por el trinomio mencionado.

$$\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}{h\left[\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{h\left[\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}=\frac{x+h-x}{h\left[\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}=$$
$$=\frac{h}{h\left[\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

□

Reactivos de Racionalización

Soluciones: véase la página 272. Desarrollos: véase la página 311

1. Al racionalizar el numerador de la fracción:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2},$$

y luego simplificar, se obtiene: ______.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6+x}}$

B. $\dfrac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}$

C. $\dfrac{-4}{x-2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}$

D. $\dfrac{2}{\overline{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}}$

E. $\dfrac{-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6+x}\right)}$

2. Al racionalizar el denominador de la fracción:

$$\frac{4-x}{\sqrt{x}-2},$$

y luego simplificar, se obtiene: ______.

A. $\sqrt{x}+2$

B. $\sqrt{x}-2$

C. $-\sqrt{x}-2$

D. $\dfrac{\sqrt{x}+2}{4+x}$

E. $-\sqrt{x}+2$

3. Al racionalizar el numerador y el denominador de la fracción:

$$\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}},$$

y luego simplificar, se obtiene: ______.

A. $\dfrac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}$

B. $-\dfrac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}$

C. $-\dfrac{1+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5-x}}$

D. $\dfrac{1+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5-x}}$

E. $\dfrac{3+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5+x}}$

4. Al racionalizar la expresión algebraica:

$$x-\sqrt{x^2-2x},$$

y luego simplificar, se obtiene: ______.

A. $\dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-2x}}$

B. $\dfrac{2}{1+\sqrt{x^2-2x}}$

C. $\dfrac{-2x}{x+\sqrt{x^2-2x}}$

D. $\dfrac{-2}{1+\sqrt{x^2-2x}}$

E. $\dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}$

5. Al racionalizar la fracción algebraica:

$$\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x},$$

y luego simplificar, se obtiene: ______.

A. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1$

B. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{x+1}+1}$

C. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x+1}+1}$

D. $\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{x+1}+1$

E. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$

1.2.10 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación es una igualdad matemática que consta de un simbolo igual (=) y una expresión algebraica a cada lado de éste. Se denominan miembros de la ecuación a dichas expresiones algebraicas. Una ecuación en donde aparece una letra (una literal) con valor desconocido, comúnmente la letra x, es una ecuación con una incógnita. Cuando en una ecuación la literal (también conocida como variable) aparece con exponente uno, la ecuación es de primer grado. Ejemplos de ecuaciones de primer grado con una incógnita:

$$x = 7; \quad 3x + 5 = 0; \quad 2x + 1 = \frac{x}{3}.$$

Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita consiste en encontrar el valor de ésta que permita que la igualdad se cumpla; a dicho valor se le denomina solución de la ecuación. Observa que en la ecuación $\frac{x}{4}+1 = 3$, el valor de x que permite que la igualdad se cumpla es 8. Se dice entonces que $x = 8$ es la solución de la ecuación $\frac{x}{4} + 1 = 3$. Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se aplica, según convenga, bien la propiedad aditiva,[4] bien la propiedad multiplicativa,[5] o bien ambas propiedades en la igualdad, hasta aislar la variable en un miembro de la ecuación. Esto también se conoce como despejar la incógnita.

Ejemplos:

- Para despejar x de la ecuación $x - 5 = 7$, se aplica la propiedad aditiva en la igualdad sumando 5 en ambos lados (en ambos miembros), de la ecuación, esto es:

  $$x - 5 = 7 \;\Rightarrow\; x - 5 + 5 = 7 + 5 \;\Rightarrow\; x = 12.$$

  Cuando x es igual a 12, la igualdad $x - 5 = 7$ se cumple, por lo que $x = 12$ es la solución a la ecuación dada.

- Para despejar x en la ecuación $\frac{x}{7} = 3$, se aplica la propiedad multiplicativa en la igualdad multiplicando por 7 ambos lados de la ecuación, esto es:

  $$\frac{x}{7} = 3 \;\Rightarrow\; (7)\frac{x}{7} = (7)3 \;\Rightarrow\; x = 21.$$

  Cuando x es igual a 21, la igualdad $\frac{x}{7} = 3$ se cumple, por lo que $x = 21$ es la solución de la ecuación dada.

Reactivos de Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Soluciones: véase la página 272. Desarrollos: véase la página 313

1. Al resolver la ecuación

   $$4 - 3x = 2x + 9,$$

   hallamos que: ________.

   A. $x = -5$

   B. $x = \frac{9}{5}$

   C. $x = \frac{13}{5}$

---

4. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
   También, si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.

5. Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.
   También, si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

D. $x = 1$
E. $x = -1$

2. El valor de x que resuelve la ecuación $2x + 2 - 3x = -2 - 4x + 3$ es: ______.

A. 3
B. $-\frac{1}{2}$
C. $-\frac{1}{3}$
D. -3
E. $\frac{1}{3}$

3. La solución de la ecuación $3(5a + 2) = \frac{3 - 6a}{2}$ es: ______.

A. $a = 9$
B. $a = \frac{1}{2}$
C. $a = -\frac{1}{3}$
D. $a = 36$
E. $a = -\frac{1}{4}$

4. El valor de la incógnita x que resuelve la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}}{3}$ es: ______.

A. $-\frac{3}{11}$
B. $\frac{6}{22}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{11}{3}$
E. $\frac{1}{11}$

1.2.11 Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Un sistema de ecuaciones lineales 2×2 es un conjunto de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los siguientes pares de ecuaciones representan sistemas de ecuaciones lineales 2×2.

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 9; \\ 3x + y &= 5. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= 3x + 2; \\ y &= -2x - 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3z &= 23 - 4d; \\ d + 2z &= 12. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x &= 6; \\ 2x + y &= 9. \end{aligned}$$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 es la solución común a las dos ecuaciones.

En el caso del primer sistema de ecuaciones la solución es $x = 1$ & $y = 2$. Si se usan estos dos valores en ambas ecuaciones del sistema, ambas igualdades se cumplen.

Para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2, se presentan a continuación los métodos sustitución, suma o resta e igualación.

Método de sustitución	*Ejemplo*
Para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 se siguen los siguientes pasos.	Resolver por sustitución el sistema: $5x + 2y = 9; \qquad (1)$ $3x + \ \ y = 5. \qquad (2)$
Primero. Despejar de una de las ecuaciones una de las incógnitas.	Primero. De la ecuación (1) se despeja x: $5x + 2y = 9 \ \Rightarrow \ 5x = 9 - 2y \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ x = \dfrac{9-2y}{5}.$
Segundo. La expresión encontrada de la incógnita despejada se usa en la otra ecuación. De esta manera se obtiene una ecuación (*) con una sola incógnita.	Segundo. La expresión encontrada de x se usa en la ecuación (2): $3x + y = 5 \ \ (2) \ \ \& \ x = \dfrac{9-2y}{5}$, entonces: $3\left(\dfrac{9-2y}{5}\right) + y = 5. \qquad (*)$
Tercero. De la ecuación obtenida (*) se despeja la incógnita.	Tercero. De la ecuación obtenida (*) se despeja la incógnita y $3\left(\dfrac{9-2y}{5}\right) + y = 5 \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ 3\left(\dfrac{9-2y}{5}\right) = 5 - y \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ \dfrac{27-6y}{5} = 5 - y \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ 27 - 6y = 5(5-y) \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ 27 - 6y = 25 - 5y \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ -6y + 5y = 25 - 27 \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ -y = -2 \ \Rightarrow \ y = 2.$
Cuarto. El valor encontrado de la incógnita en (*) se utiliza en la expresión obtenida en el primer paso.	Cuarto. Se usa $y = 2$ en la expresión que se tiene para x obtenida en el primer paso. $x = \dfrac{9-2y}{5} \ \ \& \ y = 2 \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ x = \dfrac{9-2(2)}{5} = \dfrac{9-4}{5} \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ x = \dfrac{5}{5} \ \Rightarrow \ x = 1.$
Con estos pasos, el método de sustitución permite determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2.	Se concluye que la solución del sistema de ecuaciones lineales 2×2 es: $x = 1 \qquad \& \qquad y = 2.$

Método de suma o resta	*Ejemplo*
Para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método de suma o resta se siguen los siguientes pasos.	Resolver por suma o resta el sistema: $$\begin{aligned} 5y + x &= 7; \qquad (1) \\ 2y + 4x &= -8. \qquad (2) \end{aligned}$$
Primero. Se trata de obtener una ecuación con una sola incógnita después de sumar o restar las ecuaciones del sistema. Para esto es necesario reescribir el sistema dado, de manera tal que los coeficientes de una de las incógnitas difieran sólo en el signo (o bien que sean iguales), para que al sumar (o restar) las ecuaciones, dicha incógnita sea eliminada.	Primero. Observar que conviene multiplicar la ecuación (1) por -4, para así tener el término $-4x$ que eliminaría al término $4x$ de la ecuación (2): $$(-4)(5y) + (-4)(x) = (-4)(7) \Rightarrow \\ \Rightarrow -20y - 4x = -28.$$ Con esto el sistema queda así: $$\begin{aligned} -20y - 4x &= -28; \qquad (1') \\ 2y + 4x &= -8. \qquad (2') \end{aligned}$$
Segundo. Se suman ambas ecuaciones (los términos de una ecuación con los semejantes de la otra) para obtener una ecuación con una sola incógnita.	Segundo. Se suman ambas ecuaciones: $$\begin{array}{r} -20y - 4x = -28 \\ 2y + 4x = -8 \\ \hline -18y + 0 = -36\,. \end{array} +$$
Tercero. Se resuelve la expresión obtenida.	Tercero. Se resuelve la ecuación obtenida: $$-18y = -36 \Rightarrow y = \frac{-36}{-18} \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \frac{(-6)(6)}{(-6)(3)} \Rightarrow y = 2.$$
Cuarto. El valor encontrado de la incógnita se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema para así determinar el valor de la otra incógnita.	Cuarto. $y = 2$ se usará en (1) [también se puede utilizar en (2)] para encontrar el valor de x. Esto es: $$5y + x = 7. \qquad (1) \\ 5(2) + x = 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 7 - 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = -3.$$
Finalmente, se concluye con la solución del sistema.	Se concluye que la solución del sistema de ecuaciones lineales 2×2 es: $$x = -3 \quad \& \quad y = 2.$$

Método de igualación	*Ejemplo*
Para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método de igualación, se siguen los siguientes pasos.	Resolver por igualación el sistema: $$\begin{aligned} 3x + 4y &= -6; \qquad (1)\\ 5x - 3y &= 19. \qquad (2)\end{aligned}$$
Primero. De ambas ecuaciones de despeja la misma incógnita.	Primero. Despejamos la incógnita x de ambas ecuaciones $$3x + 4y = -6 \Rightarrow 3x = -4y - 6 \Rightarrow x = \frac{-4y-6}{3};$$ $$5x - 3y = 19 \Rightarrow 5x = 19 + 3y \Rightarrow x = \frac{19+3y}{5}.$$
Segundo. Se igualan las expresiones algebraicas obtenidas para la incógnita despejada, obteniéndose así una ecuación con una incógnita.	Segundo. Igualamos las expresiones algebraicas obtenidas para la incógnita x: $$\frac{-4y-6}{3} = \frac{3y+19}{5}.$$
Tercero. Se resuelve la ecuación obtenida, para así determinar el valor de una de las incógnitas del sistema.	Tercero. Resolvemos para obtener la incógnita y: $$5(-4y-6) = 3(3y+19) \Rightarrow$$ $$\Rightarrow -20y - 30 = 9y + 57 \Rightarrow$$ $$\Rightarrow -20y - 9y = 57 + 30 \Rightarrow$$ $$\Rightarrow -29y = 87 \Rightarrow$$ $$\Rightarrow y = \frac{87}{-29} \Rightarrow$$ $$\Rightarrow y = -3.$$
Cuarto. Aplicamos el valor determinado para la incógnita en cualquiera de las expresiones algebraicas que se tienen de la otra incógnita .	Cuarto. Usamos $y = -3$ en $x = \frac{3y+19}{5}$. $$x = \frac{3(-3)+19}{5} = \frac{-9+19}{5} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow$$ $$\Rightarrow x = 2.$$
Finalmente se concluye con la solución del sistema.	Se concluye que la solución del sistema dado es: $$x = 2 \quad \& \quad y = -3.$$

Reactivos de Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Soluciones: véase la página 272. Desarrollos: véase la página 315

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales e indicar la respuesta: ______.

$$\begin{aligned} 12y &= 7x - 14;\\ 7x + 14 &= -8y.\end{aligned}$$

A. $x = -\frac{5}{2} \quad \& \quad y = \frac{7}{5}$

B. $x = \frac{2}{5}$ & $y = -\frac{5}{7}$

C. $x = \frac{5}{2}$ & $y = \frac{5}{7}$

D. $x = -\frac{2}{5}$ & $y = \frac{5}{7}$

E. $x = -\frac{2}{5}$ & $y = -\frac{7}{5}$

2. Determinar el valor de las incógnitas x & y que satisfacen las siguientes ecuaciones. Escribir la respuesta: ________.

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{2x}{3} + 2; \\ y + 3 &= 4x. \end{aligned}$$

A. $x = -12$ & $y = 15$

B. $x = \frac{12}{11}$ & $y = \frac{15}{11}$

C. $x = \frac{2}{3}$ & $y = 4$

D. $x = 2$ & $y = 3$

E. $x = 11$ & $y = 12$

3. Resolver el sistema de ecuaciones lineales. Escribir la respuesta: ________.

$$\begin{aligned} 5a + 6b &= -1; \\ 3a - 2b &= \ \ 5. \end{aligned}$$

A. $a = \frac{5}{3}$ & $b = -\frac{14}{9}$

B. $a = -\frac{5}{3}$ & $b = \frac{7}{5}$

C. $a = -\frac{3}{5}$ & $b = -\frac{5}{7}$

D. $a = 1$ & $b = -1$

E. $a = \frac{3}{5}$ & $b = -\frac{9}{7}$

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Escribir la respuesta: ________.

$$\begin{aligned} y &= \ \ 3x + 6; \\ y &= -\frac{x}{3} - 4. \end{aligned}$$

A. $x = \frac{1}{3}$ & $y = -3$

B. $x = -3$ & $y = 3$

C. $x = -3$ & $y = -3$

D. $x = 6$ & $y = -4$

E. $x = -4$ & $y = -6$

5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Escribir la respuesta: ________.

$$\begin{aligned} -5x + 2y &= 16; \\ 4x + 3y &= \ \ 1. \end{aligned}$$

A. $x = 2 \quad \& \quad y = -3$
B. $x = -2 \quad \& \quad y = -3$
C. $x = 2 \quad \& \quad y = 3$
D. $x = -2 \quad \& \quad y = 3$
E. $x = 3 \quad \& \quad y = -2$

1.2.12 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Una ecuación de segundo grado con una incógnita o ecuación cuadrática es una expresión algebraica de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, c son números conocidos, con $a \neq 0$; x es la incógnita. Se exige que $a \neq 0$ para que la ecuación sea, en efecto, de segundo grado.
Ejemplos de ecuaciones de segundo grado con una incógnita son los siguientes:

$$3x^2 + x - 5 = 0; \qquad x^2 - 2 = 6x;$$

$$b^2 - 4b - 1 = 0; \qquad -z^2 + 5 + z = 0;$$

$$2x^2 + 1 = 0; \qquad \frac{d^2}{3} + d = 5;$$

$$x^2 = 9x; \qquad d^2 = d - 1.$$

Se dice que $x = n$ es solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, si al usar n en vez de la incógnita x la igualdad se satisface; esto es, si $an^2 + bn + c = 0$.
Por *ejemplo*, $x = 3$ es solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 9 = 0$, ya que al utilizar el número 3 en vez de la incógnita x, se obtiene:

$$(3)^2 - 6(3) + 9 = 0 \;\Rightarrow\; 9 - 18 + 9 = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0.$$

Así también, $x = -3$ no es solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 9 = 0$, ya que al usar el número -3 en vez de la incógnita x, se obtiene:

$$(-3)^2 - 6(-3) + 9 = 0 \;\Rightarrow\; 9 + 18 + 9 = 0 \;\Rightarrow\; 36 = 0.$$

La cual no es una igualdad.
La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene a lo más dos soluciones reales, que se obtienen mediante la aplicación de la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dichas soluciones dependen del signo que tenga el número $b^2 - 4ac$, el cual es denominado discriminante.

- Si $b^2 - 4ac$ es un número positivo ($b^2 - 4ac > 0$), la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \& \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ y las soluciones reales resultan ser:

$$x_1 = \frac{-b + 0}{2a} = -\frac{b}{2a} \quad \& \quad x_1 = \frac{-b - 0}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

  Las dos soluciones son iguales. Se tiene una solución real repetida y se dice que se tiene una solución real de multiplicidad dos.

- Si $b^2 - 4ac$ es un número negativo ($b^2 - 4ac < 0$), entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es un número real. En este caso se dice que la ecuación no tiene soluciones reales.

Dos ecuaciones cuadráticas muy particulares son $ax^2 + bx = 0$ (cuando $c = 0$) así como $ax^2 + c = 0$ (cuando $b = 0$). En estos casos no es necesario utilizar la fórmula general para resolverlos. A saber:

- Si se tiene $ax^2 + bx = 0$, entonces factorizando:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{o bien} \quad ax + b = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{o bien} \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Las soluciones son $x_1 = 0$ & $x_2 = -\frac{b}{a}$.

- Si se tiene $ax^2 + c = 0$, entonces puede suceder que:

  a & c tengan igual signo, en cuyo caso no hay soluciones reales.

  a & c tengan signos diferentes, en cuyo caso hay dos soluciones reales diferentes:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

  Una solución positiva y la otra negativa.

Otra ecuación cuadrática particular se tiene cuando $a = 1$. En este caso, $x^2 + bx + c = 0$. Si factorizando resulta que

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n),$$

entonces podemos resolver la ecuación de la siguiente manera:

$$x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x + m)(x + n) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + m = 0 \quad \text{o bien} \quad x + n = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -m \quad \text{o bien} \quad x = -n.$$

Las soluciones son $x_1 = -m$ & $x_2 = -n$.

Reactivos de Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Soluciones: véase la página 273. Desarrollos: véase la página 319

1. Al resolver la ecuación $x^2 - 4x = 21$, se obtiene: ______.

   A. $x = -3; \quad x = -7$
   B. $x = 3; \quad x = -7$
   C. $x = -3; \quad x = -3$
   D. $x = -3; \quad x = 7$
   E. No hay soluciones reales

2. Al resolver la ecuación $x^2 = 9$, se obtiene: ______.

   A. La ecuación no tiene soluciones
   B. $x = -3; \quad x = 3$
   C. $x = 3; \quad x = 3$
   D. $x = -3; \quad x = -3$
   E. $x = \sqrt{9}$

3. Al resolver la ecuación $6x^2 + 5x - 6 = 0$, se obtiene: ______.

   A. $x = \frac{3}{2}$; $x = \frac{2}{3}$
   B. $x = -\frac{2}{3}$; $x = \frac{3}{2}$
   C. $x = -\frac{3}{2}$; $x = \frac{2}{3}$
   D. $x = -3$; $x = 2$
   E. No hay soluciones reales

4. Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 4x = 0$ son: ______.

   A. $x = 0$; $x = -\frac{4}{3}$
   B. $x = 0$; $x = \frac{3}{4}$
   C. $x = \frac{4}{3}$; $x = \frac{4}{3}$
   D. $x = \frac{4}{3}$; $x = 0$
   E. No tiene soluciones reales

5. Las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 1 = 0$ son: ______.

   A. $x = -2 + \sqrt{3}$; $x = -2 - \sqrt{3}$
   B. $x = 2 - \sqrt{3}$; $x = 2 + \sqrt{3}$
   C. $x = 2 - 2\sqrt{3}$; $x = 2 + 2\sqrt{3}$
   D. $x = -2 + 2\sqrt{3}$; $x = -2 - 2\sqrt{3}$
   E. No tiene soluciones reales.

1.2.13 Sistemas de ecuaciones 2×2 con al menos una cuadrática

Como se sabe, una ecuación de primer grado o lineal con dos incógnitas es de la forma:

$$Ax + By + C = 0.$$

Así también, una ecuación de segundo grado o cuadrática con dos incógnitas es de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

En ambos casos las incógnitas son x & y.
Aquí tratamos con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas donde ambas ecuaciones son cuadráticas o bien una es lineal y la otra es cuadrática.
Para resolver estos tipos de sistemas, se busca primero eliminar a una de las incógnitas para luego resolver la ecuación que resulte.
Si el sistema es de una lineal con una cuadrática, primero se despeja una de las incógnitas de la lineal para luego sustituir en la ecuación cuadrática.
Si el sistema es de dos cuadráticas, se puede proceder por sustitución, por igualación o bien por el método de suma o resta. Dependiendo de las ecuaciones, será el procedimiento que se utilice.

Reactivos de Sistemas de ecuaciones 2×2 con al menos una cuadrática

Soluciones: véase la página 273. Desarrollos: véase la página 321

1. Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 25;$$
$$x - y + 1 = 0,$$

son: ________.

A. $x_1 = -4$ & $y_1 = 3$; $x_2 = -3$ & $y_2 = 4$
B. $x_1 = -4$ & $y_1 = -3$; $x_2 = 3$ & $y_2 = 4$
C. $x_1 = 4$ & $y_1 = -3$; $x_2 = 3$ & $y_2 = -4$
D. $x_1 = 4$ & $y_1 = 3$; $x_2 = -3$ & $y_2 = -4$
E. $x_1 = -4$ & $y_1 = -4$; $x_2 = 3$ & $y_2 = 3$

2. Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 - 2x - y + 1 = 0;$$
$$x + y - 7 = 0,$$

son: ________.

A. $x_1 = -2$ & $y_1 = -9$; $x_2 = 3$ & $y_2 = -4$
B. $x_1 = 2$ & $y_1 = 9$; $x_2 = -3$ & $y_2 = 4$
C. $x_1 = 2$ & $y_1 = -9$; $x_2 = -3$ & $y_2 = -4$
D. $x_1 = -2$ & $y_1 = 4$; $x_2 = 3$ & $y_2 = 9$
E. $x_1 = -2$ & $y_1 = 9$; $x_2 = 3$ & $y_2 = 4$

3. Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 2;$$
$$x^2 - y = 0,$$

son: ________.

A. $x_1 = -1$ & $y_1 = -1$; $x_2 = 1$ & $y_2 = -1$
B. $x_1 = \sqrt{2}$ & $y_1 = -2$; $x_2 = -\sqrt{2}$ & $y_2 = -2$
C. $x_1 = -\sqrt{2}$ & $y_1 = -2$; $x_2 = -1$ & $y_2 = -1$
D. $x_1 = -1$ & $y_1 = 1$; $x_2 = 1$ & $y_2 = 1$
E. $x_1 = 1$ & $y_1 = -1$; $x_2 = \sqrt{2}$ & $y_2 = -2$

4. Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

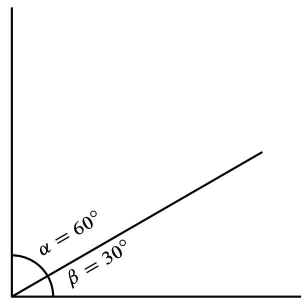
$$x^2 + 3y^2 = 36;$$
$$3x^2 + y^2 = 36,$$

son: ________.

A. $x_1 = 6$ & $y_1 = 0$; $x_2 = 0$ & $y_2 = 6$
B. $x_1 = -3$ & $y_1 = -3$; $x_2 = 3$ & $y_2 = -3$; $x_3 = -3$ & $y_3 = 3$; $x_4 = 3$ & $y_4 = 3$
C. $x_1 = 3$ & $y_1 = 3$; $x_2 = -3$ & $y_2 = 3$; $x_3 = 6$ & $y_3 = 0$
D. $x_1 = 3$ & $y_1 = -3$; $x_2 = 0$ & $y_2 = 6$
E. $x_1 = -3$ & $y_1 = -3$; $x_2 = 3$ & $y_2 = -3$; $x_3 = 6$ & $y_3 = 0$; $x_4 = 0$ & $y_4 = 6$

1.3 Geometría euclideana

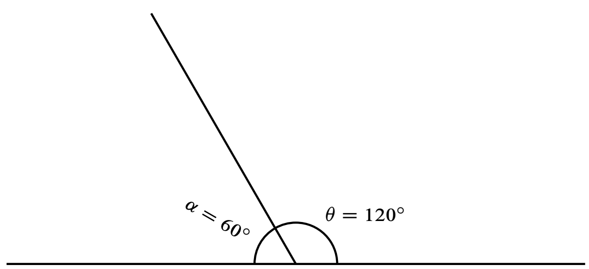
1.3.1 Ángulos complementarios y suplementarios



Dos ángulos son complementarios si su suma es igual a 90°.

Los ángulos α, β de la figura anterior son complementarios.

Dos ángulos son suplementarios si su suma es igual a 180°. En la siguiente figura, los ángulos α, θ son suplementarios.



Reactivos de Ángulos complementarios y suplementarios
Soluciones: véase la página 273. Desarrollos: véase la página 324

1. Los ángulos α, β son complementarios. Si el valor de α es un quinto del valor de β, ¿cuál es el valor del ángulo α?: ________.

   A. 30°
   B. 15°
   C. 75°
   D. $\dfrac{90°}{5}$
   E. 20°

2. α, θ son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Si el valor de α es 40° mayor que θ, ¿cuál es el valor de θ?: ________.

   A. 25°
   B. 30°
   C. 50°

D. 40°

E. 45°

3. Considerar que β, θ son ángulos suplementarios y además $\beta > \theta$. Si la diferencia entre éstos es de 30°¿cuál es el valor de θ?: ________.

A. 150°

B. 60°

C. 75°

D. 90°

E. 105°

4. El valor del ángulo β es 20° mayor que el cuádruple del valor del ángulo α. Si β, α son ángulos suplementarios, ¿cuál es el valor del ángulo α?: ________.

A. 45°

B. 135°

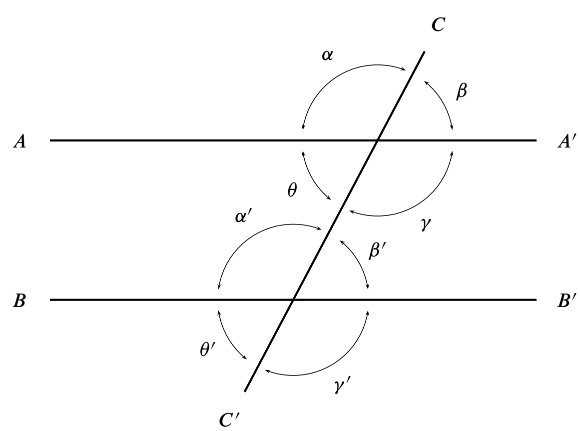
C. 160°

D. 32°

E. 40°

1.3.2 Ángulos formados al cortar dos rectas paralelas con una transversal

El dibujo que se presenta a continuación muestra dos rectas paralelas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, y una recta transversal $\overline{CC'}$.



Los ángulos α , β, γ' y θ' son considerados ángulos externos.

Los ángulos $\alpha\gamma'$, así como $\beta\theta'$ son denominados alternos externos y además son ángulos iguales ($\alpha = \gamma'$ y $\beta = \theta'$).

Los ángulos $\theta, \gamma, \alpha', \beta'$ son considerados ángulos internos.

Los ángulos $\theta\beta'$, así como $\gamma\alpha'$ son denominados alternos internos y además son ángulos iguales ($\theta = \beta'$ y $\gamma = \alpha'$).

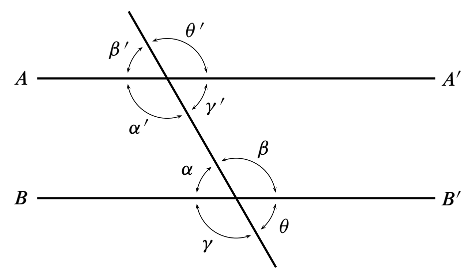
Los ángulos $\alpha\alpha', \theta\theta', \gamma\gamma'$, así como $\beta\beta'$ son denominados correspondientes y además son ángulos iguales ($\alpha = \alpha'; \theta = \theta'; \gamma = \gamma'$ y $\beta = \beta'$).

Los ángulos opuestos por el vértice son ángulos iguales. Los ángulos α, γ son un ejemplo de ángulos opuestos por el vértice ($\alpha = \gamma$).

Reactivos de Ángulos formados al cortar dos rectas paralelas con una transversal

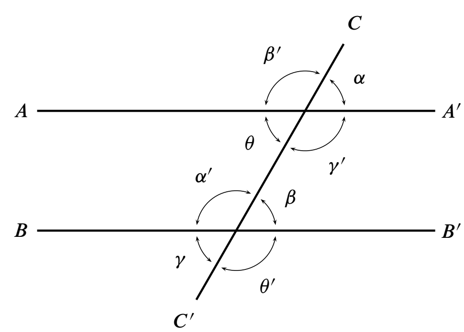
Soluciones: véase la página 273. Desarrollos: véase la página 326

1. Las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. El ángulo θ es igual al ángulo: ______.



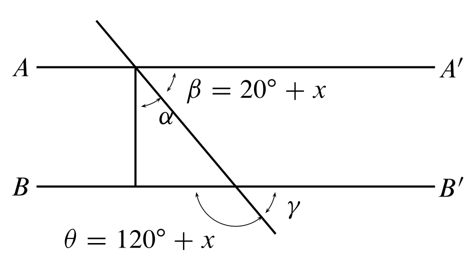
   A. γ
   B. θ'
   C. β
   D. β'
   E. α'

2. Las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. Los ángulos α y β son ángulos: ______.



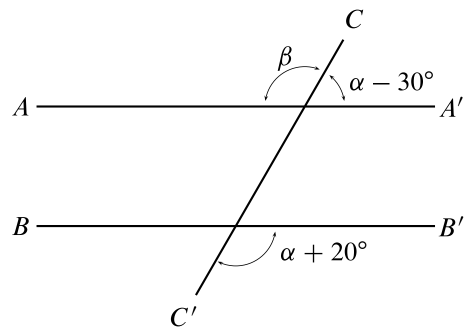
   A. Iguales e internos
   B. Opuestos por el vértice
   C. Correspondientes y externos
   D. Iguales y correspondientes
   E. Diferentes

3. En la figura, las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. La medida del ángulo α es: ______.



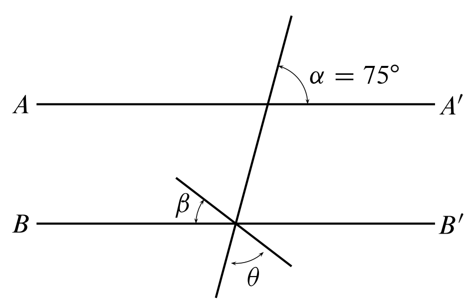
A. x
B. $20°$
C. $90° - x$
D. $50°$
E. $70°$

4. Las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. El valor de β es: ________.



A. $\alpha + 50°$
B. $180° - \alpha$
C. $115°$
D. $95°$
E. $95° + \alpha$

5. Considerar que las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. Si el ángulo β es la mitad del ángulo α, el valor del ángulo θ es: ________.



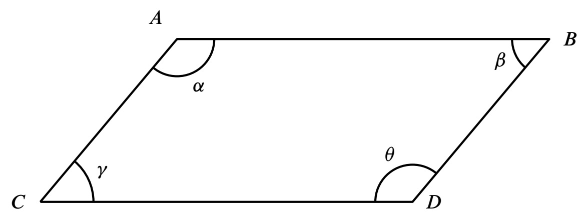
A. $37.5°$
B. $\dfrac{130°}{2}$
C. $\theta + \alpha'$
D. $67.5°$
E. $180° - \dfrac{\alpha}{2}$

1.3.3 Propiedades de paralelogramos y triángulos

Un polígono es una figura plana limitada por segmentos de recta, denominados lados del polígono.

Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados.

Un paralelogramo es un tipo de cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí. La siguiente figura representa un paralelogramo.



$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son segmentos paralelos entre sí.
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son segmentos paralelos entre sí.

En todo paralelogramo:

- Sus lados opuestos son de igual medida:

$$AB = CD \;\&\; AC = BD.$$

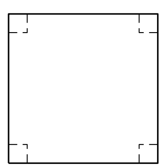
- Sus ángulos opuestos son de igual medida:

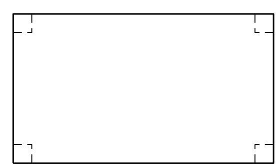
$$\alpha = \theta \;\&\; \gamma = \beta.$$

- Dos ángulos consecutivos son suplementarios.

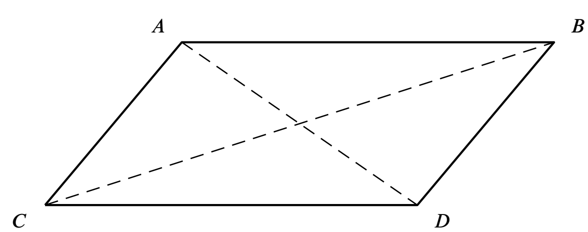
$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180°; & \beta + \theta &= 180°; \\ \gamma + \theta &= 180°; & \gamma + \alpha &= 180°. \end{aligned}$$

- Si un ángulo del paralelogramo es recto (90°), entonces todos los demás también son ángulos rectos.





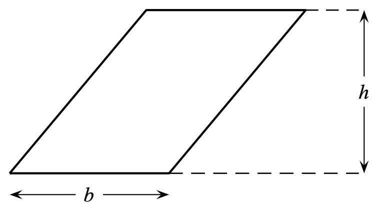
- Una diagonal de un cuadrilátero es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.
- Un paralelogramo tiene sólo dos diagonales.

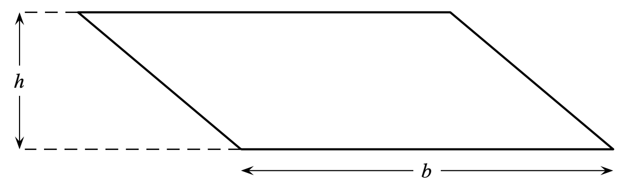


Las líneas punteadas $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ son diagonales.
Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.
Cada diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos congruentes.

El área A de un paralelogramo está definida como el producto de la base b por la altura h.

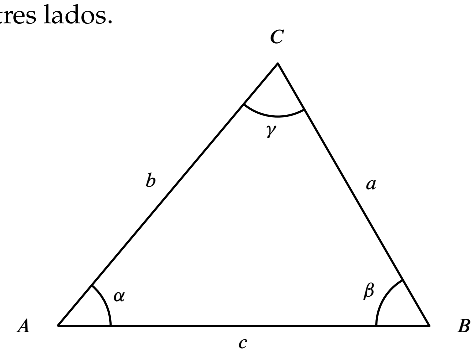
$$A = b \cdot h.$$





Propiedades de triángulos

Un triángulo es un polígono de tres lados.



Todo triángulo determina tres ángulos que se denomina ángulos internos del triángulo. En la figura anterior, α, β & γ son ángulos internos del triángulo.

El triángulo arbitrario no tiene ángulos de medida cero, ni ángulos llanos (con medida de 180°).

Cada ángulo de un triángulo está comprendido entre dos de sus lados y cada lado está comprendido entre dos de los vértices de dicho triángulo.

Un triángulo puede ser:

- Rectángulo, cuando tiene un ángulo recto (igual a 90°).
- Obtusángulo, cuando tiene un ángulo obtuso (mayor de 90°).
- Acutángulo, cuando sus tres ángulos son agudos (menores a 90°).
- Oblicuángulo, cuando no es rectángulo.
- Equiángulo, cuando todos sus ángulos tienen la misma medida.
- Escaleno, cuando sus tres lados tienen diferentes longitudes.
- Isósceles, cuando dos de sus lados tienen igual longitud.
- Equilátero, cuando sus tres lados tienen igual longitud.

Algunas propiedades importantes de los triángulos son:

- La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es siempre 180°. En la figura, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
- Todo triángulo equilátero es equiángulo y viceversa, todo triángulo equiángulo es equilátero.
- En todo triángulo isósceles, los ángulos asociados a la base son congruentes (tienen igual medida). Se denomina base del triángulo isósceles al lado de longitud diferente a los dos iguales.
- Si dos ángulos de un triángulo tienen igual medida, entonces los lados opuestos a ellos tienen igual medida.

- Todo triángulo escaleno tiene sus ángulos de medidas diferentes.

Otros elementos importantes en cualquier triángulo son los segmentos de recta siguientes:

- La bisectriz de un ángulo de un triángulo es un segmento de recta que biseca (divide en dos partes iguales) al ángulo y sus extremos son el vértice de dicho ángulo y un punto del lado opuesto. Todo triángulo tienen tres bisectrices, una para cada ángulo.
- Una mediana de un triángulo es un segmento de recta trazado desde uno de los vértices hasta el punto medio del lado opuesto. Todo triángulo tienen tres medianas, una para cada vértice.
- Una altura de un triángulo es un segmento de recta trazado desde unos vértices, perpendicularmente a la recta que contiene al lado opuesto. Todo triángulo tienen tres alturas, una para cada vértice.

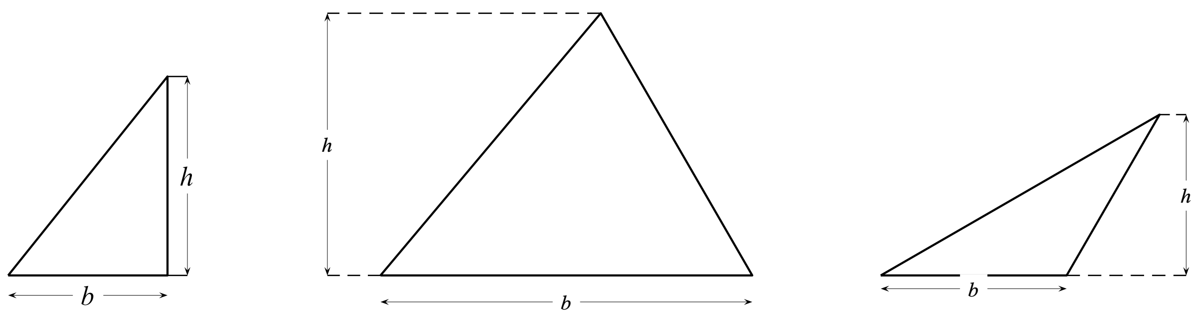
Una propiedad muy importante de los triángulos equiláteros, que relaciona a estos tres segmentos de recta, es la siguiente:

- En todo triángulo equilátero, bisectriz, mediana y altura son el mismo segmento de recta para cada vértice; es decir, bisectriz, mediana y altura coinciden.

La relación para calcular el área A de un triángulo es:

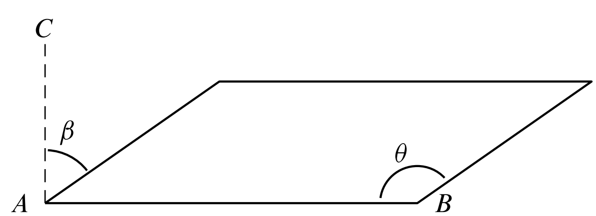
$$A = \frac{b \cdot h}{2};$$

donde b representa la base del triángulo y h su altura.



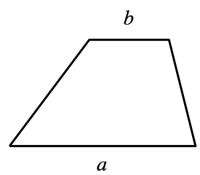
Reactivos de Propiedades de paralelogramos y triángulos
Soluciones: véase la página 273. Desarrollos: véase la página 327

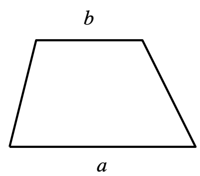
1. La línea $\overline{AB}$ que representa la base del paralelogramo mostrado en la figura es perpendicular al segmento recto $\overline{AC}$. Si el ángulo θ es igual a 145°, el valor del ángulo β es: ______.

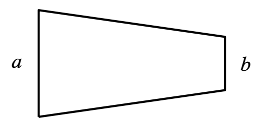


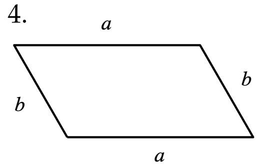
A. 55°
B. 35°
C. $90° - \theta$
D. $180° - \beta$
E. $\theta + 90°$

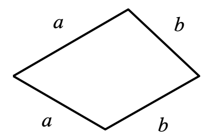
2. Considerar los polígonos que se muestran a continuación.

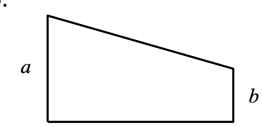
1.


2.


3.


4.


5.


6.


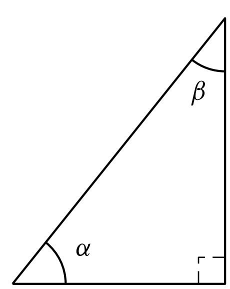
¿En cuál de las siguientes opciones se tiene un paralelogramo? Elige la opción: ________.

A. 1, 2, 5
B. 1, 2, 3
C. 2, 6, 3
D. 2, 3, 4
E. 5, 6, 1

3. Un paralelogramo tiene una base cuya longitud es de 26 m y una superficie de 806 m^2. ¿Cuál es la altura de este polígono? Indica qué opción es correcta: ________.

A. 31 m
B. 62 m
C. 93 m
D. 15.5 m
E. 72 m

4. La diferencia de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de $34°22'$ ¿Cuánto mide el ángulo menor? Elige la opción: ________.



A. $55°38'$

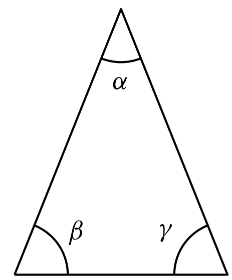
B. $62°11'$

C. $17°11'$

D. $72°49'$

E. $27°49'$

5. Si la suma de los ángulos de la base de un triángulo isósceles es igual al cuádruplo del ángulo restante, entonces la medida de uno de los ángulos de la base es: ______ .



A. $36°$

B. $60°$

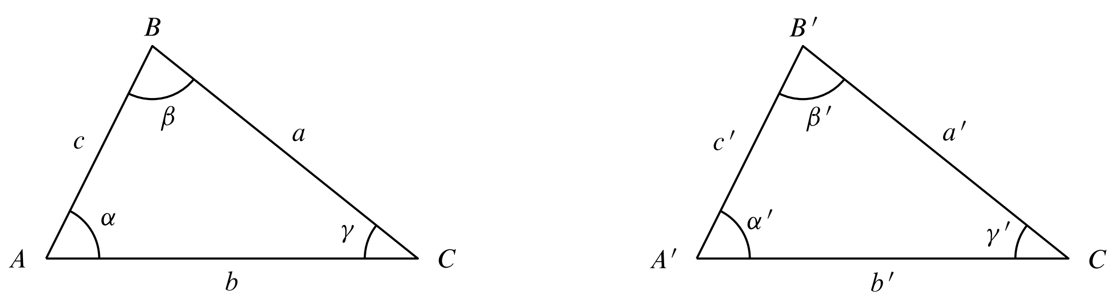
C. $18°$

D. $72°$

E. $80°$

1.3.4 Triángulos congruentes y semejantes

Se dice que dos triángulos son congruentes cuando se pueden hacer coincidir en todas sus partes, es decir, ángulos respectivos iguales, y lados respectivos iguales.



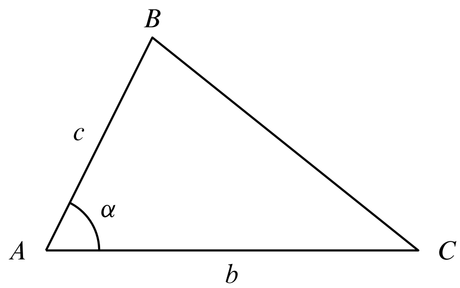
Esto es:

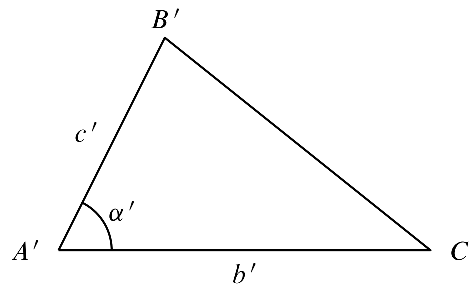
$$\alpha = \alpha'; \quad \beta = \beta' \quad \& \quad \gamma = \gamma'.$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}; \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}; \quad \& \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

Criterios sobre la congruencia de dos triángulos

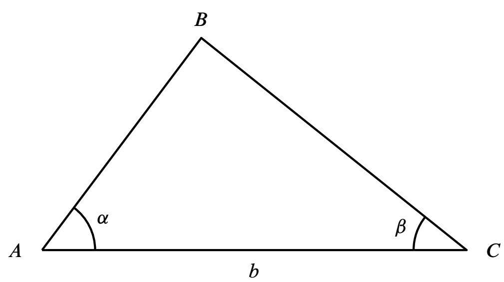
Primero. Dos triángulos son congruentes si dos de los lados de un triángulo tienen la misma longitud que dos de los lados del otro triángulo, y si los ángulos comprendidos entre esos lados tienen la misma medida en ambos triángulos.

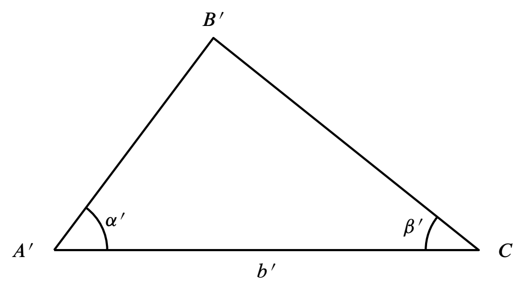




Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son triángulos congruentes, pues tenemos que $c = c'$, $b = b'$ & $\alpha = \alpha'$.

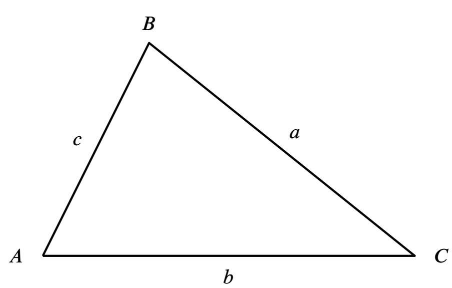
Segundo. Dos triángulos son congruentes si dos de los ángulos interiores de un triángulo tienen la misma medida que dos de los ángulos interiores del otro triángulo, y si los lados comprendidos entre estos ángulos tienen la misma longitud.

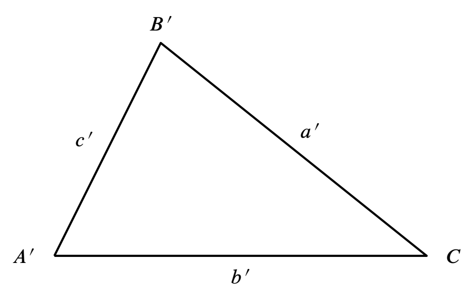




Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes, dado que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ & $b = b'$.

Tercero. Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo.



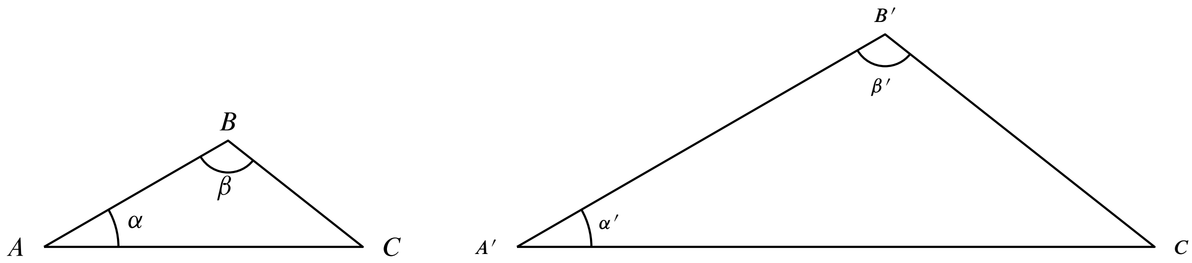


Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes, pues observamos que $a = a'$, $b = b'$ & $c = c'$.

Se dice que dos triángulos son semejantes cuando sus ángulos respectivos son iguales y sus lados respectivos son proporcionales.

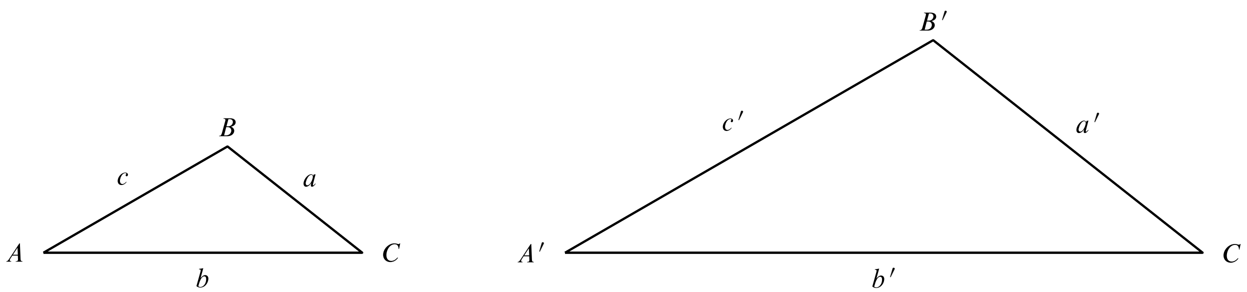
Criterios sobre la semejanza de dos triángulos

Primero. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos internos iguales.



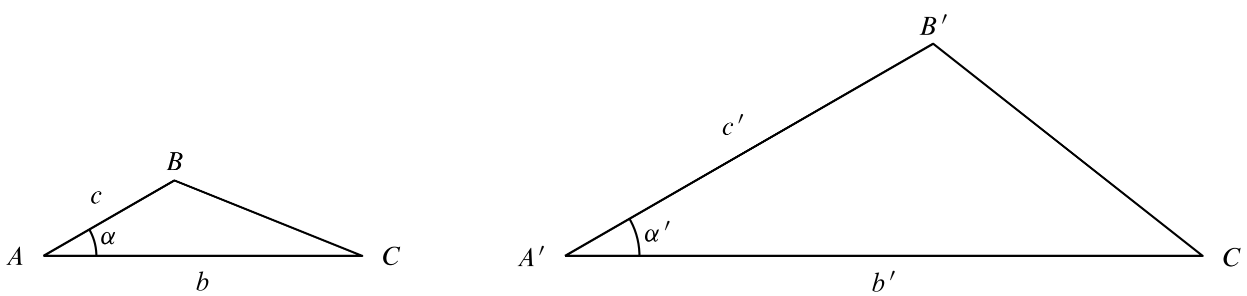
Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, pues tenemos que $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$.

Segundo. Dos triángulos son semejantes si tienen los lados proporcionales.



Los triángulos ABC y DEF son semejantes: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

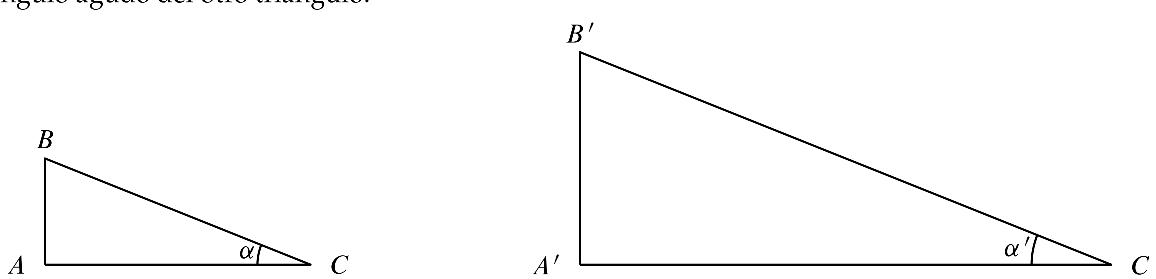
Tercero. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y los ángulos comprendidos entre éstos son iguales.



Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes: $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'}; \alpha = \alpha'$.

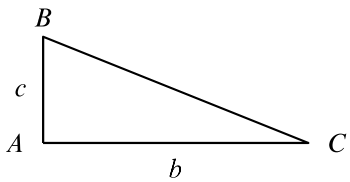
Criterios sobre la semejanza de dos triángulos rectángulos

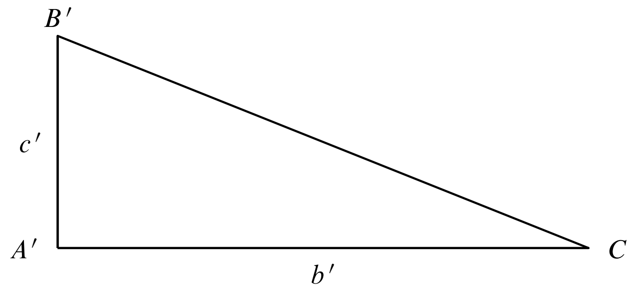
Primero. Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de un triángulo es igual a un ángulo agudo del otro triángulo.



Los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes: $\alpha = \alpha'$.

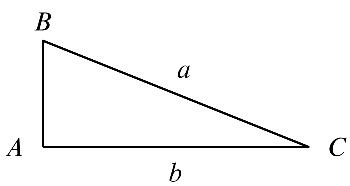
Segundo. Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus catetos son proporcionales.

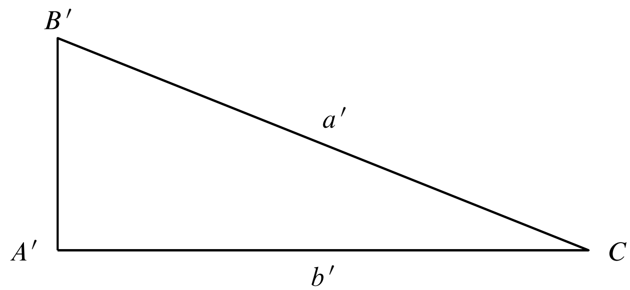




Los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, dado que $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'}$.

Tercero. Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus hipotenusas y uno de sus catetos son proporcionales.





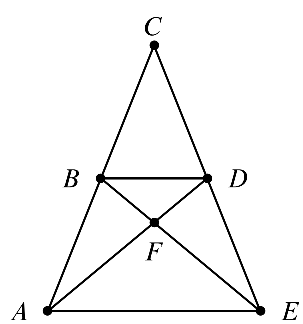
Los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes: $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{a}{a'}$.

Reactivos de Triángulos congruentes y semejantes

Soluciones: véase la página 273. Desarrollos: véase la página 330

1. La siguiente figura muestra un conjunto de triángulos inscritos en el triángulo isósceles ACE. Los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ son paralelos entre sí.

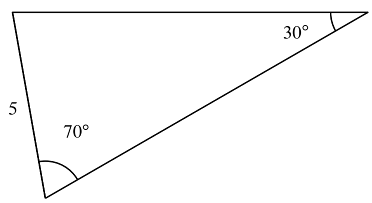
   ¿En cuál de las siguientes opciones los triángulos son congruentes?: ________.



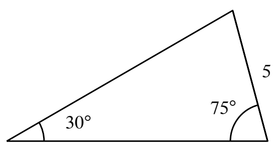
   A. ACE & BCD
   B. AFE & BDF
   C. ABD & BDE
   D. BCE & ABF
   E. BCD & BDF

2. De los siguientes triángulos, ¿cuáles son congruentes? Elige la opción correcta: ________.

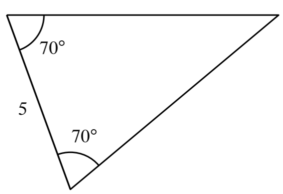
1.



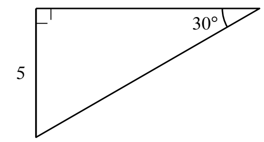
2.



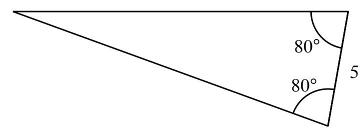
3.



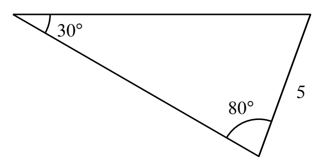
4.



5.

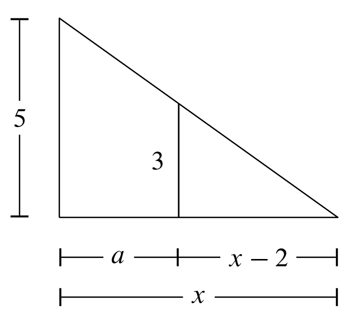


6.



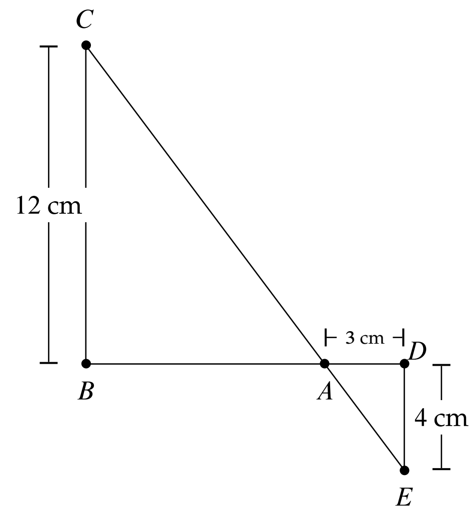
A. 1 y 3
B. 2 y 4
C. 1 y 6
D. 5 y 6
E. 4 y 6

3. En la siguiente figura, ¿cuáles son los valores de x y de a? Elige la opción correcta: ________.



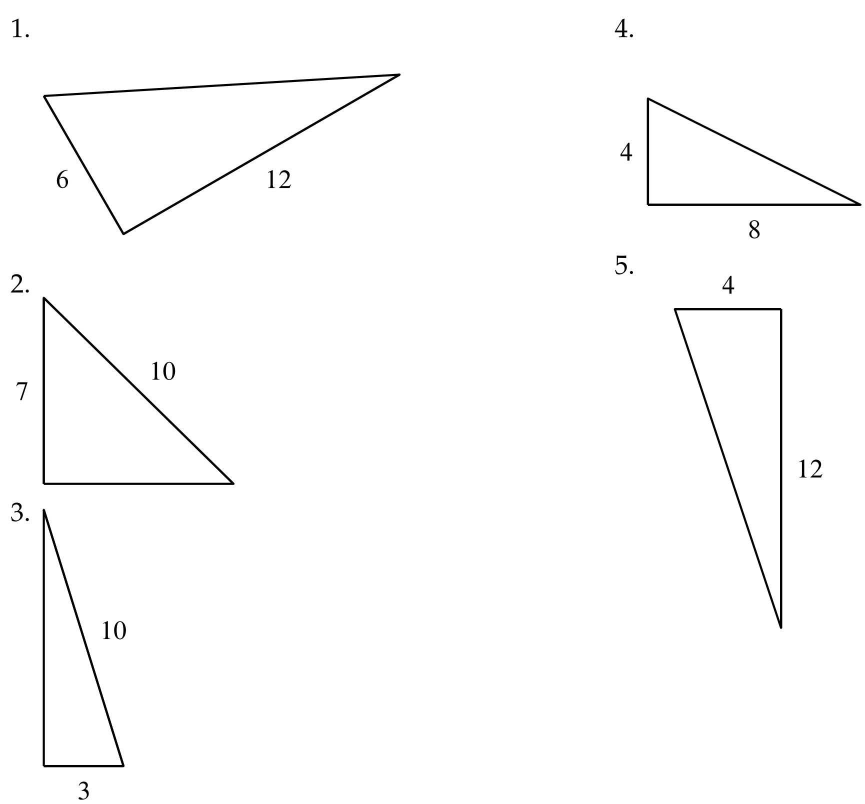
A. $x = 3, a = 5$
B. $x = 5, a = 3$
C. $x = 5, a = 2$
D. $x = 4, a = 2$
E. $x = 2, a = 5$

4. En la siguiente figura, ¿cuál es la medida de la hipotenusa del triángulo ABC?: ______.



A. 15 cm
B. 20 cm
C. 12 cm
D. 9 cm
E. 16 cm

5. Considerar los triángulos rectángulos mostrados a continuación. ¿En cuál de las opciones de respuesta hay triángulos semejantes?: ______.



A. 2 y 3

B. 1 y 4

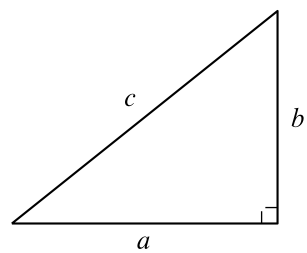
C. 4 y 5

D. 2 y 4

E. 1 y 3

1.3.5 Teorema de Pitágoras

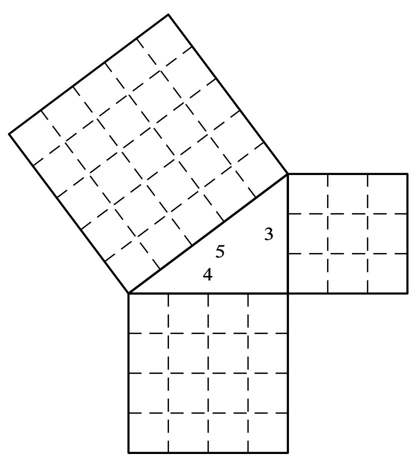
Para un triángulo rectángulo con catetos a, b e hipotenusa c, tal como se aprecia en la siguiente figura,



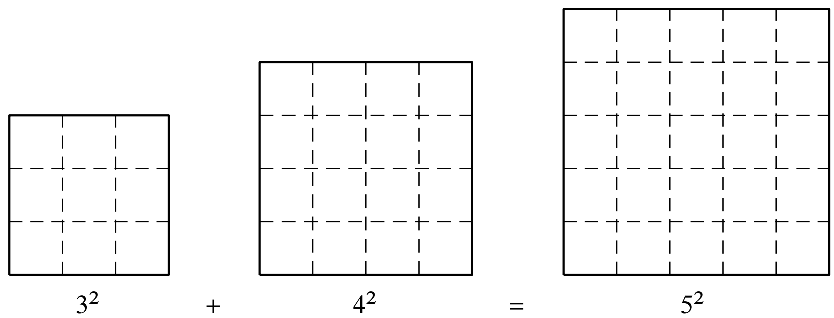
el teorema de Pitágoras afirma que:

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

es decir: la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.
Se muestran en la siguiente figura los cuadrados de los catetos y de la hipotenusa de un triángulo rectángulo particular.



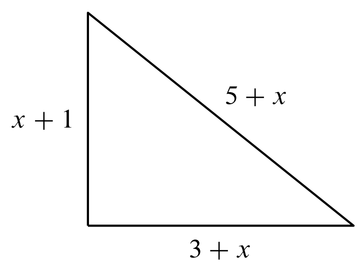
Observa que el teorema de Pitágoras afirma que las áreas de los cuadrados correspondientes cumplen lo siguiente:



Reactivos de Teorema de Pitágoras

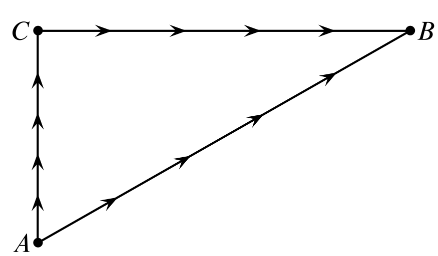
Soluciones: véase la página 273. Desarrollos: véase la página 333

1. Considerando el siguiente triángulo rectángulo, aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de x. Elige la opción correcta: ________.



   A. -3
   B. 5
   C. 3
   D. -5
   E. 4

2. Una persona recorre 13 m al desplazarse desde el punto A al punto B en línea recta. Otra persona recorre 17 m al desplazarse desde el punto A hasta el punto B, pasando por el punto C. Elige la opción correcta: ________.



   ¿Cuál es la distancia desde C hasta B?

   A. 6 m
   B. 10 m

C. 11 m

D. 7 m

E. 12 m

3. Un terreno rectangular tiene un perímetro que mide 14 m. Si el largo del terreno mide un metro más que su ancho, ¿cuánto mide la diagonal del terreno?: ______ .

   A. 5 m

   B. 4 m

   C. 3 m

   D. 25 m

   E. $\frac{14}{3}$ m

4. Un triángulo rectángulo tiene un área de 24 m^2. Si un cateto mide $\frac{4}{3}$ del otro, ¿cuánto mide la hipotenusa del triángulo? : ______ .

   A. 12 m

   B. 10 m

   C. $\frac{24}{5}$ m

   D. $\frac{24}{3}$ m

   E. 6 m

1.3.6 Perímetro y área de polígonos y del círculo

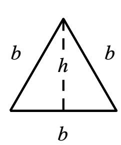
Un polígono es una porción de plano limitada por líneas rectas.

Un polígono puede ser regular o irregular.

Los polígonos regulares tienen sus lados y ángulos interiores iguales. Estos polígonos están inscritos en una circunferencia.

Los polígonos irregulares no tienen todos sus lados iguales. Pueden estar, o no, inscritos en una circunferencia.

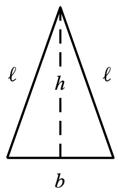
Se presenta un conjunto de polígonos (los más comunes) así como la fórmula para calcular tanto el perímetro como el área de cada uno de éstos.

Triángulos (polígonos de tres lados)		
Triángulo equilátero Tres lados iguales Polígono regular	Perímetro	Área
	$P = 3b$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$

Triángulo isósceles

Dos lados iguales

Polígono irregular

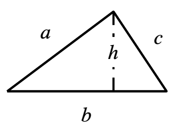


$P = 2\ell + b$ $\qquad$ $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Triángulo escaleno

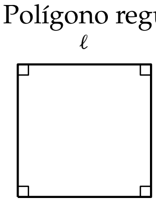
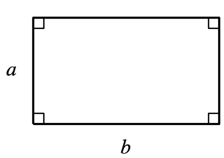
Tres lados desiguales

Polígono irregular



$P = a + b + c$ $\qquad$ $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

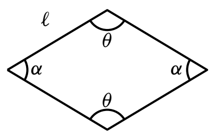
Cuadriláteros
(polígono de cuatro lados)

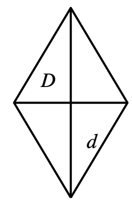
	Perímetro	Área
Cuadrado Cuatro lados iguales; Cuatro ángulos rectos Polígono regular 	$P = 4\ell$	$A = \ell \cdot \ell = \ell^2$
Rectángulo Lados iguales dos a dos Cuatro ángulos rectos Polígono irregular 	$P = 2a + 2b$	$A = a \cdot b$

Rombo

Cuatro lados iguales
Ángulos iguales dos a dos
Polígono irregular
Dos diagonales: D, d

$P = 4\ell$ $\qquad A = \dfrac{D \cdot d}{2}$

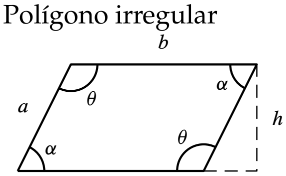




Romboide

Lados iguales y paralelos dos a dos
Ángulos iguales dos a dos
Polígono irregular

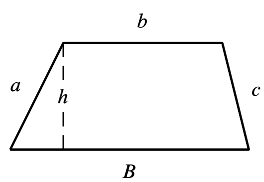
$P = 2(a + b)$ $\qquad A = b \cdot h$



Trapecio

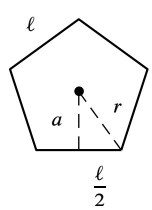
Dos lados paralelos
Polígono irregular

$P = a + b + c + B$ $\qquad A = \dfrac{(B + b)h}{2}$



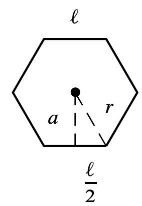
$b =$ base menor
$B =$ base mayor

Pentágono regular
(5 lados iguales y ángulos iguales)

	Perímetro	Área
	$P = 5 \cdot \ell$	$A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

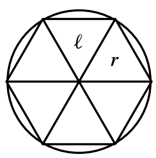
$a =$ apotema
Apotema: es la distancia del centro del polígono al punto medio de cualquiera de sus lados.

Hexágono regular
(6 lados iguales y ángulos iguales)

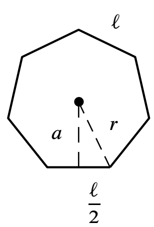
	Perímetro	Área
	$P = 6 \cdot \ell$	$A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

$a =$ apotema

Los triángulos formados al unir el centro del polígono con todos sus vértices son equiláteros. El radio de la circunferencia es igual al lado de un hexágono regular inscrito en ésta: $r = \ell$.

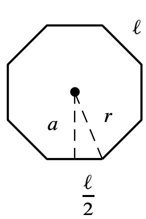


Heptágono regular
(7 lados iguales y ángulos internos iguales)

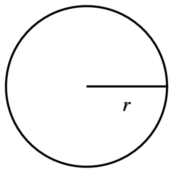
	Perímetro	Área
	$P = 7 \cdot \ell$	$A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

$a =$ apotema

Octágono regular
(8 lados iguales, ángulos iguales)

	Perímetro	Área
	$P = 8 \cdot \ell$	$A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

$a =$ apotema

Círculo de radio r		
	Perímetro	Área
	$P = 2\pi r$	$A = \pi r^2$

Reactivos de Perímetro y área de polígonos y del círculo
Soluciones: véase la página 273. Desarrollos: véase la página 337

1. Si el perímetro de un triángulo equilátero mide 18 m, ¿cuál es la longitud de su altura?: ________.

   A. $9 \cdot \sqrt{3}$ m
   B. $\sqrt{6}$ m
   C. $3 \cdot \sqrt{3}$ m
   D. $3 \cdot \sqrt{5}$ m
   E. 6 m

2. Si la altura de un triángulo equilátero mide $4\sqrt{3}$ cm, ¿cuánto mide cada uno de los lados del triángulo?: ________.

   A. $4\sqrt{2}$ cm
   B. $2\sqrt{3}$ cm
   C. $4\sqrt{3}$ cm
   D. 7 cm
   E. 8 cm

3. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 6 m. Si dicho lado es la base del triángulo y su altura mide 4 m, ¿cuánto mide el perímetro del triángulo?: ________.

   A. 15 m
   B. 7 m
   C. $2\sqrt{13}$ m
   D. 16 m
   E. $2\sqrt{10}$ m

4. La base de un triángulo isósceles mide 6 m y el perímetro 16 m. Si la base es el lado desigual del triángulo, ¿cuánto mide su altura?: ________.

   A. 5 m
   B. 8 m
   C. 4 m
   D. 6 m
   E. $\sqrt{2}$ m

5. La base de un triángulo isósceles mide 10 m y cada uno de los lados iguales mide 2 unidades más del doble de la base. ¿Cuánto mide la altura del polígono?: ________.

   A. $3 \cdot \sqrt{51}$ m
   B. $\sqrt{3}$ m
   C. $\sqrt{384}$ m
   D. $8\sqrt{6}$ m
   E. $8\sqrt{3}$ m

6. El área de un triángulo escaleno es de 100 cm^2.

   ¿Cuánto mide la altura del polígono si ésta es la tercera parte de la base?: ________.

   A. $h = \sqrt{\dfrac{20}{3}}$ cm
   B. $h = 10\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ cm
   C. $h = 10\sqrt{3}$ cm
   D. $h = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$ cm
   E. $h = 10\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ cm

7. Si el área de un cuadrado es de 49 m^2, ¿cuánto mide su perímetro?: ________.

   A. 7 m
   B. 24.5 m
   C. 28 m
   D. 98 m
   E. 12.25 m

8. El largo de un rectángulo es el triple de su ancho. Si el área es de 48 m^2, ¿cuál es la medida de su perímetro?: ________.

   A. 24 m
   B. 32 m
   C. 30 m
   D. 40 m
   E. 36 m

9. El perímetro de un rectángulo mide 50 m y el área 100 m^2. ¿Cuáles son las medidas de sus dimensiones (largo y ancho)?: ________.

   A. largo = 25 m; ancho = 4 m
   B. largo = 50 m; ancho = 2 m
   C. largo = 15 m; ancho = 10 m
   D. largo = 13 m; ancho = 12 m
   E. largo = 20 m; ancho = 5 m

10. El perímetro de un rectángulo mide 66 m. ¿Cuánto mide el ancho del cuadrilátero si el largo es 3 m mayor del cuádruple de su ancho?: ________.

A. 6 m
B. 33 m
C. 16.5 m
D. 9 m
E. 3 m

11. ¿Un romboide es un cuadrilátero con (elige la opción correcta)?: ________.

A. Lados iguales y paralelos, dos a dos
B. Lados iguales
C. Ángulos iguales
D. Lados paralelos
E. Diagonales perpendiculares

12. Un lado de un romboide mide 7 cm. Si el perímetro del cuadrilátero mide 22 cm, ¿cuánto vale otro de sus lados?: ________.

A. 4 cm
B. 5 cm
C. 6 cm
D. 8 cm
E. 3 cm

13. El lado de un rombo y la diagonal menor miden 5 cm y 6 cm, respectivamente. ¿Cuál es el valor del área?: ________.

A. 24 cm^2
B. 30 cm^2
C. 48 cm^2
D. 20 cm^2
E. 35 cm^2

14. La diagonal mayor de un rombo mide 25 cm. Si el área del cuadrilátero es de 50 cm^2, ¿cuál es el valor de la diagonal menor?: ________.

A. 2 cm
B. 5 cm
C. 10 cm
D. 4 cm
E. 15 cm

15. El perímetro de un pentágono regular mide 30 cm. Si el área del polígono es de 60 cm^2, ¿cuál es el valor de su apotema?: ________.

A. 6 cm
B. 5.3 cm
C. 3 cm
D. 4 cm
E. 5 cm

16. Si el perímetro de un rombo mide 24 m, ¿cuánto mide uno de sus lados?: ________.

A. 12 m
B. 4 m
C. 6 m
D. 5 m
E. 8 m

17. Un pentágono regular se encuentra inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 5 cm. Si el perímetro del polígono es de 30 cm, ¿cuál es el valor de su área?: ________.

A. 60 cm^2
B. 15 cm^2
C. 36 cm^2
D. 30 cm^2
E. 40 cm^2

18. El perímetro de un hexágono regular mide 36 cm, ¿cuál es el valor de su área?: ________.

A. $54\sqrt{3}$ cm^2
B. $54\sqrt{6}$ cm^2
C. $18\sqrt{3}$ cm^2
D. 54 cm^2
E. $36\sqrt{3}$ cm^2

19. Seis triángulos equiláteros, con un perímetro de 18 cm cada uno, forman un hexágono regular. ¿Cuál es el valor del perímetro de dicho hexágono?: ________.

A. 24 cm
B. 6 cm
C. 36 cm
D. 30 cm
E. 42 cm

20. Si el perímetro de un círculo mide 14π cm, ¿cuál es el valor del área de dicho círculo?: ________.

A. 49 cm^2
B. 49π cm^2
C. 28π cm^2
D. 35 cm^2
E. 42π cm^2

21. El perímetro de una circunferencia en donde se encuentra inscrito un hexágono regular es de 16π cm. ¿Cuál es el perímetro del polígono?: ________.

A. 16 cm
B. 64 cm
C. 48 cm
D. 42π cm
E. 24π cm

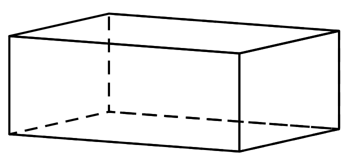
22. Si un heptágono regular tiene un perímetro que mide 63 cm, ¿cuál es el valor de cada uno de los lados de dicho polígono?: ________.

A. 9 cm
B. 27 cm
C. 18 cm
D. $\frac{63}{5}$ cm
E. 21 cm

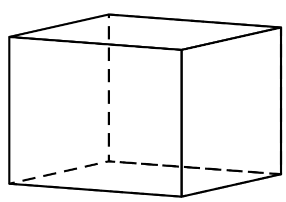
1.3.7 Área y volumen de paralelepípedos, cilindros, conos y esferas

Paralelepípedos

Un paralelepípedo es un poliedro[6] de seis caras. Cada una de sus caras es un paralelogramo y éstas son paralelas e iguales dos a dos.
Entre los paralelepípedos más comunes se encuentran el ortoedro y el hexaedro regular (cubo).
Un ortoedro es un paralelepípedo cuyas caras son rectangulares.



Un hexaedro regular o cubo es un paralelepípedo cuyas caras son cuadradas.

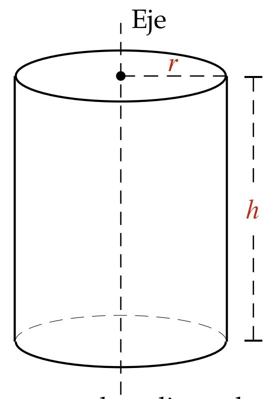


Un ortoedro y un hexaedro regular son paralelepípedos ortogonales ya que, en cada uno, las caras forman entre sí ángulos rectos.

Cilindros

Si se considera una línea recta, llamada eje, todos los puntos situados a una misma distancia de dicha línea conforman una superficie que en geometría se llama superficie cilíndrica.
Un cilindro es un cuerpo geométrico delimitado por una superficie cilíndrica y por dos planos paralelos. Cuando dichos planos paralelos son perpendiculares al eje del cilindro, se dice que se tiene un cilindro recto y en este caso las superficies planas son círculos de un mismo radio.
En otras palabras, un cilindro recto es el cuerpo geométrico que se genera cuando un rectángulo o un cuadrado gira alrededor de uno de sus lados.

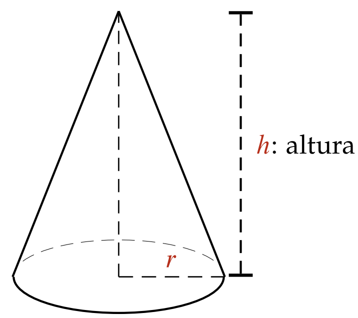
6. Un poliedro es un cuerpo geométrico de caras planas y la forma de cada cara es un polígono.



Cilindro recto de radio r, altura h.

Conos

Un cono (cono recto) es el cuerpo geométrico que se genera cuando un triángulo rectángulo rota sobre uno de sus catetos. La superficie circular generada por la rotación del otro cateto es denominada base del cono.



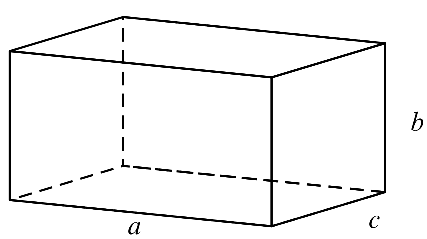
Cono recto de radio r, altura h.

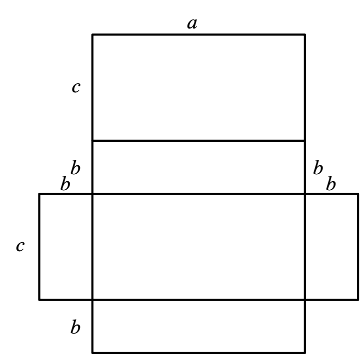
Esferas

Una esfera es el cuerpo geométrico que se forma al rotar un semicírculo sobre su diamétro. Superficie esférica es la denominación de la superficie de este cuerpo geométrico.

Áreas y volúmenes

Paralelepípedo ortoedro





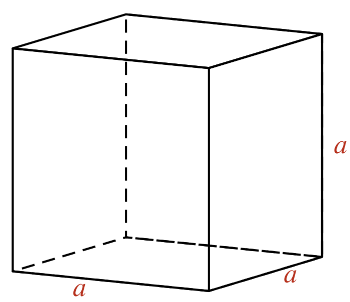
V: volumen de un ortoedro

$$
\begin{aligned}
\text{Volumen} &= (\text{ área de la base})(\text{altura}) = \\
&= (ac)(b) = \\
&= a \cdot c \cdot b.
\end{aligned}
$$

A: área de un ortoedro

$$
\begin{aligned}
A &= \text{ área de todas las caras.} = \\
&= 2ac + 2ab + 2bc.
\end{aligned}
$$

Paralelepípedo hexaedro regular

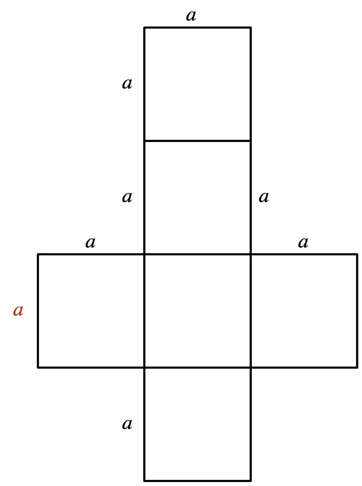


V: volumen de un cubo

V = (área de la base)(altura) =

$= (a^2)(a) =$

$= a^3.$

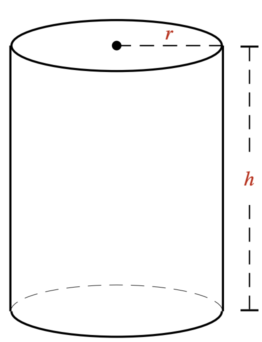


A: área de un cubo

A: área de todas las caras

$A = 6a^2.$

Cilindro

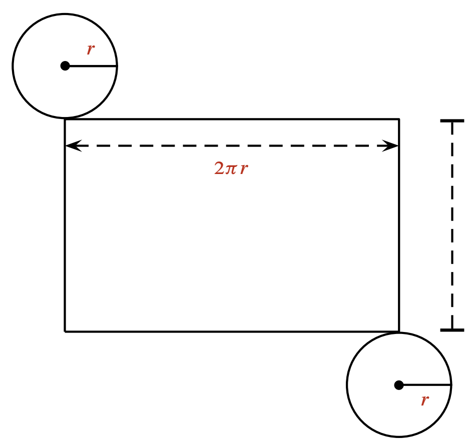


V: volumen de un cilindro

V = (área de la base)(altura) =

$= (\pi r^2)(h) =$

$= \pi r^2 h.$



A: área de un cilindro

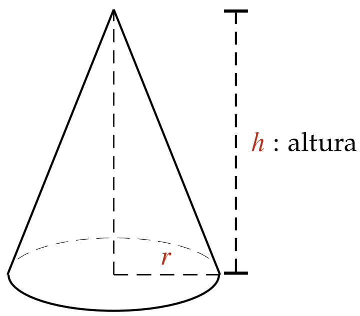
A = área de todas las caras

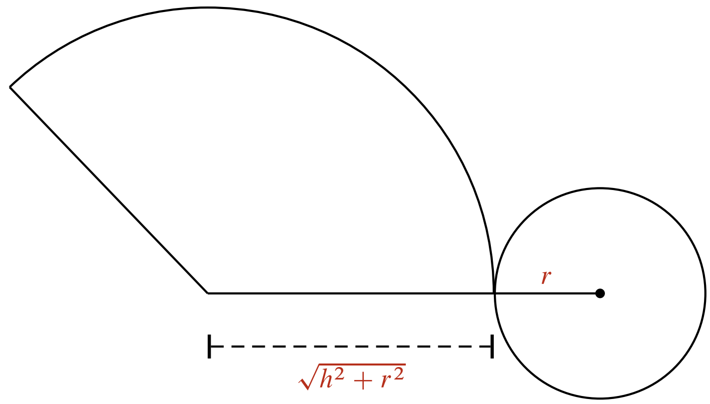
$A = \pi r^2 + \pi r^2 + (2\pi r)(h) =$

$= 2\pi r^2 + 2\pi r h =$

$= 2\pi r(r + h).$

Cono recto





V: volumen del cono recto

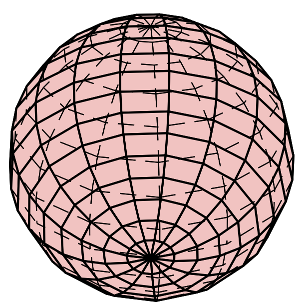
$$V = \frac{(\text{área de la base})(\text{altura})}{3} = $$
$$= \frac{(\pi r^2)(h)}{3} =$$
$$= \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

A: área del cono recto

A: área de todas las caras

$$A = (\pi r^2) + \frac{1}{2}(2\pi r)(\sqrt{h^2 + r^2})$$
$$A = (\pi r^2) + (\pi r \sqrt{h^2 + r^2}).$$

Esfera



V: volumen

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

A: área de la superficie

$$A = 4\pi r^2.$$

Reactivos de Área y volumen de paralelepípedos, cilindros, conos y esferas

Soluciones: véase la página 274. Desarrollos: véase la página 350

1. Una caja con tapa tiene una base rectangular cuyo largo es el triple de su ancho y la altura de la caja mide la mitad de lo que mide el largo de la base. Si el volumen de la caja es de 36 cm^3, ¿cuál es el valor del área de todas las caras de la caja?: ________.

   A. 18 cm^2
   B. 54 cm^2
   C. 63 cm^2
   D. 45 cm^2
   E. 72 cm^2

2. La superficie de la pared de un recipiente cilíndrico con base circular es de $10\,\text{m}^2$. ¿Cuál es la expresión del volumen del recipiente en términos de su radio r?: ______.

   A. $V = r(5 - \pi r^2)$
   B. $V = 5r + \pi r^3$
   C. $V = r^2(5 - \pi r)$
   D. $V = \dfrac{r(5 - \pi r^2)}{\pi}$
   E. $V = 5r - \pi r^2$

3. La altura de un cono tiene un valor de 4 m. Si el volumen del cono es de 12π m^3, ¿cuál es el valor de la superficie total del cono?: ______.

   A. 48π m^2
   B. 15π m^2
   C. 24π m^2
   D. 48π m^2
   E. 72π m^2

4. Si el volumen de una esfera es de 12 m^3, ¿cuál es el valor del área de su superficie?: ______.

   A. $4\sqrt{81\pi}$ m^2
   B. $36\sqrt{\pi}$ m^2
   C. $4\sqrt[3]{81\pi}$ m^2
   D. $\sqrt{48\pi}$ m^2
   E. $2\sqrt[3]{9\pi}$ m^2

5. ¿Cuál es la capacidad de un cono cuya base tiene un perímetro de 5π m y su altura mide 6 m?: ______.

   A. $V = \dfrac{25}{2}\pi$ m^3
   B. $V = 30\pi$ m^3
   C. $V = \dfrac{35}{2}\pi$ m^3
   D. $V = 5\pi$ m^3
   E. $V = 20\pi$ m^3

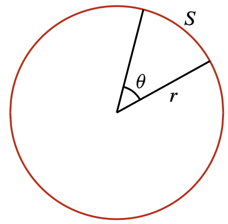
1.4 Trigonometría plana

1.4.1 Medida de ángulos en grados y radianes

Disponemos de dos formas de expresar la medida de un ángulo: grados y radianes.

¿Qué es un grado? ¿Qué es un radián?

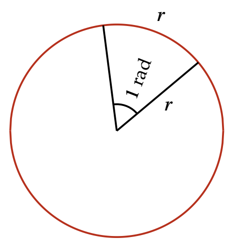
Un ángulo central en un círculo (o en una circunferencia) es un ángulo cuyo vértice es el centro del círculo (o de la circunferencia). Todo ángulo central en un círculo tiene asociado un arco de la circunferencia de dicho círculo y, vicerversa, a todo arco le corresponde un ángulo central.



En esta circunferencia, S es el arco correspondiente al ángulo central θ; r es el radio de dicha circunferencia.

Un ángulo central que corresponde a un arco de longitud igual a $\dfrac{1}{360}$ de la circunferencia se define como un ángulo de medida 1 grado (1°). Por lo tanto, una circunferencia corresponde a un ángulo de medida 360°. Se considera también que 1° tiene 60 minutos ($1^\circ = 60'$) y $1'$ tiene 60 segundos ($1' = 60''$).

Un ángulo central que corresponde a un arco de longitud igual al radio de la circunferencia se define como un ángulo de medida 1 radián (1 rad).



Luego, una circunferencia de radio r, cuya longitud es $2\pi r$, corresponde a un ángulo de medida:

$$\frac{2\pi r}{r}\ \text{rad} = 2\pi\ \text{rad}.$$

Por lo tanto, para cualquier circunferencia la medida en grados es 360° y la medida en radianes es 2π rad. Esto es, 2π rad $= 360^\circ$ o bien π rad $= 180^\circ$.

De la igualdad π rad $= 180^\circ$:

$$1\ \text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = (57.2957795)^\circ \approx 57^\circ\, 17'\, 45''.$$
$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{rad} \approx 0.0174533\ \text{rad}.$$

Reactivos de Medida de ángulos en grados y radianes

Soluciones: véase la página 274. Desarrollos: véase la página 353

1. Un ángulo mide 135°. Su medida en radianes es: ________.

   A. $\dfrac{3}{4}\pi$ rad

   B. $\dfrac{4}{3}\pi$ rad

   C. $\dfrac{2}{3}\pi$ rad

   D. $\dfrac{5}{12}\pi$ rad

E. $\frac{4}{5}\pi$ rad

2. Un ángulo mide $\frac{5}{12}\pi$ radianes. Su medida en grados es: ______.

A. 115°

B. 65°

C. 125°

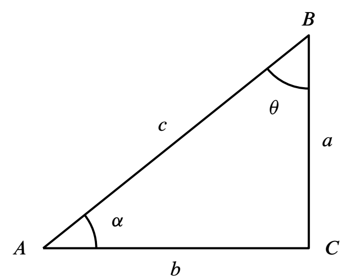
D. 75°

E. 110°

1.4.2 Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Las funciones trigonométricas son: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc); y se definen para los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, en el que previamente se identifican el cateto adyacente y el cateto opuesto al ángulo agudo seleccionado.

Por *ejemplo*, en el siguiente triángulo rectángulo



la hipotenusa es $\overline{AB}$ de longitud c y los catetos son $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de longitudes a, b, respectivamente.

Además: $\overline{AC}$ es el cateto adyacente al ángulo agudo α y es el cateto opuesto al ángulo agudo θ; y $\overline{BC}$ es el cateto adyacente al ángulo agudo θ y a la vez es el cateto opuesto al ángulo α.

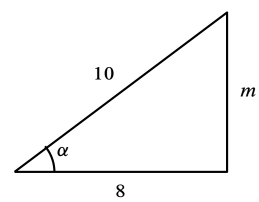
Las funciones trigonométricas se definen mediante las razones formadas con las longitudes de los lados del triángulo; esto es, para el ángulo α:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c};\\
\cos\alpha &= \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c};\\
\tan\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b};\\
\cot\alpha &= \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a};\\
\sec\alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b};\\
\csc\alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}$$

Reactivos de Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

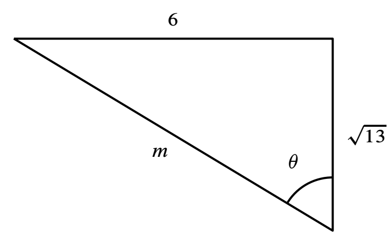
Soluciones: véase la página 274. Desarrollos: véase la página 354

1. En el triángulo rectángulo siguiente, el valor de $\tan\alpha$ es:______.



A. $\frac{4}{5}$
B. $\frac{5}{3}$
C. $\frac{4}{3}$
D. $\frac{3}{4}$
E. $\frac{5}{4}$

2. En el triángulo rectángulo siguiente, el valor de $\operatorname{sen}\theta$ es:______.



A. $\frac{7}{6}$
B. $\frac{\sqrt{13}}{7}$
C. $\frac{6}{\sqrt{13}}$
D. $\frac{7}{\sqrt{13}}$
E. $\frac{6}{7}$

3. Si α es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y, además, si $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, ¿cuál es el valor de $\cot\alpha$?: ______.

A. $\frac{4}{5}$
B. $\frac{4}{3}$

C. $\dfrac{2}{5}$
D. $\dfrac{3}{2}$
E. $\dfrac{3}{4}$

4. Si α es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y, además, $\tan\alpha = 2$, ¿cuál es el valor de $\operatorname{sen}\alpha$?: ________.

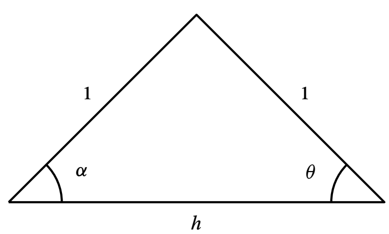
A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
B. $\dfrac{1}{2}$
C. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$
D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
E. $\sqrt{5}$

1.4.3 Funciones trigonométricas de ángulos notables (30°, 45° y 60°)

Consideramos como ángulos notables a aquellos cuyas medidas son 30°, 45°, 60°; o bien, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ radianes, respectivamente, los cuales son ángulos internos de triángulos muy particulares.

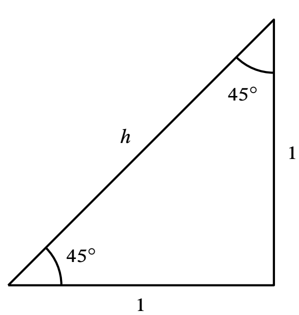
1. Para $\alpha = 45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

En este caso se considera un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud 1.



Por ser un triángulo isósceles se cumple que $\alpha = \theta$, y por ser un triángulo rectángulo, $\alpha + \theta = 90°$, por lo que $\alpha = \theta = 45°$.

Se tiene entonces el triángulo rectángulo:



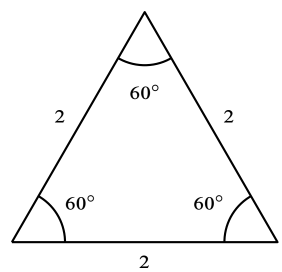
Aquí, la hipotenusa h se determina aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}.$$

Y de este triángulo rectángulo se obtienen los valores exactos de las funciones trigonométricas para $\alpha = 45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

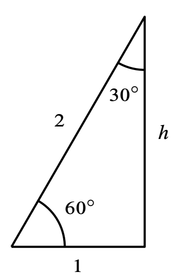
2. Para $\alpha = 30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad, $\theta = 60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

   En este caso se considera un triángulo equilátero con lados de longitud 2, el cual también es equiángulo con ángulos agudos internos de igual medida: $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad.



   Si en uno de los vértices se traza un segmento de recta al punto medio del lado opuesto, dicho segmento es, a la vez, mediana del lado opuesto, bisectriz del ángulo y altura del triángulo.

   Con el segmento trazado se generan dos triángulos rectángulos congruentes con hipotenusa de longitud 2 y catetos de longitudes 1, h, donde h es la altura de los triángulos.



   Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}.$$

   Y de este triángulo rectángulo, se obtienen los valores exactos de las funciones trigonométricas para $\alpha = 30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad y para $\theta = 60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

Reactivos de Funciones trigonométricas de ángulos notables (30°, 45°, 60°)

Soluciones: véase la página 274. Desarrollos: véase la página 356

1. El número $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ corresponde al valor de: ________ .

A. $\tan\dfrac{\pi}{4}$

B. $\cos\dfrac{\pi}{3}$

C. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}$

D. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$

E. $\tan\dfrac{\pi}{6}$

2. El valor de $\tan\dfrac{\pi}{4}$ es: ________ .

A. 1

B. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

E. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3. El número 2 corresponde al valor de: ________ .

A. $\sec 60°$

B. $\cos 60°$

C. $\tan 30°$

D. $\operatorname{sen} 45°$

E. $\cot 45°$

4. De las siguientes columnas, la primera contiene funciones trigonométricas de algunos ángulos y en la segunda hay números. Relaciona ambas y elige la opción correspondiente: ________ .

1. $\operatorname{sen} 30°$	a. $\sqrt{3}/2$
2. $\cos 30°$	b. $1/\sqrt{2}$
3. $\tan 30°$	c. $1/2$
4. $\operatorname{sen} 45°$	d. $\sqrt{3}$
5. $\cos 45°$	e. $1/\sqrt{3}$

A. 1c, 2a, 3e, 4b, 5b

B. 1c, 2a, 3e, 4b, 5d

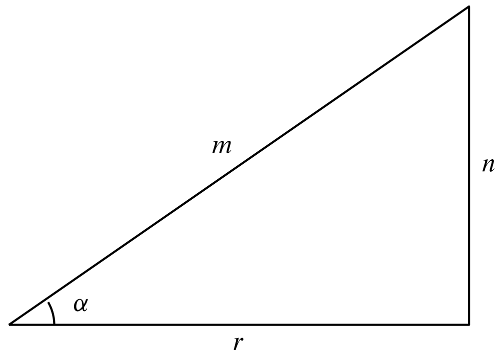
C. 2a, 4b, 3d, 5e, 1c

D. 2a, 5b, 3c, 4d, 1e

E. 4b, 3e, 1a, 2d, 5c

1.4.4 Identidades trigonométricas básicas

En el triángulo rectángulo



se tiene que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{n}{m};\ \cos\alpha = \frac{r}{m};\ \tan\alpha = \frac{n}{r};\ \cot\alpha = \frac{r}{n};\ \sec\alpha = \frac{m}{r};\ \csc\alpha = \frac{m}{n}.$$

De estas igualdades se desprenden las siguientes identidades:

1. $\operatorname{sen}\alpha\cdot\csc\alpha = \frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n} = \frac{nm}{nm} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha\cdot\csc\alpha = 1.$

2. $\cos\alpha\cdot\sec\alpha = \frac{r}{m}\cdot\frac{m}{r} = \frac{rm}{rm} = 1 \Rightarrow \cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1.$

3. $\tan\alpha\cdot\cot\alpha = \frac{n}{r}\cdot\frac{r}{n} = \frac{nr}{nr} = 1 \Rightarrow \tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1.$

4. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{n}{m}}{\frac{r}{m}} = \dfrac{nm}{mr} = \dfrac{n}{r} = \tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$

5. $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\frac{r}{m}}{\frac{n}{m}} = \dfrac{rm}{mn} = \dfrac{r}{n} = \cot\alpha \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$

6. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 + \left(\frac{r}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2} + \frac{r^2}{m^2} =$
$$= \frac{n^2+r^2}{m^2} \overset{[7]}{=} \frac{m^2}{m^2} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

7. $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = (\sec\alpha)^2 - (\tan\alpha)^2 = \left(\frac{m}{r}\right)^2 - \left(\frac{n}{r}\right)^2 = \frac{m^2}{r^2} - \frac{n^2}{r^2} =$
$$= \frac{m^2-n^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1 \Rightarrow \sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1.$$

Resumiendo, denominamos identidades trigonométricas básicas a las igualdades:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\alpha\cdot\csc\alpha = 1;\\
&\cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1;\\
&\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1;\\
&\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha};\\
&\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha};\\
&\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\\
&\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1.
\end{aligned}$$

7. Por el teorema de Pitágoras, $n^2 + r^2 = m^2$.

Reactivos de Identidades trigonométricas básicas

Soluciones: véase la página 274. Desarrollos: véase la página 358

1. En cada una de las opciones se tiene una igualdad y solamente una de éstas es verdadera. La opción correcta es: ______ .

   A. $\dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \cot\alpha$

   B. $\dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = 1$

   C. $\dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

   D. $\dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \tan\alpha$

   E. $\dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \cos\alpha$

2. En cada opción se tiene una igualdad y de éstas solamente una es verdadera. La opción correcta es: ______ .

   A. $\dfrac{\tan\alpha}{\cot\alpha} = \tan^2\alpha$

   B. $\dfrac{\tan\alpha}{\cot\alpha} = \cot^2\alpha$

   C. $\dfrac{\tan\alpha}{\cot\alpha} = \sec^2\alpha$

   D. $\dfrac{\tan\alpha}{\cot\alpha} = \operatorname{sen}^2\alpha$

   E. $\dfrac{\tan\alpha}{\cot\alpha} = \cos^2\alpha$

3. En cada opción se tiene una igualdad y solamente una de éstas es verdadera. La opción correcta es: ______ .

   A. $\sec\alpha = 1 + \tan\alpha$

   B. $\sec\alpha = \sqrt{1 - \tan^2\alpha}$

   C. $\sec\alpha = 1 - \tan\alpha$

   D. $\sec\alpha = \sqrt{\tan^2\alpha + 1}$

   E. $\sec\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

4. En cada una de las opciones se tiene una igualdad y sólo una de éstas es verdadera. La opción correcta es: ______ .

   A. $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

   B. $\operatorname{sen}\alpha = 1 - \cos\alpha$

   C. $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 + \cos^2\alpha}$

   D. $\operatorname{sen}\alpha = 1 + \cos\alpha$

   E. $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 1$

1.4.5 Resolución de triángulos rectángulos

Por resolver un triángulo rectángulo tendremos en cuenta lo siguiente: si en un triángulo rectángulo se conoce la longitud de uno de los lados y la medida de uno de los ángulos agudos, o bien las longitudes de dos de sus lados, se pueden determinar las medidas de los ángulos y lados restantes del triángulo, mediante la aplicación de funciones trigonométricas.

En el cálculo de un ángulo conviene una notación adecuada.

Si α es un ángulo tal que: $\operatorname{sen}\alpha = A$, $\cos\alpha = B$, $\tan\alpha = C$, entonces:

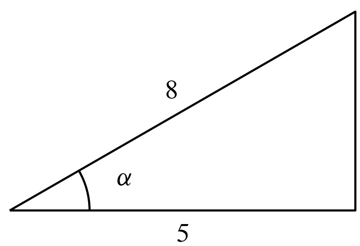
α es el arco o ángulo cuyo seno es A,	que se denota por: $\alpha = \operatorname{arcsen} A$;
α es el arco o ángulo cuyo coseno es B,	que se denota por: $\alpha = \arccos B$;
α es el arco o ángulo cuya tangente es C,	que se denota por: $\alpha = \arctan C$.

Así también, si $\cot\alpha = D$, $\sec\alpha = E$, $\csc\alpha = F$, entonces: $\alpha = \operatorname{arccot} D$, $\alpha = \operatorname{arcsec} E$, $\alpha = \operatorname{arccsc} F$.

Reactivos de Resolución de triángulos rectángulos

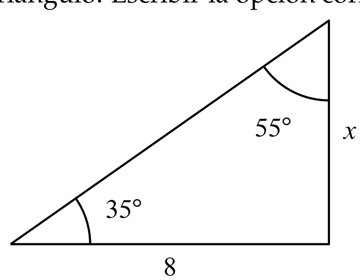
Soluciones: véase la página 274. Desarrollos: véase la página 359

1. Calcular el ángulo α en el siguiente triángulo; indicar la opción correcta: ______.



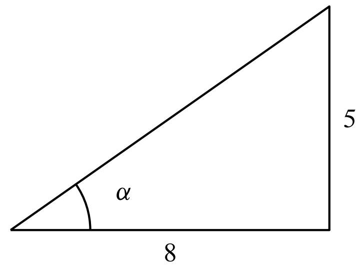
A. $\alpha = \arccos(1.6)$
B. $\alpha = \arctan(0.625)$
C. $\alpha = \arccos(0.625)$
D. $\alpha = \operatorname{arcsen}(1.6)$
E. $\alpha = \operatorname{arcsen}(0.625)$

2. Calcular el cateto x del siguiente triángulo. Escribir la opción correcta: ______.



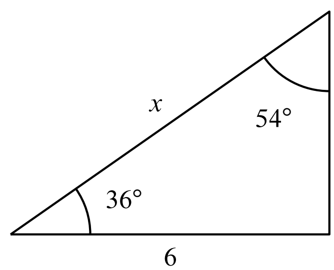
A. $x = 8\tan 55°$
B. $x = \dfrac{8}{\tan 35°}$
C. $x = 8\tan 35°$
D. $x = \dfrac{\tan 35°}{8}$
E. $x = \dfrac{\tan 55°}{8}$

3. Calcular el ángulo α en el siguiente triángulo. Marcar la opción correcta: ______.



A. $\alpha = \arctan(1.6)$
B. $\alpha = \operatorname{arcsen}(0.625)$
C. $\alpha = \arctan(0.625)$
D. $\alpha = \arccos(0.625)$
E. $\alpha = \arccos(1.6)$

4. Calcular el lado x del siguiente triángulo e indicar cuál es la opción correcta: ______.



A. $x = \dfrac{6}{\cos 54°}$
B. $x = 6 \operatorname{sen} 54°$
C. $x = \dfrac{6}{\operatorname{sen} 54°}$
D. $x = \dfrac{6}{\operatorname{sen} 36°}$
E. $x = \dfrac{\cos 36°}{6}$

1.4.6 Identidades para la adición de ángulos y sustracción de ángulos

Utilizando ángulos centrales en un círculo de radio unitario y centro en el origen (círculo trigonométrico $x^2 + y^2 = 1$) se definen las funciones trigonométricas para el ángulo de medida cero, así como para ángulos positivos y negativos de cualquier medida.

Con dicho tratamiento se obtienen los valores de las funciones trigonométricas para ángulos particulares e importantes. Algunos de éstos son:

Para \ El valor	$\operatorname{sen}\theta =$	$\cos\theta =$	$\tan\theta =$
$\theta = 0° = 0$ rad	0	1	0
$\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad	1	0	∞[8]
$\theta = 180° = \pi$ rad	0	-1	0
$\theta = 270° = \frac{3}{2}\pi$ rad	-1	0	∞
$\theta = 360° = 2\pi$ rad	0	1	0

Además se obtienen las siguientes identidades trigonométricas:

- $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \quad \& \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta.$
- $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \;\&\; \cos(-\theta) = \cos\theta.$
- $\operatorname{sen}(\theta + \alpha) = \operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\theta.$
- $\operatorname{sen}(\theta - \alpha) = \operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\theta.$
- $\cos(\theta + \alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha.$
- $\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha.$
- $\tan(\theta + \alpha) = \dfrac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta \cdot \tan\alpha}.$
- $\tan(\theta - \alpha) = \dfrac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta \cdot \tan\alpha}.$

Reactivos de Identidades para la adición de ángulos y sustracción de ángulos

Soluciones: véase la página 274. Desarrollos: véase la página 360

1. Seleccionar la opción que corresponde al resultado de $\operatorname{sen}150° + \cos 120°$: ________ .

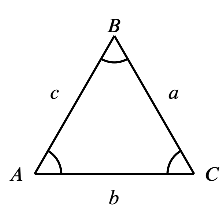
   A. 1
   B. $\dfrac{1}{2}$
   C. $-\dfrac{1}{2}$
   D. 0
   E. -1

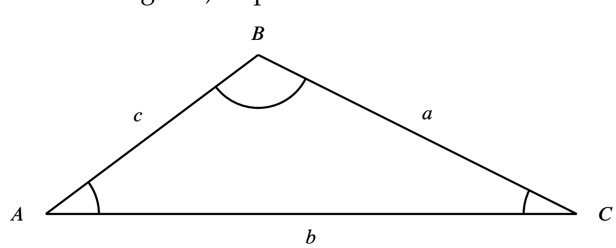
2. Seleccionar la opción que corresponde al resultado de $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4} - \cos\dfrac{3\pi}{4}$: ________ .

   A. $\sqrt{2}$
   B. 0
   C. 1
   D. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
   E. $-\sqrt{2}$

1.4.7 Leyes de los senos y de los cosenos

Para triángulos oblicuángulos (es decir, triángulos no rectángulos) es preciso tener en cuenta 2 relaciones muy importantes.





8. El valor $\tan 90°$ no es un número real, por lo cual no está determinado. Lo mismo sucede con $\tan 270°$.

1. La ley de los senos, la cual afirma que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Observa que, en esta relación, aparecen tres igualdades:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}; \qquad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}; \qquad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Así también se debe resaltar que el ángulo A es opuesto al lado de longitud a, el ángulo B es opuesto al lado de longitud b y el ángulo C es opuesto al lado de longitud c.

Con estas observaciones podemos describir la ley de los senos como 3 igualdades de fracciones que tienen como numerador a la longitud de un lado y como denominador al seno del ángulo opuesto a dicho lado.

2. La ley de los cosenos, la cual afirma que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Aquí debe notarse que a es la longitud del lado opuesto al ángulo A y además que dicho ángulo A está formado por los lados de longitudes b, c.

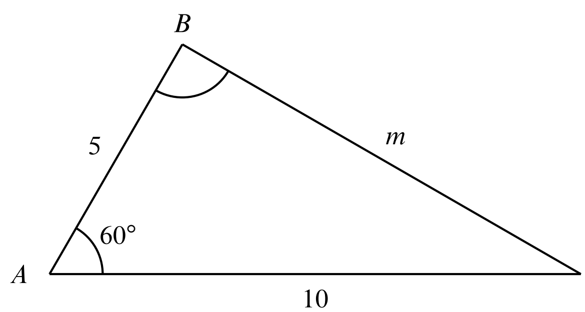
Por la ley de los cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Reactivos de Leyes de los senos y de los cosenos

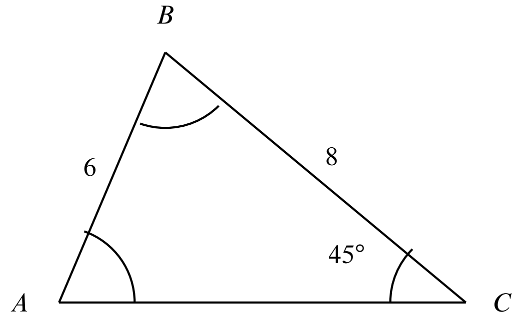
Soluciones: véase la página 274. Desarrollos: véase la página 361

1. En el siguiente triángulo, el valor de m es: ________ .



A. $\sqrt{24.5}$
B. 75
C. 24.5
D. 15
E. $5\sqrt{3}$

2. En el siguiente triángulo, la medida del ángulo A es: ________ .



A. $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

B. $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{4}{3\sqrt{2}}\right)$

C. $\operatorname{arccos}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

D. $\operatorname{arccos}\left(\dfrac{3}{2}\right)$

E. $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

1.4.8 Resolución de triángulos oblicuángulos

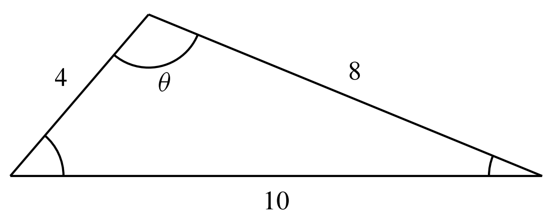
Como en el caso de los triángulos rectángulos, resolver un triángulo oblicuángulo significa determinar todos los elementos del triángulo, a partir de datos conocidos; en este caso, de tres datos conocidos: dos lados y un ángulo, o bien dos ángulos y un lado.

En cualquiera de las situaciones, se deben analizar los datos conocidos para decidir cuál de las leyes aplicar: la ley de los senos o la ley de los cosenos. Por esto es importante tener claro cuáles son los elementos relacionados en cada una de estas leyes.

Reactivos de Resolución de triángulos oblicuángulos

Soluciones: véase la página 275. Desarrollos: véase la página 361

1. En el siguiente triángulo, la medida del ángulo θ es: ________ .



A. $\operatorname{arccos}\left(\dfrac{5}{16}\right)$

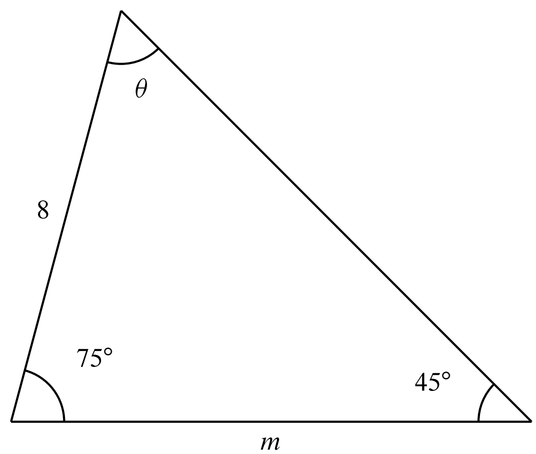
B. $\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{5}{16}\right)$

C. $\operatorname{arccos}\left(-\dfrac{16}{5}\right)$

D. $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{5}{16}\right)$

E. $\operatorname{arccos}\left(-\dfrac{5}{16}\right)$

2. En el siguiente triángulo, el valor de m es: ______ .

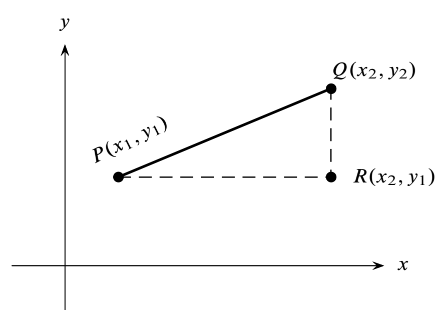


A. $4\sqrt{\dfrac{3}{2}}$
B. $4\sqrt{6}$
C. $8\sqrt{3}$
D. $4\sqrt{\dfrac{2}{3}}$
E. $4\sqrt{2}$

1.5 Geometría analítica

1.5.1 Distancia entre dos puntos

En la figura siguiente se especifican dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano. A partir de estos puntos se construye el triángulo rectángulo PQR.



- La longitud del cateto $\overline{PR}$ es igual a $x_2 - x_1$, por ser $x_2 > x_1$.
- La longitud del cateto $\overline{RQ}$ es igual a $y_2 - y_1$, por ser $y_2 > y_1$.
- La longitud de la hipotenusa $\overline{PQ}$ (usando el teorema de Pitágoras) es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

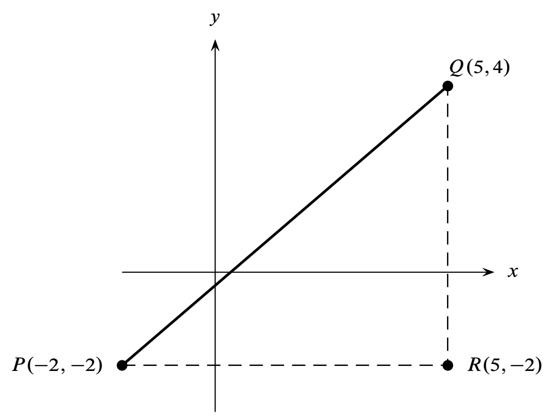
La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano es:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Vemos que:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(Q, P).$$

Para calcular la distancia entre dos puntos no importa el orden en que se tomen las coordenadas.
En la figura anterior los puntos P y Q tenían coordenadas positivas. Vamos a ver un ejemplo en donde esta condición no se cumple.

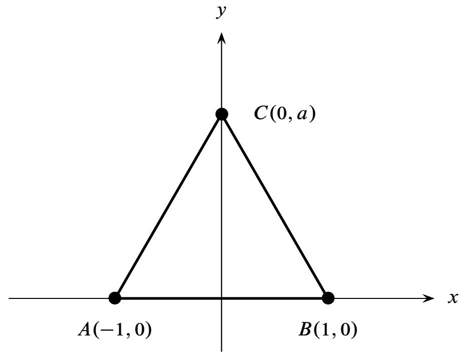


- La longitud del cateto $\overline{PR}$ es igual a $5 - (-2) = 5 + 2 = 7$.
- La longitud del cateto $\overline{RQ}$ es igual a $4 - (-2) = 4 + 2 = 6$.
- La longitud de la hipotenusa $\overline{PQ}$ (usando el teorema de Pitágoras) es $\sqrt{(7)^2 + (6)^2} = \sqrt{85} \approx 9.21$.

Reactivos de Distancia entre dos puntos

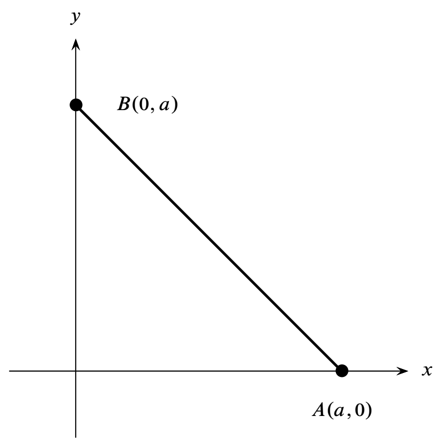
Soluciones: véase la página 275. Desarrollos: véase la página 362

1. Calcular la distancia entre los puntos $(1, 5)$ y $(3, 2)$: ______.
   A. $\sqrt{13}$
   B. $\sqrt{15}$
   C. $\sqrt{6}$
   D. $\sqrt{5}$
   E. $\sqrt{3}$
2. Calcular la distancia entre los puntos $(-2, -5)$ y $(-3, -7)$: ______.
   A. $\sqrt{25}$
   B. $\sqrt{225}$
   C. $\sqrt{115}$
   D. $\sqrt{5}$
   E. $\sqrt{35}$
3. Calcular la distancia entre los puntos $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: ______.
   A. $\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$
   B. $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$
   C. $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$
   D. $\sqrt{2}(3 + \sqrt{2})$
   E. $\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2)$
4. Dada la siguiente figura. ¿Para qué valor de a, la longitud del segmento $\overline{AB}$ es igual a la longitud del segmento $\overline{BC}$?: ______.



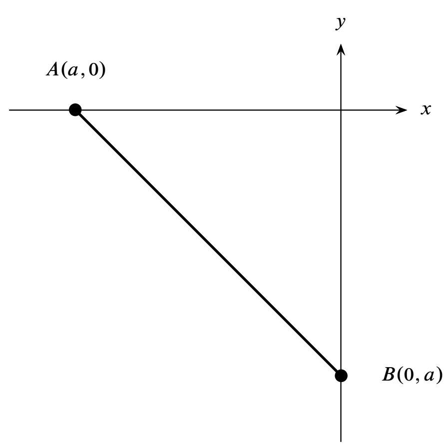
A. $\sqrt{2}$
B. $\sqrt{5}$
C. 2
D. 3
E. $\sqrt{3}$

5. Dada la siguiente figura. Calcular la distancia $\overline{AB}$: ________.



A. $2a$
B. $\sqrt{a}$
C. $\sqrt{2}a$
D. $a - 2$
E. $2 - a$

6. Dada la siguiente figura:

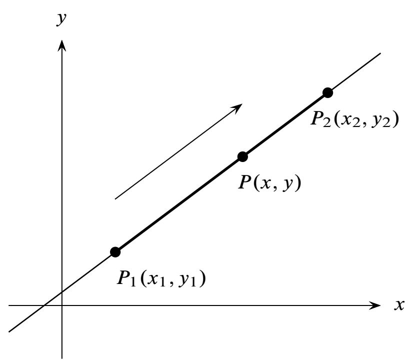


Calcular la distancia $\overline{AB}$: ______.

A. $-2a$
B. $\sqrt{2}a$
C. $2a$
D. $-a+2$
E. $-\sqrt{2}a$

1.5.2 División de un segmento en una razón dada. Punto medio

Sean dos puntos en el plano $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ y un punto $P(x, y)$ sobre la recta definida por estos puntos:



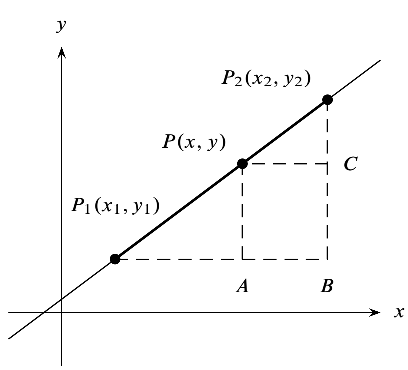
Vamos a considerar que la recta tiene una dirección positiva definida por $\overrightarrow{P_1P_2}$. Así, podemos hablar de los puntos que se encuentran a la izquierda de P_1 y de aquellos puntos que se encuentran a la derecha de P_2.

- Decimos que el punto P divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón r si:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r.$$

1. Si P se encuentra dentro del segmento $\overline{P_1P_2}$, entonces ambas cantidades $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ son positivas y por lo tanto $r > 0$.
2. Si P está a la izquierda de P_1, entonces $\overline{P_1P}$ es negativo y $\overline{PP_2}$ es positivo; por lo tanto, $r < 0$.
3. Si P está a la derecha de P_2, entonces $\overline{P_1P}$ es positivo y $\overline{PP_2}$ es negativo; por lo tanto, $r < 0$.
4. La razón r no está definida para $P = P_2$.

Para calcular las coordenadas de P, consideramos la siguiente figura:



Los triángulos P_1P_2B, P_1PA y PP_2C son semejantes. Por lo tanto:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r = \frac{\overline{P_1A}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CP_2}}.$$

Se tiene que $\overline{P_1A} = x - x_1$, $\overline{AB} = x_2 - x$, $\overline{BC} = y - y_1$, $\overline{CP_2} = y_2 - y$.

- Si tomamos

$$\begin{aligned} r = \frac{\overline{P_1A}}{\overline{AB}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} &\Rightarrow x - x_1 = r(x_2 - x) \Rightarrow x - x_1 = rx_2 - rx \Rightarrow \\ &\Rightarrow rx + x = x_1 + rx_2 \Rightarrow x(r+1) = x_1 + rx_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{x_1 + rx_2}{r+1}. \end{aligned}$$

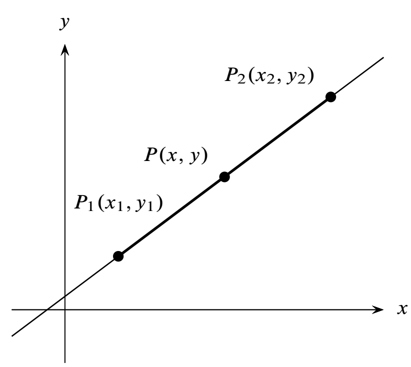
- Si ahora tomamos

$$\begin{aligned} r = \frac{\overline{BC}}{\overline{CP_2}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} &\Rightarrow y - y_1 = r(y_2 - y) \Rightarrow y - y_1 = ry_2 - ry \Rightarrow \\ &\Rightarrow ry + y = y_1 + ry_2 \Rightarrow y(r+1) = y_1 + ry_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{y_1 + ry_2}{r+1}. \end{aligned}$$

Con lo anterior las relaciones entre las coordenadas del punto $P(x, y)$ y la razón r son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{r+1} \quad \& \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{r+1}. \qquad (*)$$

Ya podemos calcular el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$.



En este caso $\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$, por lo tanto:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r = 1.$$

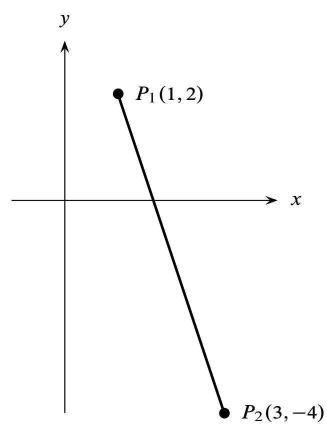
Usando este valor de r en (*), obtenemos:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \& \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Reactivos de División de un segmento en una razón dada. Punto medio

Soluciones: véase la página 275. Desarrollos: véase la página 363

1. Encontrar las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $r = \dfrac{2}{5}$: ______ .



   A. $P\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$
   B. $P\left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{5}\right)$
   C. $P\left(\dfrac{11}{7}, \dfrac{2}{7}\right)$
   D. $P\left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{2}{7}\right)$
   E. $P\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{2}{5}\right)$

2. Sean los puntos $P_1(1, -1)$ y $P_2(2, 3)$. Si el punto $P(3, 7)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón r, entonces: ______ .

   A. $r = -2$
   B. $r = -3$
   C. $r = -1$
   D. $r = -2/3$
   E. $r = 3/2$

3. Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(-3, 5)$. El punto $P(-1, 1)$ es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$. Encontrar las coordenadas del punto P_1: ______ .

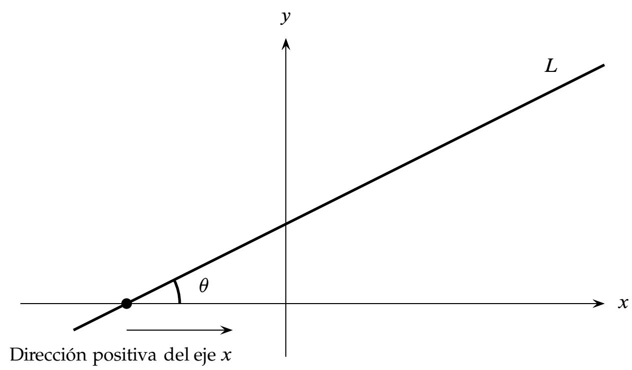
   A. $P_1(-2, 3)$
   B. $P_1(0, -1)$
   C. $P_1(-1, 3)$
   D. $P_1(1, -3)$
   E. $P_1(-5, 9)$

4. Sean los puntos $P_1(-2, 3)$ y $P_2(x_2, y_2)$. El punto $P(-12, 5)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $r = -\dfrac{2}{3}$. Encontrar las coordenadas del punto P_2: ______ .

A. $P_2(2,3)$
B. $P_2(3,3)$
C. $P_2(2,2)$
D. $P_2(3,2)$
E. $P_2(3,4)$

1.5.3 Ángulo de inclinación y pendiente de una recta

Sea L una recta no perpendicular al eje x. Supongamos que esta recta forma un ángulo θ con la dirección positiva del eje x, como se ve en la siguiente gráfica:



- El ángulo θ es el ángulo de inclinación de la recta L.

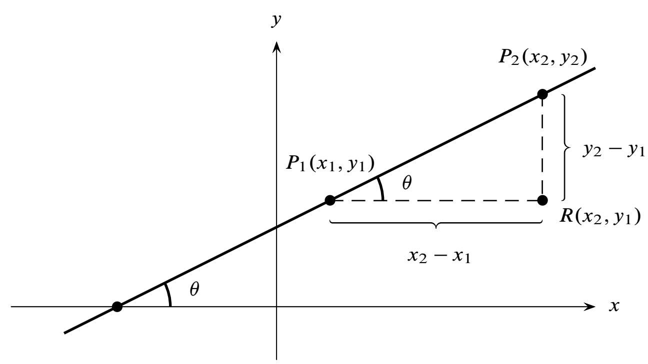
  Cuando una recta es perpendicular al eje x, declaramos que $\theta = 90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

- La pendiente m de una recta es la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación. Si θ es el ángulo de inclinación de la recta L, entonces:

$$m = \tan\theta.$$

  Cuando $\theta = 90°$, la pendiente no está definida.

Para conocer la pendiente de una recta, se mide su ángulo de inclinación θ y se usa una calculadora. Nosotros vamos a seguir el siguiente procedimiento: tomamos dos puntos arbitrarios $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ sobre la recta y construimos el triángulo P_1RP_2, como se ve en la siguiente figura:



Por lo tanto:

$$m = \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{RP_2}}{\overline{P_1R}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Reactivos de Ángulo de inclinación y pendiente de una recta

Soluciones: véase la página 275. Desarrollos: véase la página 365

1. La pendiente m de la recta que pasa por los puntos $P_1(1,-1)$, $P_2(-1,3)$ es: ______.

   A. $m = 2$
   B. $m = -2$
   C. $m = 4$
   D. $m = -4$
   E. $m = 1$

2. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(3,-2)$, $P_2(-1,y_2)$ es $m = -3$. Entonces: ______.

   A. $y_2 = -10$
   B. $y_2 = 14$
   C. $y_2 = -14$
   D. $y_2 = 10$
   E. $y_2 = 8$

3. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1,3)$, $P_2(1,2)$ es $m = 2$. Entonces: ______.

   A. $x_1 = \frac{5}{2}$
   B. $x_1 = 2$
   C. $x_1 = \frac{3}{2}$
   D. $x_1 = -2$
   E. $x_1 = -\frac{3}{2}$

4. ¿Cuál es el ángulo de inclinación θ de la recta que pasa por los puntos $P_1(1,0)$, $P_2(2,\sqrt{3})$?: ______.

   A. $\theta = 30°$
   B. $\theta = 45°$
   C. $\theta = 60°$
   D. $\theta = 120°$
   E. $\theta = 150°$

1.5.4 Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

- Dos rectas, L_1 con pendiente m_1 y L_2 con pendiente m_2 son paralelas si:

$$m_1 = m_2.$$

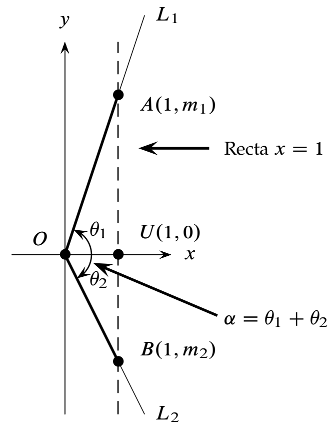
  Si θ_1 es el ángulo de inclinación de L_1 y θ_2 es el ángulo de inclinación de L_2, entonces:

$$m_1 = m_2 \;\Leftrightarrow\; \tan\theta_1 = \tan\theta_2 \;\Leftrightarrow\; \theta_1 = \theta_2.$$

- Dos rectas con pendientes m_1, m_2 son perpendiculares si:

$$m_1 m_2 = -1.$$

  Si suponemos que las rectas se cortan en el origen de los ejes cartesianos, usamos la siguiente figura:



Hemos trazado la recta perpendicular $x = 1$. Debe quedar claro que $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ es el ángulo entre las rectas L_1, L_2. Se debe comprender que:

$$m_1 = \tan\theta_1 = \frac{\overline{UA}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{UA}}{1} = \overline{UA}.$$
$$m_2 = \tan\theta_2 = \frac{\overline{UB}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{UB}}{1} = \overline{UB}.$$

En el triángulo OAB se cumple la ley de los cosenos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\alpha. \qquad (*)$$

Se pueden calcular las siguientes cantidades:

1. $\overline{AB} = m_1 - m_2$; ya que $\overline{AB} = \sqrt{(1-1)^2 + (m_1 - m_2)^2} = \sqrt{(m_1 - m_2)^2} = m_1 - m_2$.
2. $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + m_1^2}$; ya que $\overline{OA}^2 = \overline{OU}^2 + \overline{UA}^2 = 1^2 + m_1^2$.
3. $\overline{OB} = \sqrt{1^2 + m_2^2}$; ya que $\overline{OB}^2 = \overline{OU}^2 + \overline{UB}^2 = 1^2 + m_2^2$.

Utilizando estas cantidades en (*), obtenemos:

$$(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) - 2\sqrt{1 + m_1^2}\cdot\sqrt{1 + m_2^2}\cos\alpha.$$

Operando y simplificando, obtenemos:

$$m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 = 2 + m_1^2 + m_2^2 - 2\sqrt{1 + m_1^2}\cdot\sqrt{1 + m_2^2}\cos\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2m_1m_2 = 2 - 2\sqrt{1 + m_1^2}\cdot\sqrt{1 + m_2^2}\cos\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_1m_2 + 1 = \sqrt{1 + m_1^2}\cdot\sqrt{1 + m_2^2}\cos\alpha.$$

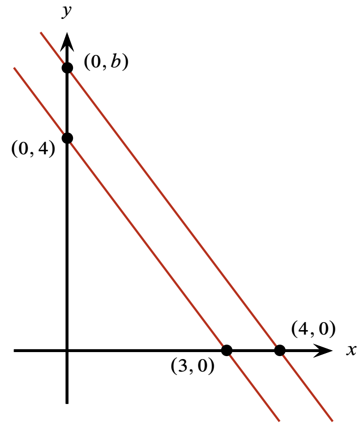
Por lo tanto:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}\text{ rad} = 90^\circ. \qquad (**)$$

Reactivos de Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Soluciones: véase la página 275. Desarrollos: véase la página 366

1. Encontrar b de tal manera que las rectas sean paralelas: ______.



A. $b = 5$

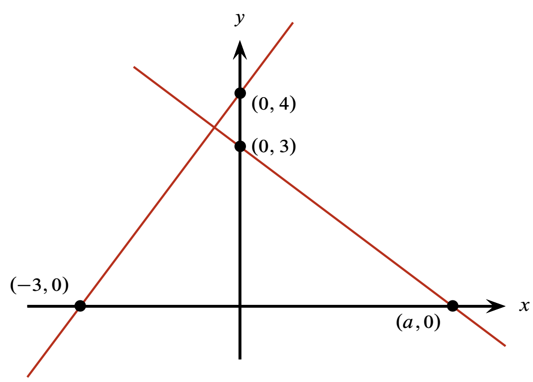
B. $b = 6$

C. $b = \dfrac{5}{4}$

D. $b = \dfrac{16}{3}$

E. $b = \dfrac{14}{3}$

2. Encontrar a de tal manera que las rectas sean perpendiculares: ________.



A. $a = 4$

B. $a = 3$

C. $a = 5$

D. $a = 3.5$

E. $a = 4.5$

3. Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $P_1(1, -2)$, $P_2(-3, 1)$.
Sea L_2 la recta que pasa por los puntos $A(0, 2)$, $B(1, b)$.
¿Para qué valor de b las rectas L_1, L_2 son paralelas?: ________.

A. $b = \dfrac{5}{2}$

B. $b = \dfrac{4}{5}$

C. $b = \dfrac{5}{4}$

D. $b = \frac{2}{5}$

E. $b = -\frac{5}{4}$

4. Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $P_1(2, -3)$, $P_2(5, 2)$.
Sea L_2 la recta que pasa por los puntos $A(3, 0)$, $B(a, 1)$.
¿Para qué valor de a las rectas L_1, L_2 son perpendiculares?: ________.

A. $a = -\frac{4}{3}$

B. $a = \frac{3}{4}$

C. $a = -\frac{3}{4}$

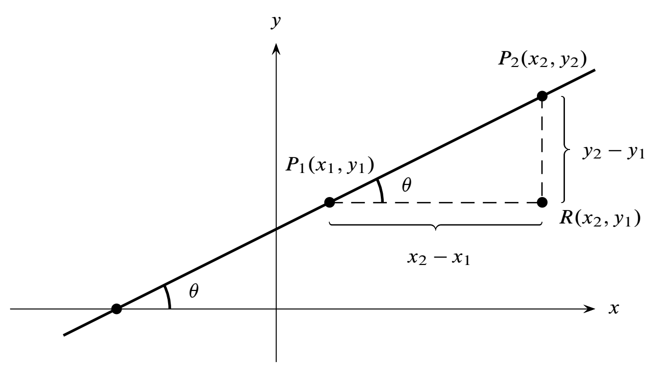
D. $a = \frac{5}{3}$

E. $a = \frac{4}{3}$

1.5.5 Ecuaciones de la recta en todas sus formas

- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

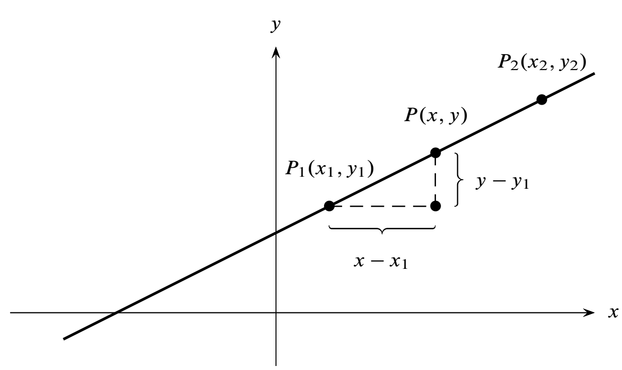
Si tenemos dos puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ sobre una recta:



Sabemos calcular la pendiente m de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \tag{α}$$

¿Cuál es la ecuación que satisface un punto $P(x, y)$ arbitrario de la recta? Vamos a tomar uno de los puntos anteriores, digamos $P_1(x_1, y_1)$, para calcular de nuevo la pendiente de la recta con estos dos puntos:



Con estos puntos, la pendiente es:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Igualando ambas expresiones de m, obtenemos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (\beta)$$

- Ecuación de la recta en su forma general

Sabemos que la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ tiene por ecuación:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

De aquí se tiene que:

$$\begin{aligned}
(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1) &\Rightarrow (y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x_2 - x_1)(y - y_1) + (y_1 - y_2)(x - x_1) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 + (y_1 - y_2)x - (y_1 - y_2)x_1 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 + (y_1 - y_2)x - (y_1 - y_2)x_1 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x_2 - x_1)y + (y_1 - y_2)x + (x_1 - x_2)y_1 - (y_1 - y_2)x_1 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + [(x_1 - x_2)y_1 - (y_1 - y_2)x_1 = 0.
\end{aligned}$$

Y si consideramos los números conocidos:

$$y_1 - y_1 = A; \quad x_2 - x_1 = B; \quad (x_1 - x_2)y_1 - (y_1 - y_2)x_1 = C,$$

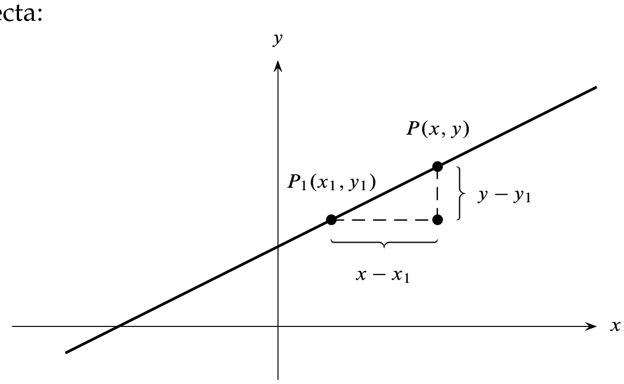
entonces la última ecuación es:

$$Ax + By + C = 0,$$

que es denominada forma general de la ecuación de la recta.

- Ecuación de la recta que pasa por un punto y pendiente conocida

Suponemos que el punto conocido es $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente conocida es m. Consideramos un punto $P(x, y)$ sobre la recta:



Calculamos la pendiente como antes e igualamos ahora con la pendiente conocida:

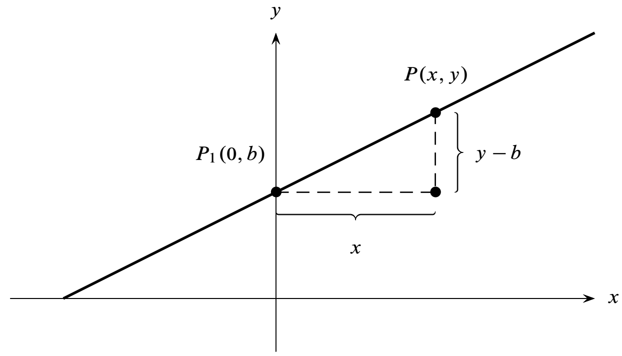
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m. \qquad (\gamma)$$

Esta ecuación la satisface cualquier punto arbitrario $P(x, y)$ de la recta. Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por un punto conocido y pendiente conocida es:

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (\delta)$$

- **Ecuación de la recta con pendiente m y ordenada en el origen b conocidas**

  La ordenada en el origen define el punto $P_1(x_1, y_1) = P_1(0, b)$ por donde pasa la recta. Estamos ahora en el caso anterior. Aplicando (δ) obtenemos:



$$y - b = m(x - 0) \Rightarrow y - b = mx \Rightarrow y = mx + b. \qquad (\epsilon)$$

- **Ecuación de la recta en su forma simétrica**

  La forma simétrica significa que se conocen los dos puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados. El corte al eje x lo denotaremos como $P_1(a, 0)$ y el corte al eje y como $P_2(0, b)$. Usando (β), obtenemos:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 0}{x - a} = \frac{b - 0}{0 - a} \Rightarrow \frac{y}{x - a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -\frac{b}{a}(x - a) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + b \Rightarrow \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1. \qquad (\eta)$$

  Esta última ecuación es la ecuación simétrica de la recta.

Reactivos de Ecuaciones de la recta en todas sus formas

Soluciones: véase la página 275. Desarrollos: véase la página 367

1. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, 5)$ es: ______.

   A. $2x - 3y - 11 = 0$
   B. $2x + 3y - 11 = 0$
   C. $2x - 3y - 7 = 0$
   D. $2x + 3y - 7 = 0$
   E. $2x - 3y + 11 = 0$

2. La ordenada al origen b y la abscisa al origen a de la recta $3x - 9y + 7 = 0$ son: ______.

   A. $b = \frac{7}{9}, \quad a = \frac{7}{3}$
   B. $b = \frac{7}{9}, \quad a = -\frac{7}{3}$
   C. $b = -\frac{7}{9}, \quad a = -\frac{7}{3}$
   D. $b = -\frac{7}{9}, \quad a = \frac{7}{3}$
   E. $b = \frac{7}{9}, \quad a = -\frac{7}{2}$

3. La ecuación de la recta $7x - 2y - 3 = 0$ en su forma simétrica es: ______.

   A. $\dfrac{x}{-\frac{7}{3}} + \dfrac{y}{-\frac{3}{2}} = 1$

   B. $\dfrac{x}{\frac{3}{7}} + \dfrac{y}{\frac{2}{3}} = 1$

   C. $\dfrac{x}{\frac{3}{7}} + \dfrac{y}{\frac{3}{2}} = 1$

   D. $\dfrac{x}{-\frac{3}{7}} + \dfrac{y}{\frac{2}{3}} = 1$

   E. $\dfrac{x}{\frac{3}{7}} + \dfrac{y}{-\frac{3}{2}} = 1$

4. La ordenada al origen b, de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3)$ con pendiente $m = -3$ es: ______.

   A. $b = -1$

   B. $b = 1$

   C. $b = 2$

   D. $b = -2$

   E. $b = 0$

5. La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3)$ paralela a la recta $-3x + 2y + 1 = 0$ es: ______.

   A. $3x - 2y + 9 = 0$

   B. $3x + 2y + 3 = 0$

   C. $3x + 2y + 9 = 0$

   D. $2x + 3y - 7 = 0$

   E. $2x - 3y + 11 = 0$

6. La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2)$ y es perpendicular a la recta $y = 3$ es: ______.

   A. $y = -3$

   B. $x = 1$

   C. $x = -1$

   D. $y = 2$

   E. $y = -\dfrac{1}{3}$

1.5.6 Intersección de rectas

Sea la recta L_1 con ecuación $a_1x + b_1y = c_1$; y sea la recta L_2 con ecuación $a_2x + b_2y = c_2$. Para encontrar el punto $P(x, y)$ en el cual se intersecan, se resuelve el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1; \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Para lo cual se usa la técnica apropiada: suma o resta, igualación o bien sustitución. La solución del sistema son las coordenadas del punto de intersección.

Reactivos de Intersección de rectas
Soluciones: véase la página 275. Desarrollos: véase la página 370

1. El punto de intersección $P(x_1, y_1)$ de las rectas $x - 3y + 3 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$ es: ______.

   A. $(x_1, y_1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{11}{3}\right)$

   B. $(x_1, y_1) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{11}{9}\right)$

   C. $(x_1, y_1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{11}{9}\right)$

   D. $(x_1, y_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right)$

   E. $(x_1, y_1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right)$

2. Sea L_1 la recta que pasa por el punto $(1, -3)$, con pendiente $m = -1$. Sea L_2 la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(3, 0)$. La intersección $P(x_1, y_1)$ de ambas rectas es: ______.

   A. $(x_1, y_1) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$

   B. $(x_1, y_1) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

   C. $(x_1, y_1) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$

   D. $(x_1, y_1) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$

   E. $(x_1, y_1) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

3. Sea L_1 la recta $3x - 2y + 7 = 0$. Sea L_2 la recta que pasa por el punto $P(-7, 3)$, paralela al eje x. La intersección $P(x, y)$ de ambas rectas es: ______.

   A. $(x, y) = \left(-\frac{2}{3}, 3\right)$

   B. $(x, y) = \left(7, -\frac{1}{3}\right)$

   C. $(x, y) = \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$

   D. $(x, y) = \left(7, \frac{1}{3}\right)$

   E. $(x, y) = (7, 3)$

4. Sea L_1 la recta $-2x + 5y - 1 = 0$. Sea L_2 la recta que pasa por el punto $P(-7, 3)$, paralela al eje y. La intersección $P(x, y)$ de ambas rectas es: ______.

   A. $(x, y) = \left(7, -\frac{11}{5}\right)$

   B. $(x, y) = \left(7, \frac{13}{5}\right)$

   C. $(x, y) = \left(7, -\frac{13}{5}\right)$

D. $(x, y) = \left(-7, -\dfrac{13}{5}\right)$

E. $(x, y) = \left(-7, \dfrac{13}{5}\right)$

5. La ecuación de la recta que pasa por la intersección de la rectas $x - y + 4 = 0$ & $2x + y + 5 = 0$, con pendiente $m = -\dfrac{1}{2}$, es: ________.

   A. $x + 2y - 2 = 0$

   B. $x + 2y + 1 = 0$

   C. $x + 2y + 2 = 0$

   D. $x + 2y - 1 = 0$

   E. $x + 2y = 0$

6. Sea L_1 la recta que pasa por el origen, con pendiente $m = -3$. Sea L_2 la recta $7x + 3y - 1 = 0$. La intersección $P(x, y)$ de ambas rectas es: ________.

   A. $(x, y) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

   B. $(x, y) = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

   C. $(x, y) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

   D. $(x, y) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

   E. $(x, y) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

1.5.7 Ecuación y elementos principales de la circunferencia

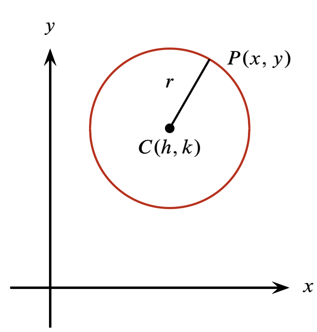
La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo es constante. Al punto fijo $C(h, k)$ se le llama centro de la cincunferencia y la distancia constante r es el radio de la circunferencia. La ecuación de una circunferencia es, entonces:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \qquad (*)$$

En efecto, si $P(x, y)$ es un punto de la circunferencia, la distancia entre $P(x, y)$ y el centro $C(h, k)$ está dada por:

$$d(P, C) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r;$$

elevando al cuadrado, obtenemos la igualdad (*):



Si desarrollamos (*), obtenemos:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \Rightarrow x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+Ax+y^2+By+C=0;$$

donde hemos escrito

$$\begin{aligned} A &= -2h. \\ B &= -2k. \\ C &= h^2+k^2-r^2. \end{aligned}$$

Si nos dan una ecuación del estilo $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, necesitamos completar cuadrados para decidir si dicha ecuación es una circunferencia y, en su caso, determinar las coordenadas del centro y la longitud de radio.

Reactivos de Ecuación y elementos principales de la circunferencia
Soluciones: véase la página 276. Desarrollos: véase la página 372

1. La ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(1,-1)$ y radio $r=3$ es: ________.

   A. $x^2+y^2-2x+2y-7=0$
   B. $x^2+y^2-2x+2y-8=0$
   C. $x^2+y^2-2x+2y+7=0$
   D. $x^2+y^2-2x+2y+8=0$
   E. $x^2+y^2-2x+2y-5=0$

2. El radio de la circunferencia $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ es: ________.

   A. $r=3$
   B. $r=\sqrt{3}$
   C. $r=7$
   D. $r=\sqrt{7}$
   E. $r=4$

3. Los puntos $A(-2,5)$ y $B(6,-3)$ son los extremos de un diamétro de una circunferencia. La ecuación de dicha circunferencia es: ________.

   A. $x^2+y^2+4x+2y-27=0$
   B. $x^2+y^2-4x-2y-27=0$
   C. $x^2+y^2-4x-2y-29=0$
   D. $x^2+y^2+4x+2y+39=0$
   E. $x^2+y^2-4x-2y+25=0$

4. La ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(-1,3)$ y con centro $C(2,-1)$ es: ________.

   A. $x^2+y^2-4x+2y-30=0$
   B. $x^2+y^2-4x+2y-18=0$
   C. $x^2+y^2-4x+2y-20=0$
   D. $x^2+y^2-4x+2y-28=0$
   E. $x^2+y^2-4x+2y-22=0$

5. La ecuación de la circunferencia de radio $r = 2$, que es concéntrica a $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 12 = 0$, es: ______.

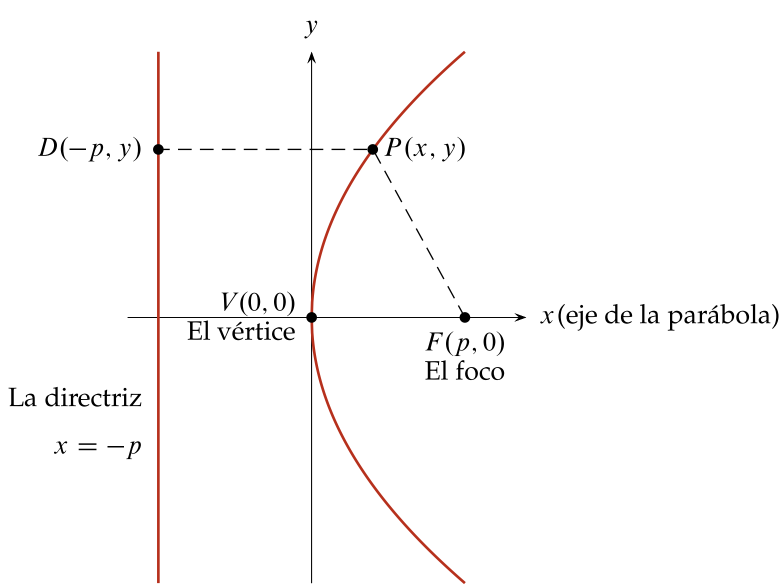
   A. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$
   C. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$
   D. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 7 = 0$
   E. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

6. El valor de A que permite que la circunferencia $x^2 + y^2 + Ax + 2y = 0$ tenga radio $r = 4$ es: ______.

   A. $A = 2\sqrt{7}$
   B. $A = 2\sqrt{15}$
   C. $A = 2\sqrt{13}$
   D. $A = 2\sqrt{17}$
   E. $A = 2\sqrt{11}$

1.5.8 Ecuación y elementos principales de la parábola

La parábola es el lugar geométrico que consta de los puntos $P(x, y)$ del plano que satisfacen la siguiente condición: la distancia del punto P a una recta fija (la directriz) es igual a la distancia del mismo punto P a un punto fijo (el foco), donde el foco se encuentra fuera de la directriz.
Para conseguir ecuaciones sencillas de la parábola, colocamos a la directriz y al foco de la siguiente manera:



Hemos colocado el foco sobre el eje x en el punto $F(p, 0)$ y la directriz es la recta $x = -p$. Con estas condiciones:

1. La recta que pasa por el foco perpendicular a la directriz recibe el nombre de eje de la parábola (que en este caso es el eje coordenado x).

2. El origen $(0, 0)$ es un punto de la parábola. Éste se encuentra sobre el eje de la misma. Recibe el nombre de vértice de la parábola.

Para obtener la ecuación de la parabola, procedemos de la siguiente manera.

Sea $P(x, y)$ un punto sobre la parábola. Calculamos $\overline{PF}$ de este punto al foco $F(p, 0)$:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}.$$

Calculamos también la distancia $\overline{PD}$ del punto $P(x, y)$ a la directriz $x = -p$:

$$\overline{PD} = \sqrt{[x-(-p)]^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + 0^2} = \sqrt{(x+p)^2} = x + p.$$

Igualando ambas distancias y haciendo algunas operaciones algebraicas, se obtiene:

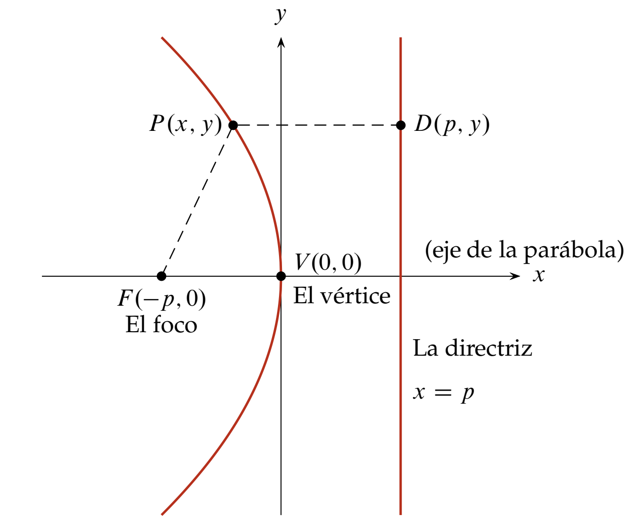
$$\begin{aligned} \overline{PF} = \overline{PD} &\Rightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p \Rightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \Rightarrow -2px + y^2 = 2px \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 = 4px. \end{aligned}$$

Esta última ecuación corresponde entonces a una parábola, con eje horizontal, que se abre hacia la derecha. Recuerda que $p > 0$ y que representa la distancia del vértice al foco.

Si colocamos el vértice en el punto $V(h, k)$, la ecuación de la parábola es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h).$$

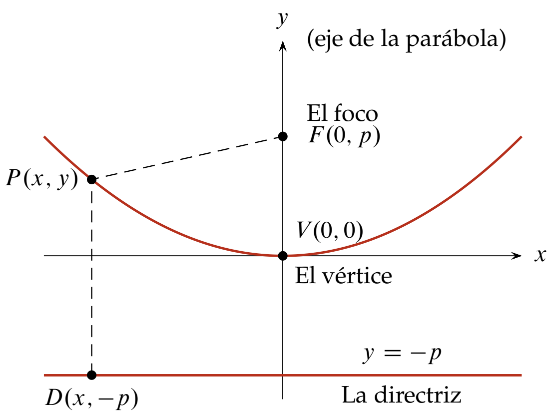
Si efectuamos los mismos cálculos en las siguientes parábolas, obtenemos las ecuaciones que se encuentran en el lado derecho de la gráfica correspondiente.



$$y^2 = -4px.$$

La ecuación con vértice en $V(h,k)$ es:

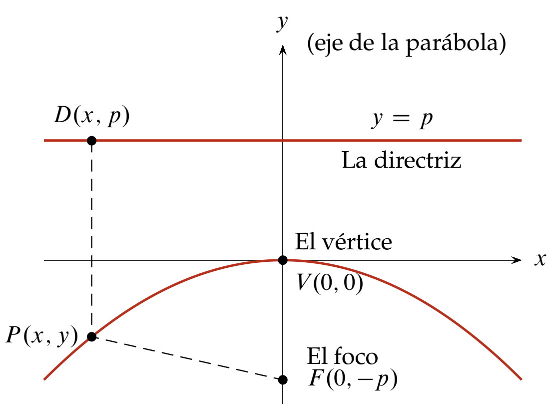
$$(y-k)^2 = -4p(x-h).$$



$$x^2 = 4py.$$

La ecuación con vértice en $V(h,k)$ es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$



$$x^2 = -4py.$$

La ecuación con vértice en $V(h,k)$ es:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k).$$

Reactivos de Ecuación y elementos principales de la parábola

Soluciones: véase la página 276. Desarrollos: véase la página 374

1. La ecuación de la parábola con vértice $V(-3,-1)$ y foco $F(-3,-3)$ es: ______.

   A. $x^2 + 6x + 8y + 17 = 0$

   B. $y^2 + 6y + 8x + 17 = 0$

C. $x^2 - 6x - 8y + 1 = 0$

D. $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$

E. $y^2 - 6y - 8x + 1 = 0$

2. La ecuación de la parábola con vértice $V(-4, -1)$ y foco $F(-4, 2)$ es: ______.

A. $x^2 + 8x + 12y + 28 = 0$

B. $y^2 + 8y - 12x + 4 = 0$

C. $x^2 + 8x - 12y + 1 = 0$

D. $y^2 - 8y + 12x + 28 = 0$

E. $x^2 + 8x - 12y + 4 = 0$

3. La ecuación de la parábola con vértice $V(-3, 3)$ y foco $F(1, 3)$ es: ______.

A. $y^2 - 6y + 6x + 57 = 0$

B. $x^2 - 6x - 16y - 39 = 0$

C. $y^2 - 6y - 16x - 43 = 0$

D. $y^2 - 6y - 16x - 39 = 0$

E. $x^2 - 6x + 6y + 57 = 0$

4. La ecuación de la parábola con vértice $V(1, 3)$ y foco $F(-3, 3)$ es: ______.

A. $y^2 - 6y + 16x - 7 = 0$

B. $x^2 - 6x + 16y - 7 = 0$

C. $y^2 - 6y - 16x + 25 = 0$

D. $y^2 - 6y + 16x + 6 = 0$

E. $x^2 - 6x - 16y + 25 = 0$

5. Sea la parábola $y^2 - 4y + 8x - 20 = 0$. La ecuación de su directriz es: ______.

A. $x = 5$

B. $y = 5$

C. $x = 1$

D. $x = 7$

E. $y = 1$

6. Sea la parábola $x^2 + 6x + 8y + 25 = 0$. Las coordenadas de su foco $F(x, y)$ son: ______.

A. $F(-3, 0)$

B. $F(-1, -2)$

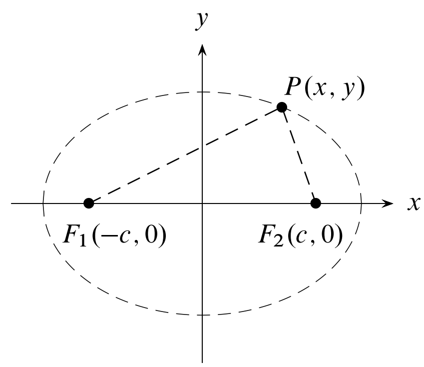
C. $F(-4, 3)$

D. $F(-5, -2)$

E. $F(-3, -4)$

1.5.9 Ecuación y elementos principales de la elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano que cumple la siguiente propiedad: un punto está en la elipse si la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante. Vamos a colocar los dos puntos fijos sobre el eje x, simétricos al origen, es decir, $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$; por comodidad vamos a usar $2a$ como el valor de la constante que es la suma de las distancias. Los puntos F_1, F_2 son denominados focos de la elipse.



Tenemos entonces que $P(x, y)$ es un punto de la elipse si:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a;$$

calculando las distancias correspondientes:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \;\Rightarrow\; \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

elevando al cuadrado (y simplificando):

$$\begin{aligned} x^2+2cx+c^2+y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; 0 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 4cx \;\Rightarrow \\ \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= a^2 - cx; \end{aligned}$$

elevando de nuevo al cuadrado (y de nuevo simplificando):

$$\begin{aligned} a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 &= a^4 - a^2c^2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2); \end{aligned}$$

dividiendo ambos miembros entre $a^2(a^2-c^2)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

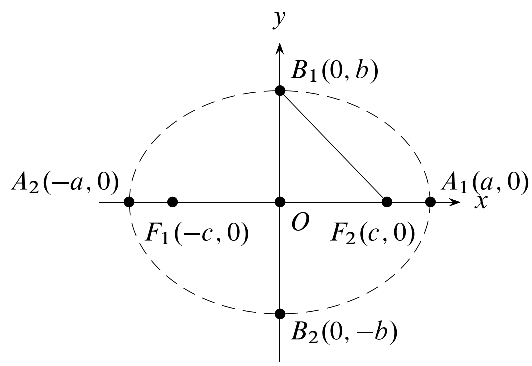
Si definimos $b^2 = a^2 - c^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De lo anterior:

- $b < a$, $c < a$.
- Si $x = 0$, entonces $y = \pm b$.
- Si $y = 0$, entonces $x = \pm a$.

Geométricamente se obtiene que:



Tenemos además que:

- El origen es el centro de la elipse.
- $\overline{A_1A_2}$ es el eje mayor y tiene una longitud $2a$. Los puntos A_1, A_2 son los vértices del eje mayor de la elipse.
- $\overline{B_1B_2}$ es el eje menor y tiene una longitud $2b$. Los puntos B_1, B_2 son los vértices sobre el eje menor de la elipse.
- El triángulo rectángulo $\triangle OB_1F_2$ cumple con la condición:

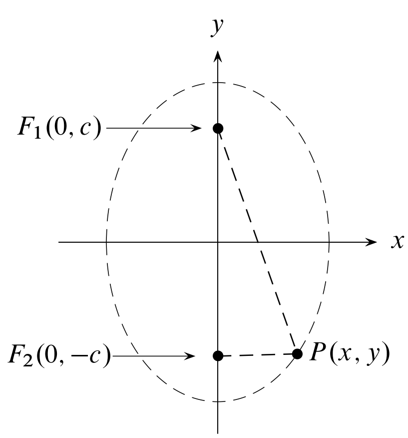
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

- Los focos F_1, F_2 estan sobre el eje mayor.

Si el centro de la elipse se traslada al punto $C(h,k)$, entonces la ecuación cambia a:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Cuando los focos se colocan en el eje y, se obtiene la ecuación a la derecha de la gráfica siguiente:



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Y la ecuación con el centro $C(h,k)$ es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

Reactivos de Ecuación y elementos principales de la elipse

Soluciones: véase la página 276. Desarrollos: véase la página 378

1. Sea la elipse con centro $C(2,3)$; uno de sus focos es $F(3,3)$ y uno de los vértices del eje mayor es $V(5,3)$. La ecuación de la elipse es: ________.

A. $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{8}=1$

B. $\dfrac{(x-2)^2}{8}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

C. $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{1}=1$

D. $\dfrac{(x-2)^2}{1}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

E. $\dfrac{(x-2)^2}{8}+\dfrac{(y-3)^2}{1}=1$

2. Sea la elipse con centro $C(-3,-1)$; uno de sus focos es $F(-3,2)$ y uno de los vértices del eje mayor es $V(-3,5)$. La ecuación de la elipse es: ________.

A. $\dfrac{(x+3)^2}{36}+\dfrac{(y+1)^2}{27}=1$

B. $\dfrac{(x+3)^2}{27}+\dfrac{(y+1)^2}{36}=1$

C. $\dfrac{(x+3)^2}{36}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

D. $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{36}=1$

E. $\dfrac{(x+3)^2}{27}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

3. Sea $4x^2+9y^2-8x-54y+49=0$ la ecuación de una elipse. Las coordenadas de sus dos focos $F_1(x_1,y_1)$ y $F_2(x_2,y_2)$ son: ________.

A. $F_1(3,3)$ & $F_2(-1,3)$

B. $F_1(-2,3)$ & $F_2(6,3)$

C. $F_1(1,3-\sqrt{5})$ & $F_2(1,3+\sqrt{5})$

D. $F_1(1,1)$ & $F_2(1,5)$

E. $F_1(1-\sqrt{5},3)$ & $F_2(1+\sqrt{5},3)$

4. Sea $4x^2+y^2+8x-2y+4=0$ la ecuación de una elipse. Las coordenadas $V_1(x_1,y_1)$ y $V_2(x_2,y_2)$ de los vértices del eje mayor son: ________.

A. $V_1\left(-\dfrac{3}{2},1\right)$ & $V_2\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$

B. $V_1(-2,1)$ & $V_2(0,1)$

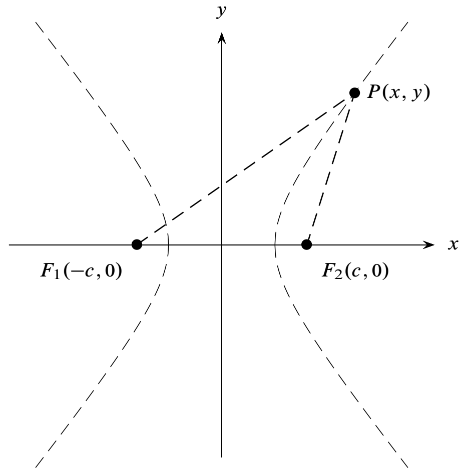
C. $V_1\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ & $V_2\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$

D. $V_1(0,-1)$ & $V_2(0,1)$

E. $V_1(-1,0)$ & $V_2(-1,2)$

1.5.10 Ecuación y elementos principales de la hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano que cumplen la siguiente propiedad: un punto está en la hipérbola si la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante. Vamos a colocar los dos puntos fijos sobre el eje x, simétricos al origen, es decir, $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$; por comodidad vamos a usar $2a$ como el valor de la constante que es la suma de las distancias. Los puntos F_1 y F_2 son denominados focos de la hipérbola.



Tenemos entonces que $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola si:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a;$$

calculando las distancias correspondientes:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \ \Rightarrow\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

elevando al cuadrado y simplificando:

$$\begin{aligned} x^2+2cx+c^2+y^2 &= 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2 \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx-a^2, \end{aligned}$$

elevando de nuevo al cuadrado (y de nuevo simplificando):

$$\begin{aligned} a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) &= c^2x^2-2a^2cx+a^4 \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2x^2+a^4 = a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2); \end{aligned}$$

dividiendo todo entre $a^2(c^2-b^2)$, obtenemos:

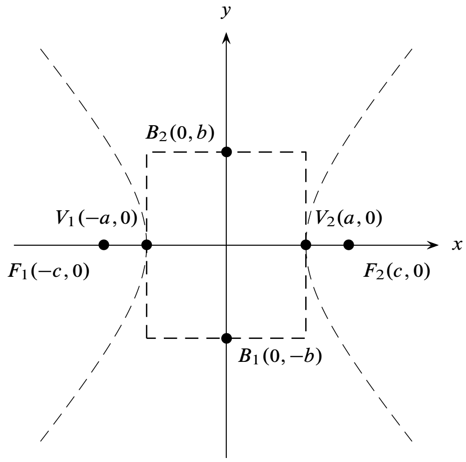
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1.$$

Si definimos $b^2 = c^2-a^2$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De lo anterior:

- $c^2 = a^2+b^2$ & $a < c$.
- Si $y = 0$, entonces $x = \pm a$.



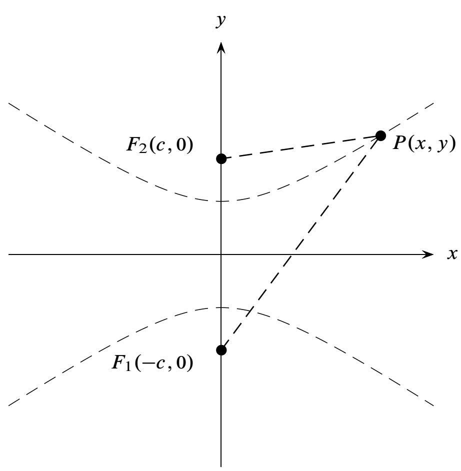
Tenemos además que:

- El origen es el centro de la hipérbola.
- $\overline{V_1V_2}$ es el eje focal y tiene una longitud de $2a$, el cual se encuentra sobre el eje x.
- V_1 y V_2 son los vértices de la hipérbola.
- $\overline{B_1B_2}$ es el eje conjugado y tiene una longitud de $2b$.
- Los focos están sobre el eje focal.

Si el centro de la hipérbola se traslada al punto $C(h,k)$, entonces la ecuación cambia a:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Cuando los focos se colocan en el eje y, se obtiene la ecuación a la derecha de la gráfica siguiente:



$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Y la ecuación con el centro $C(h,k)$ es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

Reactivos de Ecuación y elementos principales de la hipérbola

Soluciones: véase la página 276. Desarrollos: véase la página 382

1. Sea la hipérbola con centro en $C(2,3)$, un vértice en $V(4,3)$ y un foco en $F(7,3)$. La ecuación de la hipérbola es: ______.

   A. $\dfrac{(x-2)^2}{21}-\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$

B. $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{21} = 1$

C. $\dfrac{(y-3)^2}{25} - \dfrac{(x-2)^2}{21} = 1$

D. $\dfrac{(y-3)^2}{4} - \dfrac{(x-2)^2}{21} = 1$

E. $\dfrac{(x-2)^2}{25} - \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

2. Sea la hipérbola con centro en $C(-3,-3)$, un vértice en $V(-3,1)$ y un foco en $F(-3,4)$. La ecuación de la hipérbola es: ________.

A. $\dfrac{(y+3)^2}{16} - \dfrac{(x+3)^2}{33} = 1$

B. $\dfrac{(y+3)^2}{33} - \dfrac{(x+3)^2}{16} = 1$

C. $\dfrac{(x+3)^2}{33} - \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$

D. $\dfrac{(x+3)^2}{16} - \dfrac{(y+3)^2}{49} = 1$

E. $\dfrac{(y+3)^2}{49} - \dfrac{(x+3)^2}{16} = 1$

3. Sea $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ la ecuación de una hipérbola. Las coordenadas $F_1(x_1, y_1)$ y $F_2(x_2, y_2)$ de sus focos son: ________.

A. $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ & $F_2(\sqrt{5}, 0)$

B. $F_1(2, -1-\sqrt{5})$ & $F_2(2, -1+\sqrt{5})$

C. $F_1(1, -1)$ & $F_2(3, -1)$

D. $F_1(2, -3)$ & $F_2(2, 1)$

E. $F_1(2-\sqrt{5}, -1)$ & $F_2(2+\sqrt{5}, -1)$

4. Sea $-4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y - 63 = 0$ la ecuación de una hipérbola. Las coordenadas $V_1(x_1, y_1)$ y $V_2(x_2, y_2)$ de sus vértices son: ____________.

A. $V_1(0, -2)$ & $V_2(0, 2)$

B. $V_1(-5, -1)$ & $V_2(-1, -1)$

C. $V_1(-2, 0)$ & $V_2(2, 0)$

D. $V_1(-3, -4)$ & $V_2(-3, 2)$

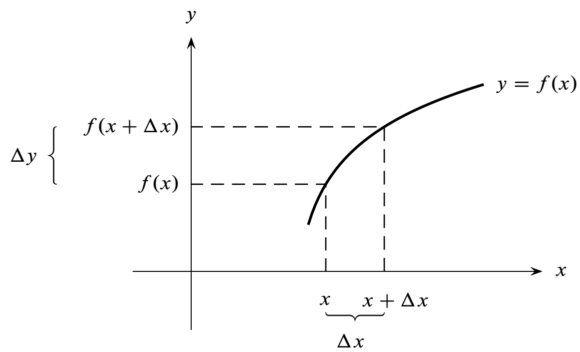
E. $V_1(-3, -3)$ & $V_2(-3, 1)$

1.6 Cálculo diferencial e integral

1.6.1 Derivadas de sumas, productos, cocientes y potencias de funciones

Reglas de derivación

Para una función $y = f(x)$ se definen los siguientes conceptos:



- Δx = incremento de la variable independiente x.
- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ = incremento de la función.
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = razón de incremento.
- La derivada de la función con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

A partir de la definición de la derivada, se obtienen resultados útiles para calcular derivadas de funciones; estos resultados son conocidos como reglas de derivación.

- Derivada de una constante C

  Si $f(x) = C$, entonces:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} C = 0.$$

- Derivada de $f(x) = x^n$

  Si $f(x) = x^n$, donde n es un número racional, entonces:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} x^n = n x^{(n-1)}.$$

  Si $f(x) = x$, entonces $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx} x = \dfrac{d}{dx} x^1 = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1.$

- Derivada de una función $g(x)$ multiplicada por una constante C

  Si $f(x) = Cg(x)$, entonces:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} Cg(x) = C \frac{d}{dx} g(x) = Cg'(x).$$

- Derivada de una suma de funciones

  Si $f(x) = g(x) + h(x) - \phi(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x) + h(x) - \phi(x)] = \frac{d}{dx} g(x) + \frac{d}{dx} h(x) - \frac{d}{dx} \phi(x) = \\ &= g'(x) + h'(x) - \phi'(x). \end{aligned}$$

- Derivada del producto de dos funciones

Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, entonces:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x) \cdot h(x)] = g(x) \cdot \frac{d}{dx} h(x) + h(x) \frac{d}{dx} g(x) = \\ = g(x)h'(x) + h(x)g'(x).$$

- Derivada de un cociente de funciones

Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, entonces:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right] = \frac{h(x)\frac{d}{dx}g(x) - g(x)\frac{d}{dx}h(x)}{[h(x)]^2} \\ = \frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}.$$

- Derivada de una potencia de una función derivable

Si $f(x) = [g(x)]^n$, entonces:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x)]^n = n\, [g(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} g(x) = \\ = n\, [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

Reactivos de Derivadas de sumas, productos, cocientes y potencias de funciones

Soluciones: véase la página 276. Desarrollos: véase la página 385

1. Al derivar la función $f(x) = 5x^3 + \dfrac{15x^2}{2} + 3$, se obtiene: ______.

   A. $f'(x) = 3x^2 + 2x$
   B. $f'(x) = 15x(x+1)$
   C. $f'(x) = 15x(x+2)$
   D. $f'(x) = \dfrac{5}{4}x^4 + \dfrac{5}{2}x^3 + 3x$
   E. $f'(x) = 5x^4 + 15x^3 + 3x$

2. Al derivar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, se obtiene: ______.

   A. $\dfrac{2x}{(x+1)^2}$
   B. $\dfrac{x(x-2)}{(x+1)^2}$
   C. $\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
   D. $\dfrac{x(3x+2)}{(x+1)}$
   E. $\dfrac{3x^2+2x}{(x+1)^2}$

3. Al derivar $y = \sqrt{3x^2 + x}$, se obtiene: ______.

   A. $y' = \dfrac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x}}$

   B. $y' = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}}$

   C. $y' = \dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2+x}}$

   D. $y' = \dfrac{3x}{2\sqrt{6x+1}}$

   E. $y' = \dfrac{\sqrt{3x^2+x}\,(6x+1)}{2}$

4. Al derivar $y = \sqrt{x}(x-2)$, se obtiene: ______.

   A. $y' = \sqrt{x} + \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$

   B. $y' = \dfrac{3x-2}{2\sqrt{x}}$

   C. $y' = \dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$

   D. $y' = \dfrac{-2}{\sqrt{x}}$

   E. $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$

5. La derivada de la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x-1}}$ es: ______.

   A. $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(5x-7)}{2\sqrt[3]{(x-1)2}}$

   B. $f'(x) = \dfrac{5(x+1)^2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^3}}$

   C. $f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2}{2\sqrt{x-1}}$

   D. $f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2}{(x-1)}$

   E. $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(5x-7)}{2\sqrt{(x-1)^3}}$

1.6.2 Integrales inmediatas básicas

Si $f(x)$ y si $g(x)$ son funciones tales que $\dfrac{d}{dx}f(x) = g(x)$, entonces se dice que:

- $g(x)$ es la derivada de $f(x)$.
- $f(x)$ es una antiderivada de $g(x)$.

Además, si C es una constante arbitraria:

- $\dfrac{d}{dx}\{f(x) + C\} = g(x)$, es decir, $g(x)$ es la derivada del conjunto infinito de funciones $\{\, f(x) + C \,\}$.

- $\{f(x) + C\}$ es un conjunto infinito de antiderivadas de $g(x)$.
- Al conjunto infinito $\{f(x)+C,\ \text{con } x \in \mathbb{R}\}$ de antiderivadas de $g(x)$ se le denomina integral indefinida de $g(x)$ y se denota con el símbolo $\int g(x)\,dx$; esto es:

$$\int g(x)\,dx = f(x) + C.$$

- Al símbolo $\int_a^b g(x)\,dx$ se le denomina integral definida de $g(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$; se le define como:

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

donde la diferencia $f(b) - f(a)$ suele denotarse por $[f(x)]_a^b$. Esto es:

$$\int_a^b g(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a).$$

Para resolver integrales inmediatas, es preciso tener en cuenta:

$$\int dx = x + c.$$

$$\int k\ f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx;\ \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx - \int h(x)\,dx.$$

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C;\ \text{con } n \neq -1 \text{ y donde } C \text{ representa la constante de integración.}$$

Y para resolver integrales definidas:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx;\ \text{para cualquier constante } k.$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx.$$

$$\int_a^b k\ dx = k(b-a).$$

$$\int_a^b x^n\ dx = \left.\frac{x^{(n+1)}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{(n+1)}}{n+1} - \frac{a^{(n+1)}}{n+1};\ \text{con } n \neq -1.$$

Reactivos de Integrales inmediatas

Soluciones: véase la página 276. Desarrollos: véase la página 388

1. Al resolver la integral $\int \left(6x^3 + 5x^2 - 2x\right) dx$, obtenemos: ______.

   A. $18x^2 + 10x - 2 + C$

   B. $\frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - x + C$

   C. $18x^3 + 10x^2 - 2x + C$

   D. $\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 1 + C$

E. $\frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - x^2 + C$

2. Al resolver la integral $\int \frac{dx}{x^2}$, obtenemos: ______.

A. $-2x^3 + C$

B. $x + C$

C. $-\frac{1}{x} + C$

D. $\frac{C}{x}$

E. $-\frac{2}{x^3} + C$

3. Al resolver la integral $\int \frac{3x^2 - 2}{\sqrt[2]{x}} dx$, obtenemos: ______.

A. $2\sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + C$

B. $\frac{6\sqrt{x^7}}{7} - 4\sqrt{x} + C$

C. $\frac{7\sqrt{x^6}}{6} - 4\sqrt{x} + C$

D. $3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + C$

E. $\frac{15}{2}\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} + C$

4. Al evaluar la integral $\int_1^3 (x + 3)dx$, se obtiene: ______.

A. 1

B. -10

C. 8

D. 10

E. -1

5. Al evaluar la integral $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$, se obtiene: ______.

A. 3

B. $-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8^5}} - 1\right)$

C. -3

D. 1

E. $-\frac{3}{5\sqrt[3]{8^5}}$

2. Física

2.1 Análisis dimensional

2.1.1 Sistema internacional de unidades (SI)

El SI, primer sistema de unidades esencialmente completo y armonizado internacionalmente, está fundamentado en siete unidades base. Su aplicación en México[9] tiene como propósito establecer un lenguaje común al alcance de todo el país que responda a las exigencias actuales de las actividades científicas, tecnológicas, educativas, industriales y comerciales. El sistema internacional de unidades se puede consultar, por ejemplo, en la siguiente dirección electrónica:

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/unidades/unidades/unidades.htm

Unidades básicas del sistema internacional de unidades (SI)

Magnitud	*Unidad*	*Símbolo*
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Las unidades derivadas se obtienen de las unidades básicas a partir de su definición operativa. *Ejemplos*:

- Unidad de velocidad

  Como $v = \frac{x}{t}$, entonces $[v] = \frac{[\text{longitud}]}{[\text{tiempo}]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- Unidad de aceleración

  Como $a = \frac{v}{t^2}$, entonces $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\frac{[\text{longitud}]}{[\text{tiempo}]}}{[\text{tiempo}]} = \frac{[\text{longitud}]}{[\text{tiempo}]^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- Unidad de fuerza

  Como $F = ma$, entonces $[F] = [\text{masa}][\text{aceleración}] = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$ (newton).

9. Lo referente a la aplicación de unidades de pesos y medidas en México se encuentra en la norma NORMA OFICIAL MEXICANA: NOM 008-SCFI-1993.

Reactivos de Sistema internacional de unidades (SI)

Soluciones: véase la página 276. Desarrollos: véase la página 391

1. La unidad de tiempo y de corriente eléctrica son segundo (s) y ampere (A), respectivamente. Por definición, la carga eléctrica q es la cantidad de corriente eléctrica que circula dentro de un conductor por segundo; su unidad es el coulomb (C), la cual está dada por: ______.

   A. $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$
   B. $\dfrac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m}^2}$
   C. $\dfrac{\mathrm{A\,m}^2}{\mathrm{s}}$
   D. $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}^2}$
   E. $\mathrm{A\,s}$

2. La cantidad de calor Q que recibe un gas es directamente proporcional a su aumento de temperatura ΔT, esto es $Q = C\Delta T$. Si las unidades de medida del calor y de la temperatura son joule (J) y kelvin (K), respectivamente, la unidad de la constante de proporcionalidad C, llamada capacidad calorífica, es: ______.

   A. JK
   B. $\dfrac{\mathrm{Jkg}}{\mathrm{K}}$
   C. $\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$
   D. $\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$
   E. $\dfrac{\mathrm{J\,K}}{\mathrm{kg}}$

2.1.2 Magnitudes físicas. Escalares y vectoriales. Fundamentales y derivadas

Para el desarrollo de la física básica es necesario considerar dos tipos de cantidades:

- Cantidades escalares
- Cantidades vectoriales

Las cantidades escalares se usan para cuantificar conceptos físicos, para los cuales se requiere especificar un número que denote su magnitud (tamaño) y una unidad de medida asociada con el concepto físico. Ejemplo de cantidades escalares son:

Concepto físico	*Ejemplo*	*Cantidad escalar*	*Magnitud*	*Unidad de medida*
Longitud	Estatura h de una persona	$h = 1.8$ m	1.8	m (metro)
Tiempo	Duración de la clase de física	$t = 1.5$ h	1.5	h (hora)
Cantidad de materia	Cantidad de azúcar en un costal	$m = 50$ kg	50	kg (kilogramo)
Temperatura	La temperatura de la atmósfera del salón de clase	$T = 22.6$ °C	22.6	°C (grados celsius)

Estas cantidades, en general, se operan con el álgebra normal. Por *ejemplo*, si la masa de un costal de azúcar es de 50 kg, la masa de dos costales es 50 kg + 50 kg = 100 kg.

Las cantidades vectoriales se usan para cuantificar conceptos físicos, para los cuales se requiere:

Especificar un número que denota su magnitud y una unidad de medida asociada con el concepto físico.

Especificar la dirección y sentido en el espacio donde se describe dicho concepto físico.

Ejemplos de cantidades vectoriales son:

1. Velocidad de un cuerpo.

   "El autobús se desplaza con rapidez de 40 km/h (magnitud de velocidad), sobre la avenida San Pablo (dirección) hacia Azcapotzalco (sentido)".

2. Fuerza aplicada sobre un cuerpo.

   "El peso de un cuerpo de masa 10 kg tiene magnitud de 98 N y actúa sobre la vertical (dirección) hacia el piso (sentido)".

Para describir apropiadamente un vector, se requiere definir un sistema de referencia. Por *ejemplo*, para un espacio de dos dimensiones, es decir un plano, se acostumbra usar un sistema de referencia con ejes cartesianos (perpendiculares, ejes x, y) y coordenados (graduados con la unidad de medida de la magnitud de los vectores).

En ese sistema de referencia se hace una representación gráfica de los vectores por medio de flechas tales que su magnitud es proporcional a la longitud de la flecha y su dirección, y sentido, se describen, con el ángulo que forma la flecha con el eje x positivo medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (ángulo polar del vector).

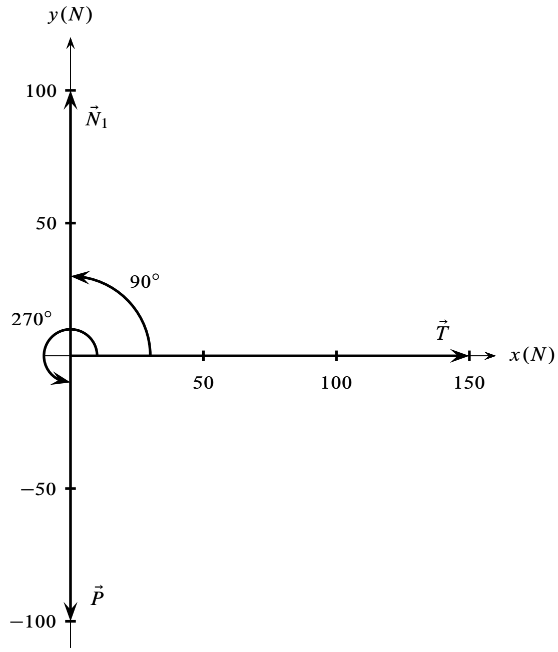
Por *ejemplo*, si sobre un cuerpo actúan las siguientes fuerzas:

$\vec{T}$, tal que $|\vec{T}| = T = 150$ N, en la dirección horizontal hacia la derecha del observador.

$\vec{N}_1$, tal que $|\vec{N}_1| = N_1 = 100$ N, en la dirección vertical hacia arriba del piso.

$\vec{P}$, tal que $|\vec{P}| = P = 100$ N, en la dirección vertical hacia el piso.

La representación gráfica de esos vectores en el sistema de referencia descrito, se muestra en seguida:



Se acostumbra denotar:

$$\vec{T} = \{\,150\,\mathrm{N},\ 0^\circ\,\}\,, \qquad \vec{N}_1 = \{\,100\,\mathrm{N},\ 90^\circ\,\}\,, \qquad \vec{P} = \{\,100\,\mathrm{N},\ 270^\circ\,\}\,,$$

que es la representación polar o gráfica de las fuerzas $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{P}$, las cuales sirven de base para su representación gráfica.

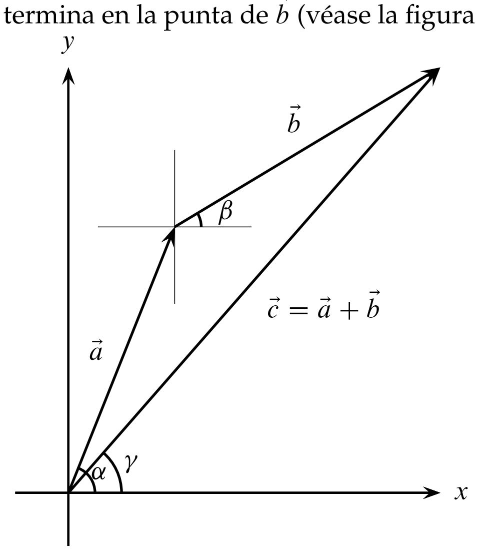
Para desarrollar el álgebra vectorial en la representación gráfica se definen las dos operaciones siguientes:

- Suma de dos vectores

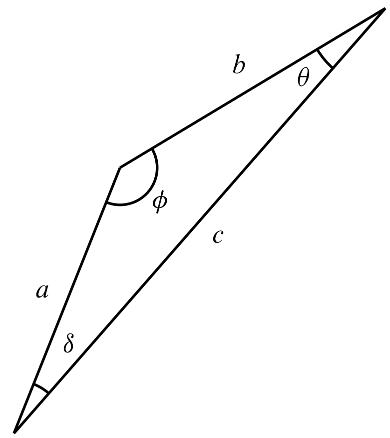
  Dados los vectores $\vec{a} = \{a, \alpha\}$, $\vec{b} = \{b, \beta\}$, la suma de $\vec{a}$, $\vec{b}$ es el vector $\vec{c}$, denotado como:

  $$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

  Entonces, al hacer la representación gráfica de $\vec{b}$ a partir de la punta de $\vec{a}$, el vector $\vec{c}$ es la flecha que inicia en el punto inicial de $\vec{a}$ y termina en la punta de $\vec{b}$ (véase la figura siguiente):



  Con el procedimiento anterior, se genera el triángulo de lados a, b, c mostrado en la figura que sigue y, a partir del cual, se obtienen tanto la magnitud c como la dirección γ del vector suma.



En este triángulo se conocen los lados a, b así como el ángulo $\phi = 180° + \beta - \alpha$ formado entre ellos. Para determinar el valor del lado c se usa la ley de cosenos.[10]

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi}.$$

Aplicando la ley de senos[11] al triángulo anterior con ángulos internos δ, ϕ, θ:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{b}{\operatorname{sen}\delta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\phi};$$

de donde

$$\delta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b\operatorname{sen}\phi}{c}\right).$$

Finalmente, como $\gamma + \delta = \alpha$, la dirección del vector $\vec{c}$ es $\gamma = \alpha - \delta$.

- Multiplicación de un escalar n por un vector $\vec{a}$

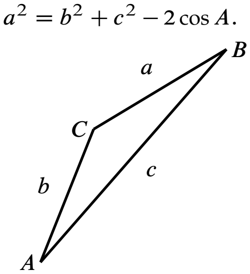
  De esta operación se obtiene un vector $\vec{b}$, denotado $\vec{b} = n\vec{a}$, tal que:

$$\left|\vec{b}\right| = |n|\left|\vec{a}\right|, \qquad \beta = \begin{cases} \alpha & \text{si } n > 0; \\ \alpha + 180° & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

  En la figura siguiente se ilustra esta operación para los casos en que $n = \pm 0.5$; $n = \pm 2$.

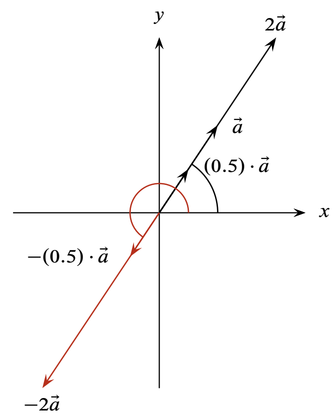
10. Para un triángulo de lados a, b, c y ángulo opuestos a cada uno de los lados A, B, C (véase la figura), la ley de cosenos establece que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cos A.$$



11. La ley de senos (véase la figura que precede) establece que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}.$$



Nótese que cuando el escalar n es negativo, el vector $n\vec{a}$ tiene sentido opuesto al del vector original $\vec{a}$.

Reactivos de Magnitudes físicas. Escalares y vectoriales. Fundamentales y derivadas

Soluciones: véase la página 277. Desarrollos: véase la página 391

1. Un automóvil se desplaza 4 km hacia el norte y enseguida 3 km hacia el este. La magnitud del desplazamiento total entre el punto inicial y el punto final así como la distancia recorrida por el automóvil son: ________.

   A. 5 km, 5 km
   B. 7 km, 7 km
   C. 5 km, 7 km
   D. 7 km, 5 km
   E. 0 km, 12 km

2. Un automóvil se desplaza 4 km hacia el norte y enseguida 3 km hacia el este y finalmente regresa en línea recta al punto inicial. La magnitud del desplazamiento entre el punto inicial y el final así como la distancia recorrida por el automóvil son: ________.

   A. 12 km, 12 km
   B. 12 km, 0 km
   C. 0 km, 0 km
   D. 5 km, 7 km
   E. 0 km, 12 km

2.1.3 Notación científica

En la física se usan cantidades que se miden directamente y otras que se calculan a partir de cantidades medibles. Por ejemplo, para medir la longitud de los lados de un rectángulo, se usa una regla graduada en cm y mm y se determina que su largo es $L = 27.85$ cm y su ancho es $a = 21.55$ cm. Como la regla está graduada hasta mm, en esas cantidades hay completa certidumbre del valor hasta la primera cifra decimal expresada en cm, la segunda cifra decimal es una aproximación aportada por el observador en el proceso de medición. De esta manera se establece que las medidas tienen una "incertidumbre" de ± 0.05 cm $\left(0.05\text{ cm} = \dfrac{1\text{ mm}}{2}\right)$, por lo tanto las cifras significativas para L y para a son:

$$L = 27.8\text{ cm} \qquad \& \qquad a = 21.5\text{ cm}.$$

Con estos valores se calcula el área del rectángulo, que es:

$$A = aL = (21.5\text{ cm})(27.8\text{ cm}) = 597.7\text{ cm}^2.$$

Al hacer la conversión de esas cantidades a m, así como a m^2, encontramos:

$$a = 0.215 \text{ m}, \qquad L = 0.278 \text{ m}, \qquad A = 0.05977 \text{ m}^2.$$

Cuando se trabaja sea con números muy pequeños o muy grandes, se acostumbra expresarlos en términos de potencias de 10. En el ejemplo considerado escribimos:

$$a = 2.15 \times 10^{-1} \text{ m}, \qquad L = 2.78 \times 10^{-1} \text{ m}, \qquad A = 5.977 \times 10^{-2} \text{ m}^2.$$

En el proceso de medición se obtuvieron valores de a, L con tres cifras significativas, las cuales se mantienen al expresarlas en potencias de 10, mientras que en el cálculo de A se obtuvieron cuatro cifras significativas; para ser consistentes, se elimina el último dígito decimal de A y de esta forma se obtiene:

$$a = 2.15 \times 10^{-1} \text{ m}, \qquad L = 2.78 \times 10^{-1} \text{ m}, \qquad A = 5.97 \times 10^{-2}\text{m}^2.$$

Lo anterior se conoce como notación científica de a, L, A.

Reactivos de Notación científica

Soluciones: véase la página 277. Desarrollos: véase la página 392

1. La magnitud de la fuerza eléctrica que ejercen entre sí dos cargas q_1, q_2, separadas una distancia d, está dada por la ecuación:

$$F = K\frac{|q_1||q_2|}{d^2},$$

donde $K = 9 \times 10^9 \dfrac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$ es la constante de Coulomb.

Si $q_1 = 4.0 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = -1.5 \times 10^{-6}$ C, $d = 3.0 \times 10^{-5}$ m, la magnitud de la fuerza eléctrica es: ______.

A. -6×10^7 N
B. 1.8×10^2 N
C. 6×10^7 N
D. 6×10^{-7} N
E. 1.8×10^2 N

2. El año luz es la distancia d que recorre la luz en un tiempo $t = 1$ año, es decir:

$$d = ct,$$

donde $c = 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz.

Considerando que 1 año $= 365$ días, el año luz expresado en metros es igual a: ______.

A. 9.46×10^{13}
B. 3.15×10^{15}
C. 3.15×10^{13}
D. 9.46×10^{15}
E. 3.94×10^{14}

2.1.4 Conversión de unidades

Cualquier cantidad escalar A se expresa como $A = a[\alpha]$, donde a es un número explícito (que denota la magnitud de A) y $[\alpha]$ es el símbolo que denota la unidad de medida del concepto físico relacionado con A. Por *ejemplo*:

- Para una longitud $L = 5$ m, en este caso $a = 5$; $[\alpha] = \text{m}$.
- Para una temperatura $T = 350$ K, en este caso $a = 350$; $[\alpha] = \text{K}$.

De esta forma las cantidades físicas $A = a[\alpha]$ se pueden considerar como si fuesen el producto de dos números a, $[\alpha]$ y su álgebra se desarrolla con las reglas algebraicas de los números reales, observando lo siguiente:

- No incurrir en indefiniciones físicas. Por *ejemplo*, no tienen sentido físico las magnitudes negativas.
- En la suma o resta sólo se puede operar con cantidades asociadas al mismo concepto físico y expresadas en la misma unidad de medida. Por ejemplo para sumar $L_1 = 1.325$ km con $L_2 = 2.2$ km, se puede hacer de las dos formas siguientes:

$$L_1 + L_2 = 1.325 \text{ km} + 2.2 \text{ km} = 3.525 \text{ km}.$$
$$L_1 + L_2 = 1\,325 \text{ m} + 2\,200 \text{ m} = 3\,525 \text{ m}.$$

  Por otra parte, no tendría sentido sumar la estatura $h = 1.8$ m y la masa de $m = 82$ kg de una persona.

- Debe verificarse la consistencia en unidades al establecer ecuaciones entre cantidades físicas.

Reactivos de Conversión de unidades

Soluciones: véase la página 277. Desarrollos: véase la página 393

1. Sabiendo que un corredor de maratón recorre 42 km en 2.3 h, su rapidez promedio es: ________.

   A. 10 m/s
   B. 18 m/s
   C. 5 m/s
   D. 30 m/s
   E. 65 m/s

2. Un medidor de consumo de electricidad marca 150 kWh. Sabiendo que 1 W = 1 J/s, la energía consumida, expresada en joules es ________.

   A. 5.4×10^8 J
   B. 5.4×10^5 J
   C. 3.6×10^6 J
   D. 3.6×10^3 J
   E. 9×10^6 J

3. La rapidez de un corredor olímpico es $v = 10$ m/s. Se sabe que la distancia recorrida d en un tiempo t es $d = vt$. ¿En cuantas horas recorrería 108 km, con esa rapidez? Elige la opción: ________.

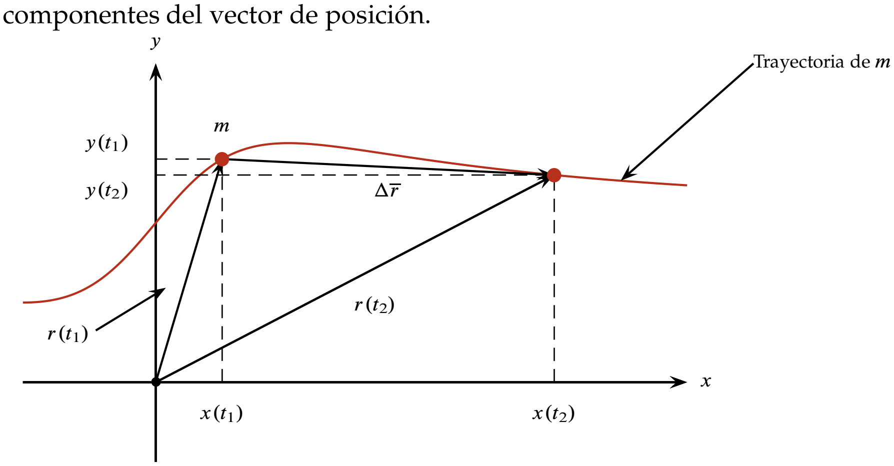
   A. 10.8
   B. 0.33
   C. 3.3
   D. 3
   E. 1.08

2.2 Cinemática

2.2.1 Conceptos de desplazamiento

La cinemática es la rama de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, sin tomar en cuenta las causas del movimiento.
Para el estudio del movimiento de un cuerpo puntual en un plano, se definen los parámetros cinemáticos que son:

1. Vector de posición. Respecto de un sistema de referencia, establecido en el plano de movimiento, la posición de un cuerpo puntual m, al tiempo t, se determina por un vector $\vec{r}$ dado como $\vec{r} = (x, y)$, en donde (x, y) son las componentes del vector de posición.



   Al transcurrir el tiempo cambian las coordenadas (x, y) y así también el vector $\vec{r}$; entonces $\vec{r}$, x, y son funciones del tiempo t las cuales se expresan como $\vec{r}(t)$, $x(t)$, $y(t)$, de tal forma que:

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)].$$

   Al conjunto de todos los puntos $\vec{r}$ dados para todo valor de t, se le llama la trayectoria de m.

2. Vector desplazamiento. Si $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ son diferentes, se dice que m realizó un desplazamiento $\Delta\vec{r}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, dado por:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1);$$
$$\Delta\vec{r} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

3. Velocidad media. Se define la velocidad media de m en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como:

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t};$$
$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{(x_2 - x_1, y_2 - y_1)}{t_2 - t_1} = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\right).$$

4. Velocidad instantánea. Si la posición de m en los tiempos t, $t + \Delta t$ son $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t + \Delta t)$, respectivamente, la velocidad instantánea o simplemente la velocidad de m en el tiempo t se define como:

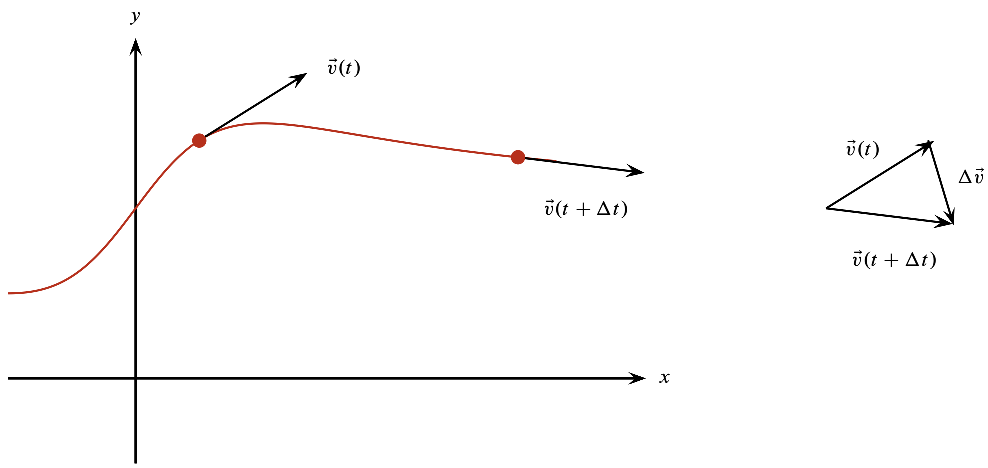
$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

5. Velocidad promedio. Se define como:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo total del recorrido}}.$$

6. Aceleración media. Si las velocidades de m en los tiempos t_1, t_2 son, respectivamente, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, se define la aceleración media de m en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como:

$$\vec{a}_{\text{media}} = \frac{\vec{v}(t_1 + \Delta t) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$



7. Aceleración instantánea. Se define la aceleración instantánea de m en el al tiempo t como:

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Reactivos de Conceptos de desplazamiento

Soluciones: véase la página 277. Desarrollos: véase la página 394

1. Un automóvil se desplaza 400 km hacia el norte y enseguida 300 km hacia el este. Expresado en km, la magnitud del desplazamiento y la distancia total recorrida son: ________ .

   A. 700, 500

   B. 500, 500

   C. 700, 700

   D. 0, 1 200

   E. 500, 700

2. Un automóvil recorre 400 km hacia el norte en 3 h, luego 300 km hacia el este en 2 h. La magnitud de su velocidad media y de su velocidad promedio, expresadas en km/h son: ________ .

   A. 140, 141

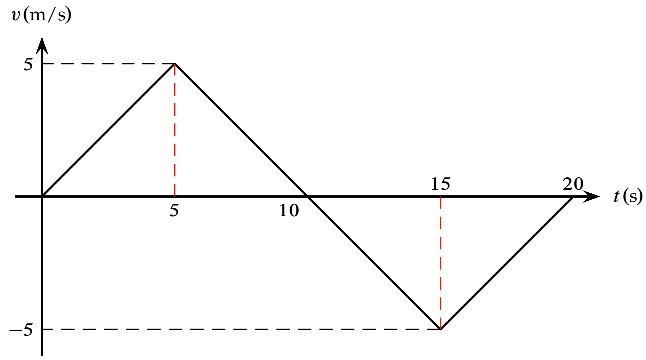
   B. 100, 141

   C. 140, 100

   D. 141, 140

   E. 100, 140

3. La gráfica de velocidad contra tiempo de una partícula en movimiento es:



Por lo tanto, la distancia recorrida y la posición x de la partícula en el tiempo $t = 20$ s, expresadas en metros, son: ______.

A. $0, \;\; 50$

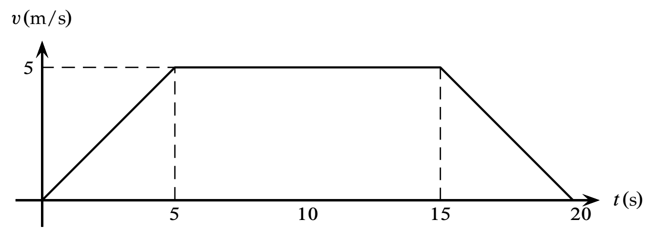
B. $50, 50$

C. $0, \;\; 0$

D. $50, 0$

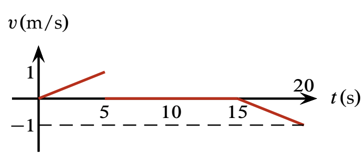
E. $25, 25$

4. La gráfica de velocidad contra tiempo de una partícula en movimiento es:

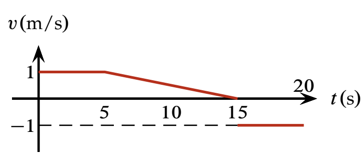


Por lo tanto, la gráfica de aceleración contra el tiempo es: ______.

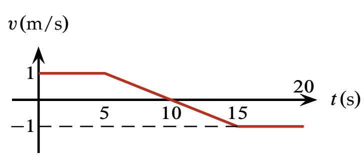
A.



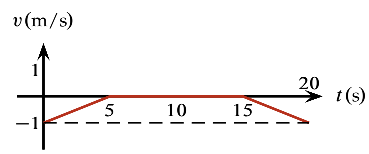
B.



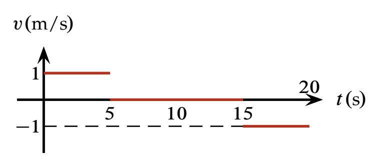
C.



D.



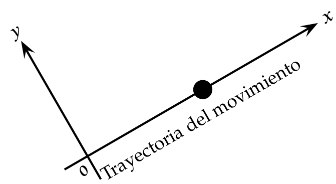
E.

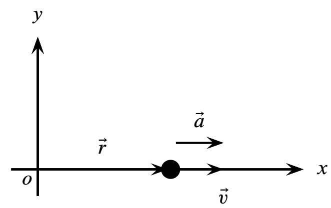


2.2.2 Movimiento rectilíneo: uniforme y acelerado

El movimiento rectilíneo de un cuerpo puntual m es aquel en el cual su trayectoria es una recta.

Es usual considerar un sistema de referencia de tal forma que uno de los ejes, por ejemplo el eje x, coincida con la trayectoria de m.





En este caso, para cualquier tiempo t se tiene:

$$\vec{r} = (x, 0), \qquad \vec{v} = (v, 0), \qquad \vec{a} = (a, 0).$$

Por lo tanto la posición, velocidad y aceleración de m se determinan mediante las ecuaciones:

$$x = x(t), \qquad v(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt}.$$

- El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado se caracteriza porque la aceleración de m es constante para todo valor de t; en este caso:

  $$a = \text{cte}, \qquad v = v_0 + at, \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2;$$

  donde $x_0 = x(t = 0)$, $v_0 = v(t = 0)$ son las llamadas condiciones iniciales de movimiento, que representan la posición y la velocidad inicial, respectivamente.

- En el movimiento rectilíneo uniforme, la aceleración de m es constante e igual a cero para todo valor de t; en este caso:

  $$a = 0, \qquad v = v_0, \qquad x = x_0 + v_0 t.$$

Dos casos particulares del movimiento uniformemente acelerado son la caída libre y el tiro vertical. En ambos, la aceleración constante a es la de la gravedad g.

Reactivos de Movimiento rectilíneo: uniforme y acelerado

Soluciones: véase la página 277. Desarrollos: véase la página 396

1. Una partícula m se desplaza en línea recta; en un instante dado su velocidad es de 12 m/s, y se observa que en un tiempo de 10 s avanza una distancia de 170 m. La aceleración y la velocidad final de m son: ______.

   A. 1 m/s^2, 22 m/s
   B. 3.4 m/s^2, 46 m/s
   C. 3.4 m/s^2, 34 m/s
   D. 1 m/s^2, 10 m/s
   E. 10 m/s^2, 120 m/s

2. Una partícula m describe un movimiento rectilíneo con aceleración $a = 1$ m/s^2 e inicia su movimiento con velocidad inicial $v_0 = 12$ m/s; se observa que en el tiempo t_f recorre la distancia $d = 170$ m y adquiere la velocidad v_f. Los valores de t_f, v_f son: ______.

   A. 10 s, 22 m/s
   B. 14.1 s, 16.1 m/s
   C. 18.4 s, 20.4 m/s

D. 14.1 s, 14.1 m/s
E. 10 s, 10 m/s

3. Una partícula m se lanza desde el piso, verticalmente hacia arriba, con una rapidez de $v_0 = 20$ m/s , bajo la acción de la gravedad ($g = 10$ m/s^2). La máxima altura H que alcanza m y el tiempo t_f que tarda en regresar al piso son: ________.

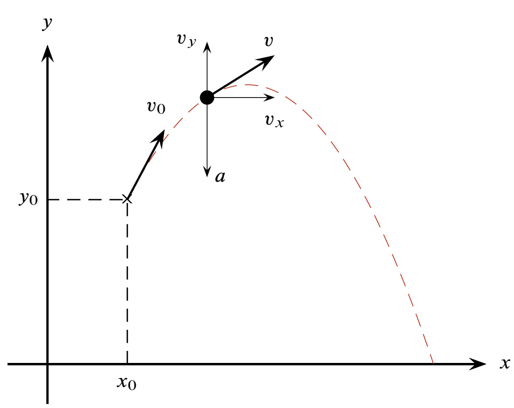
A. 40 m, 4 s
B. 20 m, 2 s
C. 40 m, 2 s
D. 20 m, 4 s
E. 40 m, 6 s

4. Se deja caer ($v_0 = 0$ m/s) desde una altura $h = 20$ m una pelota y, en el mismo instante, se dispara sobre el piso una canica con velocidad constante $u = 15$ m/s. El tiempo que tarda la pelota en llegar al piso y la distancia recorrida por la canica en el mismo tiempo son: ________.
(Considera que $g = 10$ m/s^2).

A. 4 s, 60 m
B. 1.5 s, 22.7 m
C. 1.3 s, 20 m
D. 2 s, 15 m
E. 2 s, 30 m

2.2.3 Movimiento bidimensional: circular y tiro parabólico

El tiro parabólico es el movimiento que describe un cuerpo puntual m sobre el cual sólo actúa la fuerza de gravedad uniforme de la Tierra, la cual produce una aceleración de magnitud constante $a = g = 9.8$ m/s^2, dirigida verticalmente hacia la superficie de la Tierra. En este caso resulta conveniente tomar un sistema de referencia donde el eje y se alinea con la vertical terrestre; esto es:

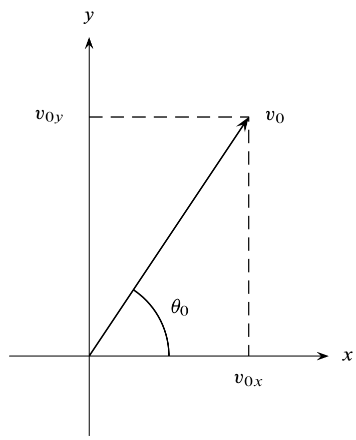


$$a_x = 0, \qquad v_x = v_{0x}, \qquad x = x_0 + v_{0x}t$$
$$a_y = -g, \qquad v_y = v_{0y} - gt, \qquad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

En términos de la velocidad y ángulo de disparo, $v_0,\ \theta_0$:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0, \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0,$$

donde:



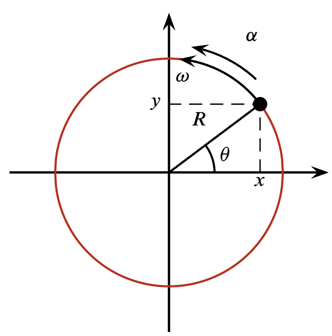
Cuando $\theta_0 = 90°$ o bien $\theta_0 = 270°$, se obtiene el tiro vertical o la caída libre mencionados anteriormente, en este caso:

$$a_x = 0, \qquad v_x = 0, \qquad x = x_0,$$
$$a_y = -g, \qquad v_y = v_0 - gt, \qquad y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Tomando el sistema de referencia tal que $x_0 = 0$, el movimiento de caída libre de m queda descrito por las siguientes funciones:

$$a_y = -g, \qquad v_y = v_0 - gt, \qquad y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

El movimiento circular de un cuerpo puntual m es aquel cuya trayectoria es una circunferencia. En este caso es conveniente tomar un sistema de referencia en el que la trayectoria de m quede contenida en el plano xy y su origen coincida con el centro de la circunferencia.

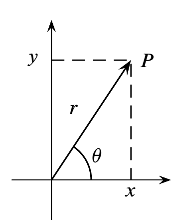


También se acostumbra usar coordendas polares $(r,\ \theta)$[12] para especificar la posición de m en cualquier tiempo t. Las relaciones entre las coordenadas polares y las cartesianas están dadas por:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x}; \end{aligned}\right.$$

12. Las relaciones entre las coordenadas polares (r, θ) y las cartesianas (x, y) son:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$



donde $R = \text{cte}$ y donde θ se mide en radianes. Por lo tanto, dado el radio R de la trayectoria, la posición de m se determina por el valor de θ en cualquier tiempo t, es decir:

$$\theta = \theta(t).$$

Se definen la velocidad angular w y la aceleración angular α al tiempo t, como:

$$w = w(t) = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \alpha = \alpha(t) = \frac{dw}{dt}.$$

Las relaciones estre las variables angulares y las variables lineales son:

Para la rapidez: $v = Rw$.

Para la aceleración se observan dos componentes:

Aceleración radial o centrípeta: $a_R = Rw^2 = \dfrac{v^2}{R}$.

Aceleración tangencial: $a_T = R\alpha$.
En el caso en que $\alpha = \text{cte}$:

$$w = w_0 + \alpha t, \qquad \theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,$$

donde $\theta_0 = \theta(0)$, $w_0 = w(0)$ son las condiciones iniciales de movimiento, es decir, posición inicial y velocidad angular inicial.

Cuando $\alpha = \text{cte} = 0\ \text{rad/s}^2$, se le llama movimiento circular uniforme, para el cual:

$$w = w_0, \qquad \theta = \theta_0 + w_0 t.$$

Para este movimiento se definen dos parámetros:

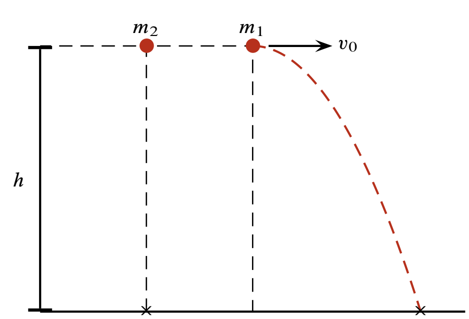
Periodo del movimiento: $T = \dfrac{2\pi}{w} = \dfrac{2\pi R}{v}$, que es el tiempo que tarda m en dar una vuelta.

Frecuencia del movimiento: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{w}{2\pi} = \dfrac{v}{2\pi R}$, que es el número de vueltas que da m por unidad de tiempo.

Reactivos de Movimiento bidimensional: circular y tiro parabólico

Soluciones: véase la página 277. Desarrollos: véase la página 397

1. Se dispara una partícula m_1 y al mismo tiempo se deja caer otra partícula m_2, como se muestra en la siguiente figura:

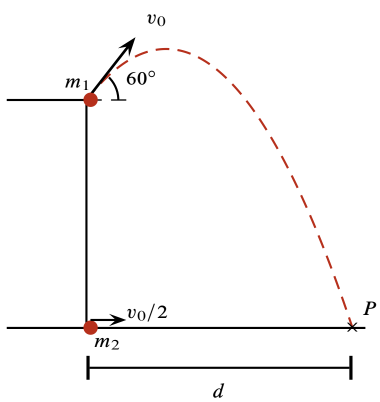


El tiempo que m_2 tarda en llegar al suelo, en relación con el tiempo en que m_1 tarda en llegar al suelo es: ________.

A. La mitad
B. El mismo
C. El doble
D. Mayor
E. Menor

2. Se disparan dos partículas m_1, m_2 al mismo tiempo (m_2 se mueve con velocidad constante), como se muestra en la siguiente figura:

(m_2 se mueve con velocidad constante).



El tiempo que tarda m_2 en llegar al punto P, en relación con el tiempo en que m_1 tarda en llegar a ese punto es: ________.

A. La mitad
B. El doble
C. Mayor
D. Menor
E. El mismo

3. Una persona se coloca en la orilla de un carrousel cuyo radio es $R = 3.5$ m. Para que la aceleración centrípeta de la persona sea 14 m/s^2, la rapidez angular del carrousel expresada en rad/s, es: ________.

A. 7
B. 49
C. 4
D. 2
E. 8

4. La velocidad angular de un carrousel es de 8 rad/s, por lo tanto su periodo y frecuencia de rotación son, respectivamente: ________.

A. 0.25 s, 4 vueltas/s
B. 0.5π s, $\frac{2}{\pi}$ vueltas/s
C. 0.25π s, $\frac{4}{\pi}$ vueltas/s
D. 0.5 s, 2 vueltas/s
E. 0.125 s, 8 vueltas/s

2.3 Dinámica

2.3.1 Conceptos de inercia y fuerza. Leyes de Newton

Las leyes de Newton explican el comportamiento de los cuerpos materiales en lo referente a su movimiento. Su deducción y verificación es empírica, es decir, se obtienen directamente con la experimentación:

1. Primera ley de Newton. Existen sistemas de referencia, llamados inerciales, en los cuales se observa que un cuerpo puntual mantiene su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, a menos que otro cuerpo interactúe con él.

   De la primera ley se infieren los dos conceptos siguientes:

   A. Concepto de inercia. Es la propiedad que tienen los cuerpos materiales de mantener su estado de movimiento o de reposo.

   B. Definición de masa. Es el parámetro físico que cuantifica la inercia de un cuerpo. Es una cantidad escalar cuya unidad de medida, en el SI, es el kilogramo (kg). También la masa:
      - Determina la propiedad gravitatoria de la materia.
      - Mide la cantidad de materia de los cuerpos.
      - Establece la equivalencia de la energía y la materia.

   C. Concepto de fuerza. Es el parámetro físico que cuantifica la interacción entre los cuerpos capaz de modificar su estado de movimiento. Es una cantidad vectorial y su definición operativa se determina con la segunda ley de Newton.

2. Segunda ley de Newton.

   Si a una partícula de masa m, que se mueve con velocidad $\vec{v}_1$, se le aplica una fuerza $\vec{F}$ durante un tiempo Δt, se observa que m sufre un cambio de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, dado por:

$$\Delta\vec{v} = \frac{\Delta t}{m}\vec{F}.$$

   Es decir:

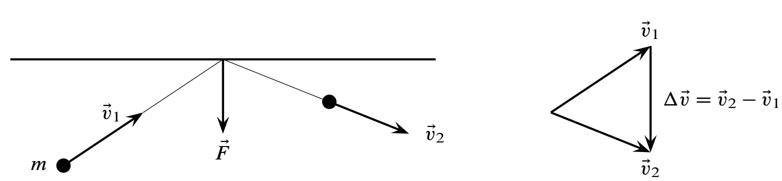
$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

   Considerando que

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

   es la aceleración de m:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$



De la segunda ley de Newton, la magnitud de la fuerza aplicada es:

$$F = m\frac{|\,\Delta\vec{v}\,|}{\Delta t};$$

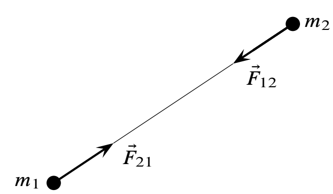
por lo tanto las unidades de F son:

$$[F] = [m]\frac{[|\,\Delta v\,|]}{[\Delta t]} = \text{kg}\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N (newton)}.$$

3. Tercera ley de Newton.

   Si una partícula m_1 ejerce una fuerza $\vec{F}_{12}$ sobre otra partícula m_2, entonces m_2 ejerce sobre m_1 una fuerza $\vec{F}_{21}$ dada por:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$



Reactivos de Conceptos de inercia y fuerza. Leyes de Newton

Soluciones: véase la página 277. Desarrollos: véase la página 399

1. Completa el siguiente enunciado:

   La _______ es la propiedad de los cuerpos materiales de conservar su estado de _______ o de movimiento _______ .

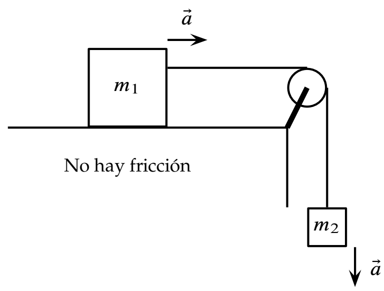
   A. Inercia, reposo, uniformemente acelerado
   B. Masa, equilibrio, uniformemente acelerado
   C. Inercia, reposo, rectilíneo uniforme
   D. Masa, reposo, rectilíneo uniforme
   E. Inercia, equilibrio, circular uniforme

2. Relaciona las dos columnas. Elige la opción correspondiente: _______ .

1. mgh	a. Primera ley de Newton
2. Ley de inercia	b. Segunda ley de Newton
3. $\frac{1}{2}mv^2$	c. Tercera ley de Newton
4. Acción-reacción	d. Trabajo
5. $\vec{F} = m\vec{a}$	e. Potencia
6. $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$	f. Energía potencial
7. $\frac{W}{t}$	g. Energía cinética

A. 1-e, 2-c, 3-g, 4-a, 5-b, 6-f, 7-d
B. 1-a, 2-b, 3-c, 4-d, 5-e, 6-f, 7-g
C. 1-f, 2-a, 3-g, 4-c, 5-b, 6-d, 7-e
D. 1-f, 2-a, 3-e, 4-c, 5-b, 6-d, 7-g
E. 1-e, 2-a, 3-g, 4-c, 5-b, 6-d, 7-f

3. En el sistema mostrado en la siguiente figura, considera $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 2$ kg, $g = 10$ m/s^2.



La magnitud de la aceleración de los bloques es: ______.

A. 0 m/s^2
B. 2 m/s^2
C. 10 m/s^2
D. 3.3 m/s^2
E. 1.6 m/s^2

4. Una fueza de magnitud F produce una aceleración a_1 sobre un cuerpo de masa m_1. Si se triplica la masa del cuerpo, bajo la acción de la misma fuerza, su aceleración, respecto de a_1 es: ______.

A. Se triplica
B. Disminuye a la tercera parte
C. Se mantiene igual
D. Aumenta
E. Disminuye a la mitad

5. Completa la siguiente afirmación:

La aceleración que produce la fuerza de gravedad $F_1 = m_1 g$ sobre un cuerpo de masa m_1 es ______ que la aceleración que produce la fuerza de gravedad sobre un cuerpo del doble de masa.

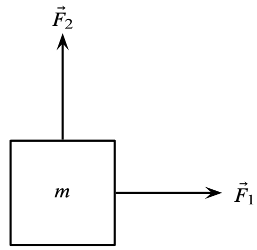
A. El doble
B. La mitad
C. Igual
D. Diferente
E. Mayor

6. Un automóvil de masa $m = 1\,000$ kg, a partir del reposo, adquiere la velocidad de 30 m/s en 10 s. La magnitud de la aceleración de m y la de la fuerza aplicada sobre m son: ______.

A. 3 m/s^2, 3 000 N

B. $9.8\ \mathrm{m/s^2}$, $9\,800\ \mathrm{N}$
C. $30\ \mathrm{m/s^2}$, $30\,000\ \mathrm{N}$
D. $3.3\ \mathrm{m/s^2}$, $3\,300\ \mathrm{N}$
E. $33\ \mathrm{m/s^2}$, $33\,000\ \mathrm{N}$

7. Sobre un cuerpo de masa $m = 10$ kg se ejercen las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (véase la siguiente figura):



Considerando que $\vec{F}_1 = 40$ N, $\vec{F}_2 = 30$ N, la magnitud de la aceleración de m es: ________.

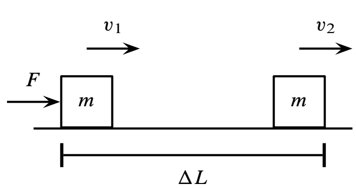
A. $7\ \mathrm{m/s^2}$
B. $1\ \mathrm{m/s^2}$
C. $50\ \mathrm{m/s^2}$
D. $5\ \mathrm{m/s^2}$
E. $70\ \mathrm{m/s^2}$

2.3.2 Conceptos de energía cinética, energía potencial, trabajo y potencia

Otra forma de expresar la segunda ley de Newton es la siguiente:

$$F \cdot \Delta L = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Donde F es la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa m que realiza un desplazamiento de magnitud ΔL; v_1, v_2 son la velocidad inicial y final de m en el desplazamiento ΔL.



A la cantidad $W = F\Delta L$ se le llama el trabajo realizado por F sobre m.

A la cantidad $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ se le llama la energía cinética de m cuando su velocidad es v.

Luego, la segunda ley de Newton se puede expresar como:

$$W = \Delta E_c,$$

donde ΔE_c es el cambio de la energía cinética. A esta igualdad se le llama el teorema del trabajo y la energía cinética.

Si la fuerza F realiza un trabajo $W = F\Delta L$ durante un tiempo Δt, se define la potencia de la fuerza F como:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = F\frac{\Delta L}{\Delta t} = Fv,$$

donde $v = \dfrac{\Delta L}{\Delta t}$ es la velocidad de m.

Las unidades del trabajo y la potencia son:

$$[W] = [F][\Delta L] = \text{Nm} = \text{J (joule)}.$$
$$[P] = \frac{[W]}{[\Delta t]} = \frac{\text{J}}{\text{s}}\text{W} = \text{ (watt)}.$$

Para un cuerpo de masa m que describe un movimiento de caída libre bajo la acción de la fuerza de gravedad terrestre, el trabajo realizado por esa fuerza cuando m cambia su altura de h_1 a h_2 es:

$$W = mgh_1 - mgh_2;$$

donde $g = 9.8\ \text{m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad terrestre.

A la cantidad: $E_p = mgh$ se le llama la energía potencial de m a la altura h, por lo tanto:

$$W = E_{p1} - E_{p2}, \text{ donde } E_{p1} = mgh_1,\ E_{p2} = mgh_2.$$

Reactivos de Conceptos de energía cinética, energía potencial, trabajo y potencia

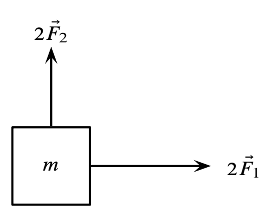
Soluciones: véase la página 278. Desarrollos: véase la página 401

1. Complete el siguiente enunciado:

   La ______ cuantifica la inercia de un cuerpo, mientras que la ______ cuantifica la interacción entre los cuerpos capaz de modificar su estado de movimiento.

   A. Masa, energía
   B. Velocidad, fuerza
   C. Aceleración, energía
   D. Masa, fuerza
   E. Velocidad, energía

2. Sobre un cuerpo actúan las fuerzas mostradas en la siguiente figura.



   Si $F_1 = 4$ N y si $F_2 = 3$ N, la fuerza resultante $\vec{F}_R = 2\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2$ tiene magnitud: ______.

   A. 7 N
   B. 14 N
   C. 5 N

D. 28 N

E. 10 N

3. La energía cinética de un cuerpo es $E_c = \frac{1}{2}mv^2$; si la masa se cuadriplica, para que la energía cinética sea la misma, su velocidad debe: ________.

A. Disminuir a la cuarta parte

B. Mantenerse constante

C. Aumentar al doble

D. Disminuir a la mitad

E. Aumentar cuatro veces

4. La energía potencial de gravedad de un cuerpo de masa m es $E_p = mgh$, donde h es la altura del cuerpo respecto del piso y donde $g = 10$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad. Para un cuerpo de masa 5 kg que cambia su altura de $h_1 = 10$ m a $h_2 = 5$ m, el cambio de su energía potencial de gravedad es: ________.

A. 250 J

B. −250 J

C. 750 J

D. 500 J

E. 0 J

5. Una fuerza de magnitud 100 N desplaza 15 m a un cuerpo en un tiempo de 20 s; el trabajo realizado y la potencia de la fuerza son: ________.

A. 30 000 J, 1 500 W

B. 2 000 J, 133 W

C. 5 J, 75 W

D. 1 500 J, 30 000 W

E. 1 500 J, 75 W

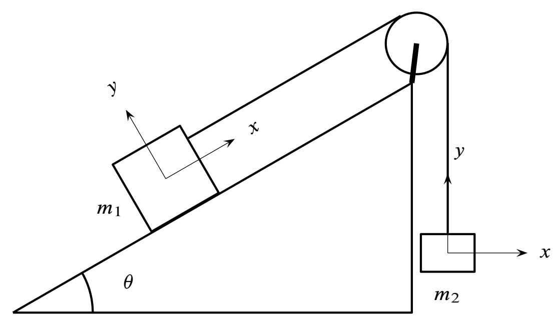
2.4 Estática

2.4.1 Diagrama de cuerpo libre

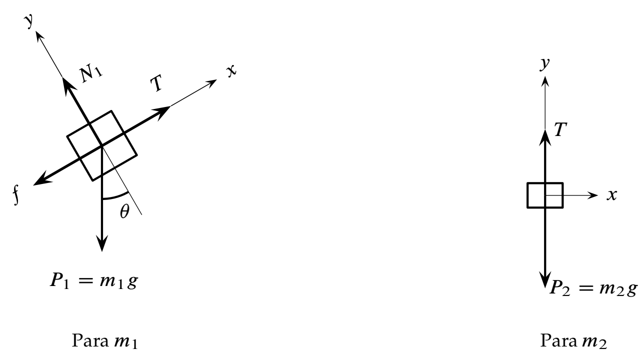
El diagrama de cuerpo libre es la representación gráfica de todas las fuerzas que ejercen otros objetos sobre el cuerpo de interés.

Se consideran dos tipos de cuerpos, a saber, el cuerpo puntual y el cuerpo extendido.

En un cuerpo puntual se considera que las fuerzas aplicadas se concentran en un punto. En este caso las fuerzas se dibujan sobre un sistema coordenado xy. Por ejemplo, el diagrama de cuerpo libre para m_1, m_2, considerados como cuerpos puntuales, del sistema mostrado en la siguiente figura:



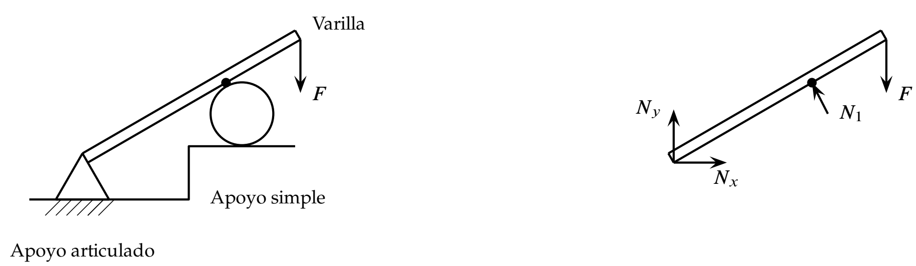
son:



Donde

- T es la magnitud de la tensión de la cuerda que une a m_1, m_2.
- N_1, f son la fuerza de contacto (o fuerza normal) y la fuerza de fricción que el plano inclinado ejerce sobre m_1, considerando que se mueve hacia arriba sobre la superficie inclinada áspera.

Un cuerpo extendido es aquel en el que es importante el punto de aplicación de las fuerzas actuantes. Por *ejemplo*, el diagrama de cuerpo libre para la varilla mostrada se encuentra a la derecha en la siguiente figura:



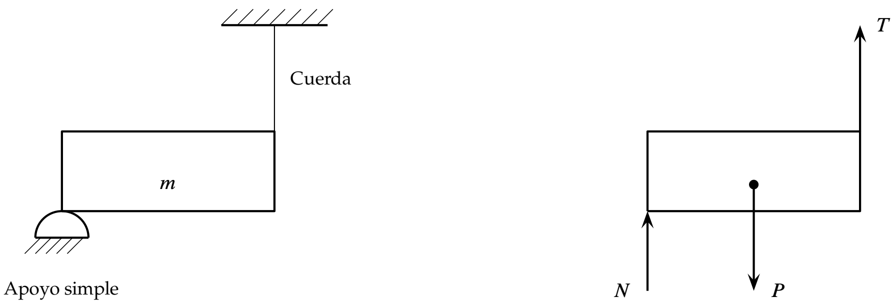
Donde

- F es la fuerza aplicada externamente.
- N_1 es la fuerza que el apoyo simple ejerce sobre la varilla.
- N_x, N_y son las componentes horizontal y vertical, respectivamente, que el apoyo articulado ejerce sobre la varilla.

Los apoyos son dispositivos a través de los cuales dos cuerpos pueden interaccionar al establecer contacto.

Apoyo simple

Si un cuerpo m interacciona con otro a través de un apoyo simple, sobre m se ejerce una fuerza perpendicular a la superficie de m en el punto de contacto, en el sentido del apoyo hacia m. Su magnitud la determina la acción de otras fuerzas.

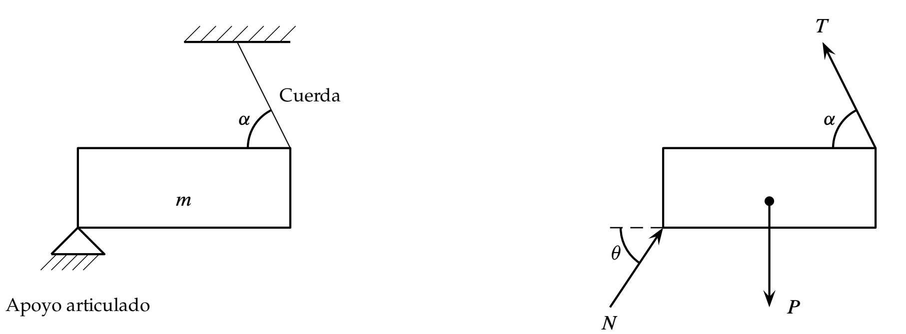


Donde

- T es la tensión de la cuerda.
- P peso del cuerpo m.
- N el la fuerza ejercida por el apoyo simple.

Apoyo articulado

Si un cuerpo m interactúa con otro a través de un apoyo articulado, sobre m se ejerce una fuerza cuya magnitud, dirección y sentido no se conocen; se determinan por la acción de otra fuerzas.



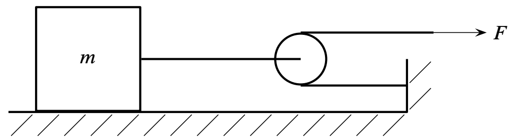
Donde

- T es la tensión de la cuerda.
- P es el peso del cuerpo m.
- N el la fuerza ejercida por el apoyo articulado.

Reactivos de Diagrama de cuerpo libre

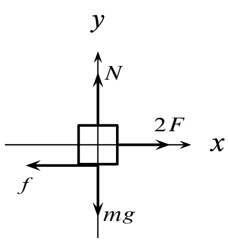
Soluciones: véase la página 278. Desarrollos: véase la página 403

1. Considera el siguiente sistema de un bloque que se desliza sobre una superficie con fricción en el que F se aplica en el extremo libre de una cuerda que pasa por la polea.

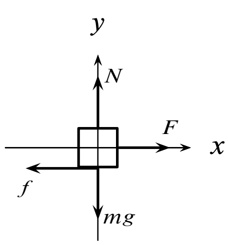


El diagrama de cuerpo libre para el bloque es: ________.

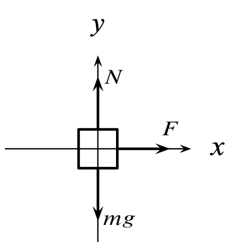
A.



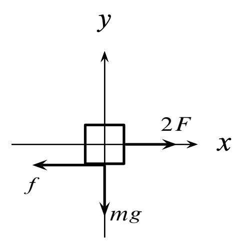
B.



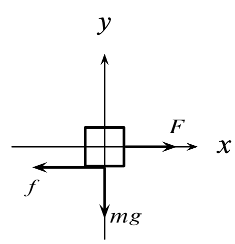
C.



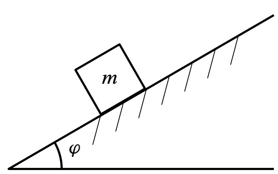
D.



E.

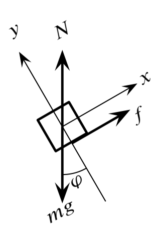


2. Para el bloque que se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado con fricción, como se muestra en la siguiente figura,

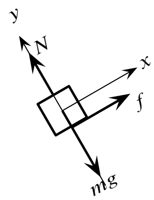


el diagrama de cuerpo libre es: ________.

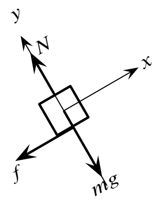
A.



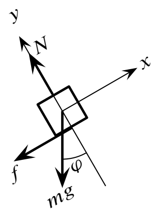
B.



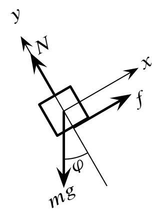
D.



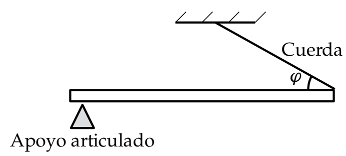
C.



E.

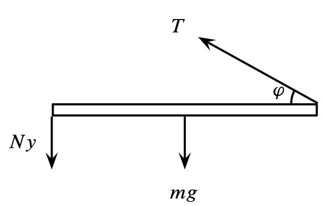


3. Para la viga de masa m que se muestra en la siguiente figura,

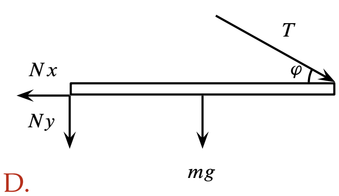


su diagrama de cuerpo libre es: ________.

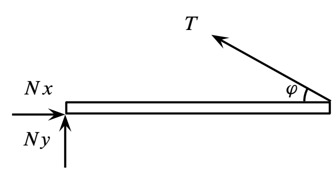
A.



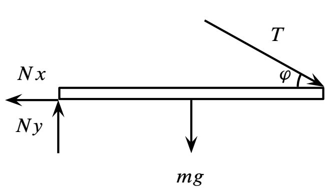
C.



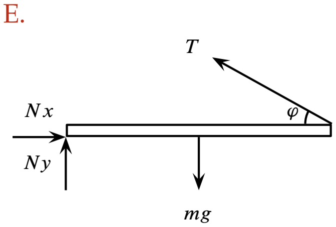
D.



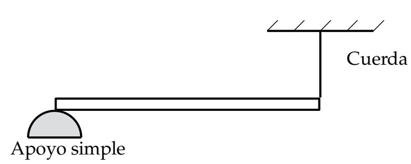
B.



E.

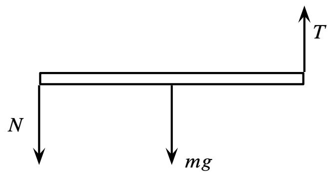


4. Para la viga de masa m que se muestra en la siguiente figura,

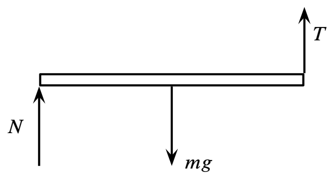


su diagrama de cuerpo libre es: ________.

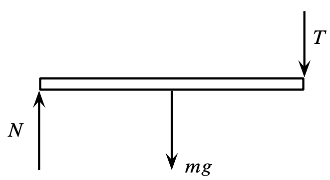
A.



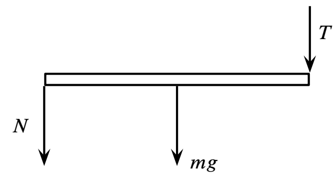
B.



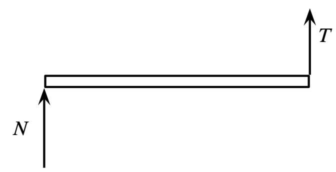
C.



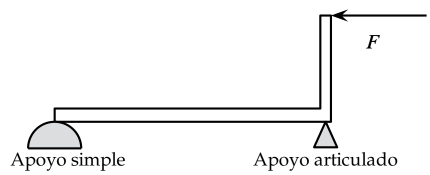
D.



E.

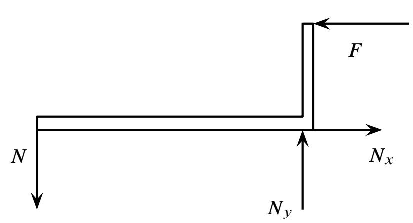


5. Para la estructura en L de masa despreciable que se muestra en la siguiente figura,

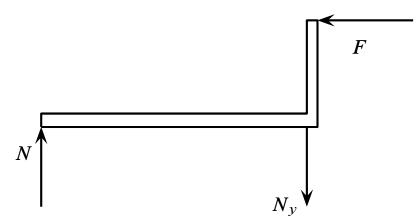


su diagrama de cuerpo libre es: ________.

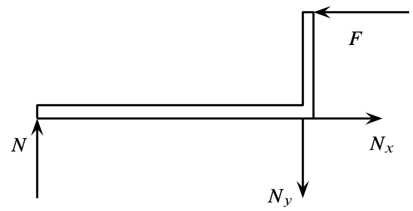
A.



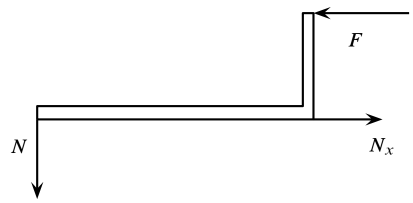
B.



C.

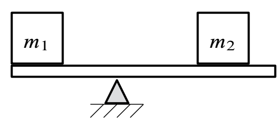


D.



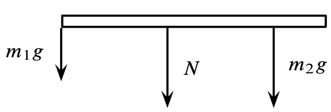
E.

6. Para el brazo de la balanza que se muestra en la siguiente figura,

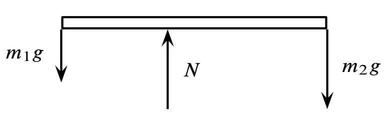


su diagrama de cuerpo libre es: ______.

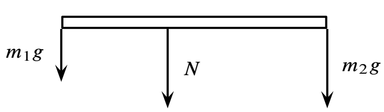
A.



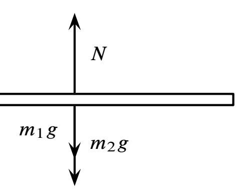
B.



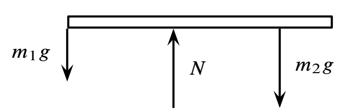
C.



D.



E.



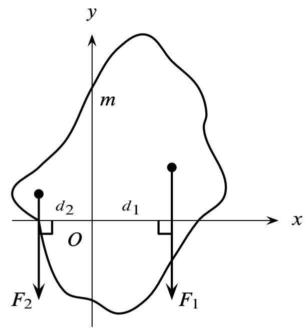
2.4.2 Equilibrio, momento de una fuerza y centro de gravedad

Equilibrio de un cuerpo puntual

Si sobre un cuerpo puntual m actúan las fuerzas $F_1, F_2, \cdots, F_N$, la condición de equilibrio es:

$$\sum F = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 + \cdots + F_N = 0.$$

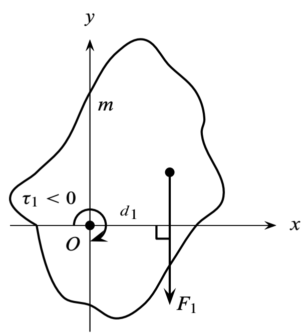
Si sobre un cuerpo extendido de masa m actúa un conjunto de fuerzas coplanares,[13] por ejemplo, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (véase la siguiente figura):

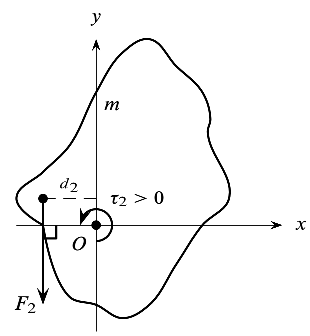


Entonces, el momento o torca de cada fuerza respecto del punto O se define como:

$$\tau_1 = -F_1 d_1, \qquad \tau_2 = F_2 d_2;$$

donde F_1, F_2 son las magnitudes de las fuerzas y d_1, d_2 son las distancias perpendicularres del punto O a la línea de acción de F_1, F_2. A d_1, d_2 se les llama brazos de palanca de F_1, F_2 respecto de O. El momento de F_1 se considera negativo porque F_1 produce un rotación de m_1 alrededor de un eje perpendicular al plano que pasa por O, en el sentido de las manecillas del reloj; mientras que el momento de F_2 se considera positivo porque produce una rotación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, respecto del eje descrito que pasa por O (véanse las figuras):

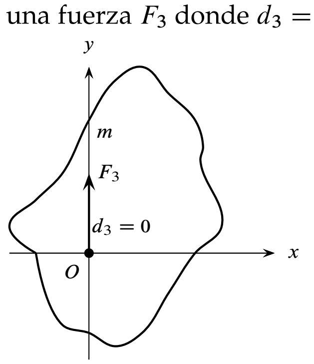




El momento o torca total τ que actúa sobre m respecto del eje perpendicular al plano de la figura que pasa por O es:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = -F_1 d_1 + F_2 d_2.$$

Observa que, para una fuerza F_3 donde $d_3 = 0$, su momento es cero, es decir:

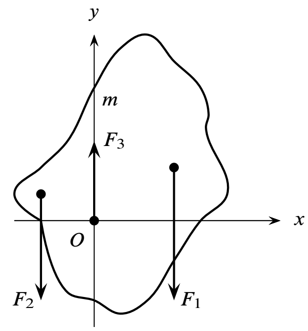


$$\tau_3 = F_3 d_3 = F_3(0) = 0.$$

13. Dos o más fuerzas son coplanares cuando están contenidas en un mismo plano.

Equilibrio de un cuerpo extendido

Si sobre el cuerpo m actúan las fuerzas F_1, F_2, F_3 como se muestra, se dice que se encuentra en equilibrio cuando:



$$\sum F = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 + F_3 = 0;$$
$$\sum \tau = 0 \Rightarrow \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

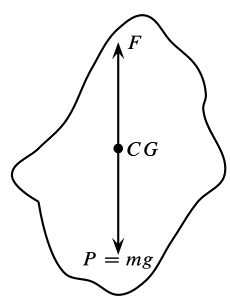
En el caso ejemplificado en la figura, observamos lo siguiente:

$$\sum F = 0 \Rightarrow -F_1 - F_2 + F_3 = 0;$$
$$\sum \tau = 0 \Rightarrow -F_1 d_1 + F_2 d_2 = 0.$$

Para un cuerpo extendido de masa m se definen:

1. Centro de gravedad

   Es el punto del espacio (CG) donde se considera concentrado el peso del cuerpo, por lo tanto una fuerza F aplicada en ese punto puede equilibrar el peso $P = mg$ del cuerpo.

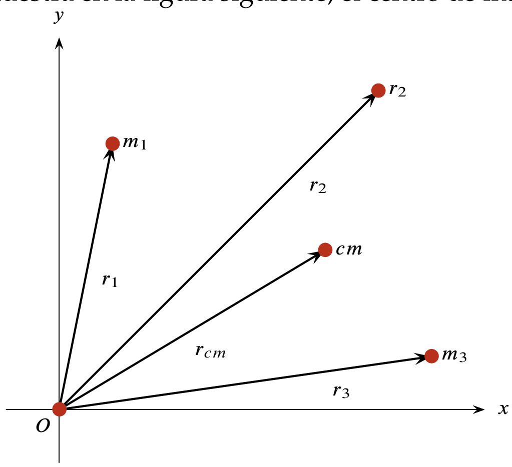


2. Centro de masa

   Es el punto del espacio (cm) donde se considera concentrada la masa del cuerpo.

   Para un campo de gravedad uniforme, el centro de masa y el centro de gravedad de un cuerpo coinciden.

   Si se tiene un conjunto de tres partículas de masas m_1, m_2, m_3, colocadas en los puntos r_1, r_2, r_3, como se muestra en la figura siguiente, el centro de masa de ese conjunto es:



$$r_{cm} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Reactivos de Equilibrio, momento de una fuerza y centro de gravedad

Soluciones: véase la página 278. Desarrollos: véase la página 408

1. Complete la siguiente definición:

   Un cuerpo puntual se encuentra en equilibrio cuando la ______ es ______ .

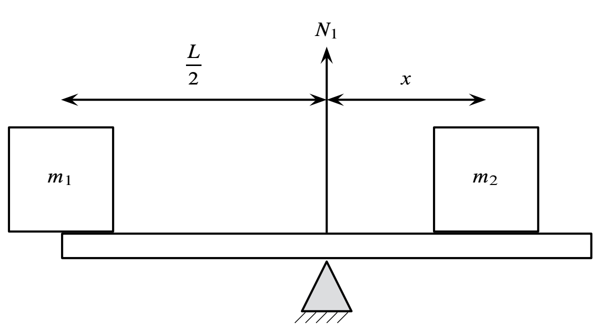
   A. Velocidad, cero
   B. Aceleración, constante
   C. Fuerza resultante, constante
   D. Fuerza resultante, cero
   E. Masa, cero

2. Complete la siguiente definición:

   Para el equilibrio de un cuerpo rígido se requiere lo siguiente: ______ .

   A. Que la fuerza resultante sea cero y la suma de los momentos de las fuerzas sea también cero.
   B. Que la fuerza resultante sea cero.
   C. Que la velocidad del cuerpo sea cero.
   D. Que la masa del cuerpo sea cero.
   E. Que el momento de las fuerzas aplicadas sea cero.

3. Para la balanza, de longitud L, en equilibrio que se muestra en la siguiente figura,

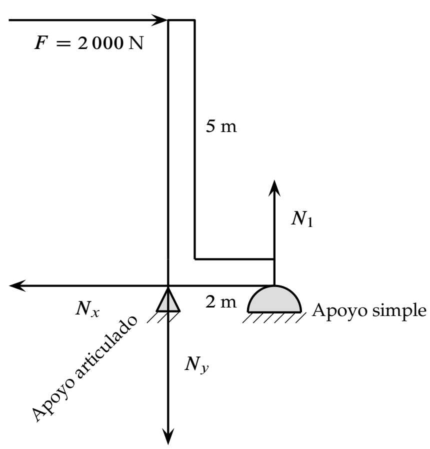


considere: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, $L = 1$ m, $g = 10$ m/s^2.

El valor de la distancia x y la magnitud de la fuerza N_1 son: ________.

A. 0.5 m, 60 N
B. 0.5 m, 0 N
C. 0.25 m, 20 N
D. 0.5 m, 20 N
E. 0.25 m, 60 N

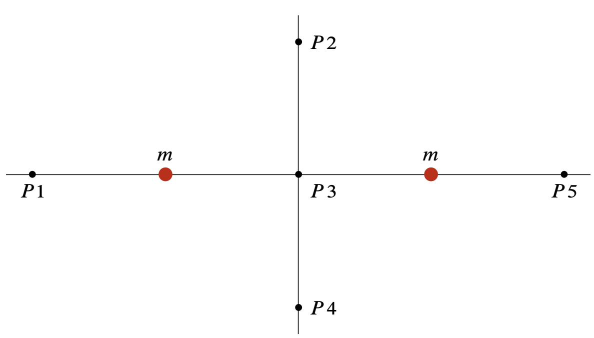
4. La estructura en L de masa despreciable, que se muestra en la siguiente figura, se encuentra en equilibrio.



Las magnitudes de las fuerzas N_1, N_x, N_y son: ________.

A. $N_1 = 5\,000$ N, $N_x = 2\,000$ N, $N_y = 5\,000$ N
B. $N_1 = 5\,000$ N, $N_x = -2\,000$ N, $N_y = -5\,000$ N
C. $N_1 = 0$ N, $N_x = 2\,000$ N, $N_y = 0$ N
D. $N_1 = 5\,000$ N, $N_x = 0$ N, $N_y = 0$ N
E. $N_1 = 0$ N, $N_x = -2\,000$ N, $N_y = 0$ N

5. El centro de masa de dos partículas con masas (m) iguales (véase la siguiente figura) es el punto: ________.



A. $P5$

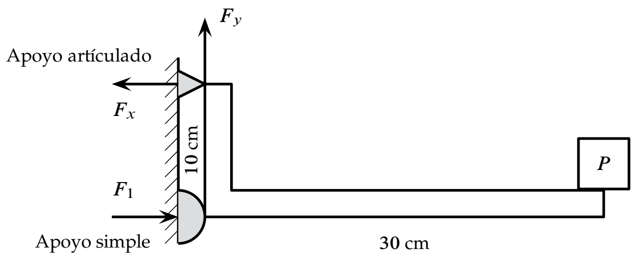
B. $P1$

C. $P4$

D. $P2$

E. $P3$

6. La repisa en forma de L, que se muestra en la figura, soporta un peso $P = 100$ N.



Las fuerzas que aplican los apoyos sobre la repisa son: ________.

A. $F_1 = 0$ N, $F_x = 0$ N, $F_y = 100$ N

B. $F_1 = 100$ N, $F_x = 100$ N, $F_y = 100$ N

C. $F_1 = 200$ N, $F_x = 200$ N, $F_y = 100$ N

D. $F_1 = 300$ N, $F_x = 300$ N, $F_y = 0$ N

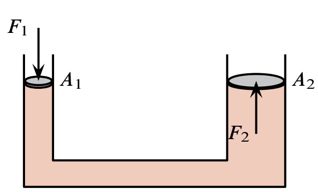
E. $F_1 = 300$ N, $F_x = 300$ N, $F_y = 100$ N

2.5 Hidrostática

2.5.1 Principio de Pascal

Si en un fluido en reposo, contenido en un recipiente cerrado, se incrementa la presión[14] en su superficie, ese incremento se propaga íntegramente a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente.

Por *ejemplo*, en una prensa hidráulica se tiene:



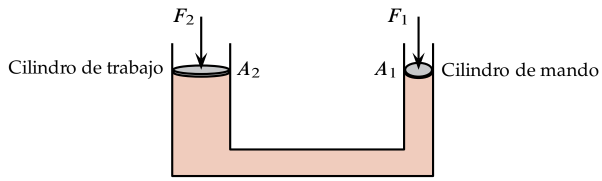
$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = P_2;$$
$$P_1' = P_1 + \Delta P = P_2 + \Delta P = P_2'.$$

14. La presión se define como la fuerza por unidad de área ($P = F/A$) y se mide en $\mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pa}$ (Pascal).

Reactivos de Principio de Pascal

Soluciones: véase la página 278. Desarrollos: véase la página 410

1. Una prensa hidráulica se diseña para amplificar 100 veces la fuerza F_1 aplicada al cilindro de mando (véase la figura siguiente):



Si R_1 es el radio del cilindro de mando, el radio R_2 del cilindro de trabajo es igual a: ________.

A. $10\ R_1$
B. $100\ R_1$
C. $R_1/10$
D. $R_1/100$
E. R_1

2.5.2 Densidad

La densidad ρ de un cuerpo de masa uniforme m que ocupa un volumen V se define como:

$$\sigma = \frac{m}{V} \qquad \text{Densidad volumétrica (masa por unidad de volumen).}$$

Si el cuerpo es un plano (una lámina) de área A o un cuerpo lineal (un alambre de longitud L), se definen la densidad superficial y la densidad lineal como:

$$\tau = \frac{m}{A}. \qquad \text{Densidad superficial (masa por unidad de área);}$$
$$\lambda = \frac{m}{L}. \qquad \text{Densidad lineal (masa por unidad de longitud).}$$

Reactivos de Densidad

Soluciones: véase la página 278. Desarrollos: véase la página 411

1. Sabiendo que la densidad del aire es $1.2\ \text{kg}/\text{m}^3$, la masa y el peso del aire contenido en un salón de dimensiones $6\ \text{m} \times 8\ \text{m} \times 4\ \text{m}$ son: ________.

   (Considera $g = 10\ \text{m}/\text{s}^2$).

   A. 1.2 kg, 12 N
   B. 230.4 kg, 2 304 N
   C. 160 kg, 1 600 N
   D. 230.4 kg, 23.04 N
   E. 160 kg, 16 N

2. La densidad del agua y del oro son $\rho_A = 1\,000\ \text{kg}/\text{m}^3$, $\rho_O = 20\,000\ \text{kg}/\text{m}^3$, por lo tanto el volumen de una tonelada de agua y el de una tonelada de oro son: ________.

   A. $1\ \text{m}^3$, $20\ \text{m}^3$

B. $1\,000\ \mathrm{m}^3$, $20\,000\ \mathrm{m}^3$
C. $0.001\ \mathrm{m}^3$, $0.0005\ \mathrm{m}^3$
D. $10\ \mathrm{m}^3$, $0.5\ \mathrm{m}^3$
E. $1\ \mathrm{m}^3$, $0.05\ \mathrm{m}^3$

2.6 Electrostática

2.6.1 Carga eléctrica

La carga eléctrica es una propiedad que tienen los cuerpos; se manifiesta por medio de fuerzas eléctricas que se ejercen a distancia dos cuerpos cargados.

1. Existen dos tipos de carga eléctrica: carga positiva y carga negativa.
2. La unidad de medida de la carga eléctrica en el SI es el coulomb, denotado por C.
3. La carga eléctrica está cuantizada, es decir, existe un valor mínimo de carga, de tal forma que cualquier cuerpo cargado tiene un número entero de ese valor. Los valores mínimos de carga son:

$$\text{Carga negativa } e = -1.6 \times 10^{-19}\ \text{C (carga del electrón);}$$
$$\text{Carga positiva } p = +1.6 \times 10^{-19}\ \text{C (carga del protón).}$$

4. En cualquier proceso físico, la carga se conserva.
5. Dos cargas de mismo signo se repelen, mientras que dos cargas de signos contrarios se atraen.

Reactivos de Carga eléctrica

Soluciones: véase la página 278. Desarrollos: véase la página 411

1. Relaciona las dos columnas; la respuesta es: ________ .

1. Carga postiva	a. Se atraen
2. Carga negativa	b. 0 C
3. Dos cargas iguales en signo	c. Protón
4. Dos cargas distintas de signo	d. 1.6×10^{-19} C
5. Unidad elemental de carga	e. Se repelen
6. La carga de un átomo de hidrógeno	f. Electrón

A. 1-f, 2-c, 3-e, 4-a, 5-d, 6-b
B. 1-c, 2-f, 3-a, 4-e, 5-d, 6-b
C. 1-f, 2-c, 3-a, 4-e, 5-b, 6-d
D. 1-c, 2-f, 3-e, 4-a, 5-b, 6-d
E. 1-c, 2-f, 3-e, 4-a, 5-d, 6-b

2. Completa la siguiente frase:

Cuando una persona se peina, se transfieren electrones del pelo hacia el peine. Por la conservación de la carga, el pelo queda con carga ________ y el peine con ________ cantidad de carga ________ .

A. Negativa, igual, positiva
B. Positiva, diferente, negativa
C. Positiva, igual, negativa
D. Negativa, igual, negativa
E. Positiva, diferente, positiva

3. Completar la frase.

   Debido a la fuerza repulsiva entre cargas del mismo signo y a la propiedad conductora de los metales, la carga depositada en una esfera metálica ________.

   A. Se acumula en su centro
   B. Se escapa de la esfera
   C. Se distribuye en su superficie
   D. Se distribuye en su volumen
   E. Se equilibra con cargas de signo contrario de la esfera

4. La densidad superficial de carga en una superficie de área A es $\sigma = \dfrac{Q}{A}$, donde Q es la carga total en la superficie. Considerando una lámina metálica (dos caras) de dimensiones 0.6 m $\times$ 0.01 m con una carga $Q = 3 \times 10^{-10}$ C, la densidad superficial de carga es: ________.

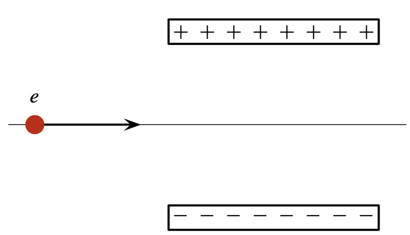
   A. 2.5×10^{-8} C/m^2
   B. 5×10^{-8} C/m^2
   C. 2.5×10^{-12} C/m^2
   D. 5×10^{-12} C/m^2
   E. 1.25×10^{-8} C/m^2

5. Completar el texto siguiente.

   En un cuerpo no conductor, la carga depositada en él se puede distribuir uniformemente en su volumen. Para una esfera no conductora de radio R y carga Q, su densidad de carga es: ________ y la carga acumulada en una esfera de radio $R/2$, con la misma densidad, es: ________.

   A. $\dfrac{3Q}{4\pi R^3}$, $\dfrac{Q}{2}$
   B. $\dfrac{4Q}{3\pi R^3}$, $\dfrac{Q}{8}$
   C. $\dfrac{4Q}{3\pi R^3}$, $\dfrac{Q}{2}$
   D. $\dfrac{3Q}{4\pi R^3}$, $\dfrac{Q}{8}$
   E. $\dfrac{3Q}{4\pi R^3}$, Q

6. Un electrón se mueve en línea recta y penetra en el espacio entre las placas de un condensador cargado, como se muestra en la siguiente figura.

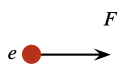


   Dentro de las placas del condensador, el movimiento y la fuerza que actúa sobre el electrón es como se muestra en la elección que tu hagas: ________ .

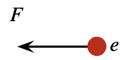
A. Se desvía hacia abajo

B. Se desvía hacia arriba

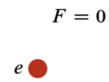
C. No se desvía



D. No se desvía



E. No se desvía



2.6.2 Ley de Coulomb

La ley de Coulomb establece que:

1. Dos cargas del mismo signo se repelen, mientras que dos cargas de signo contrario se atraen.

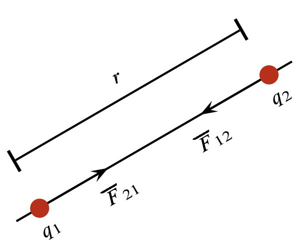
2. La magnitud de la fuerza que una carga q_1 ejerce sobre otra q_2, separadas la distancia r, está dada por:

$$F_{12} = K\frac{|q_1||q_2|}{r^2}.$$

   Donde $K = 9 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ es la constante de Coulomb.

3. La dirección de la fuerza que se ejerce entre las cargas puntuales es colineal con la recta que pasa por q_1, q_2.

4. Las fuerzas eléctricas cumplen con la tercera ley de Newton; es decir si $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2, la fuerza $\vec{F}_{21}$ que q_2 ejerce sobre q_1 es tal que:



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Reactivos de Leyes de Coulomb

Soluciones: véase la página 278. Desarrollos: véase la página 413

1. La magnitud de la fuerza eléctrica F que ejercen entre sí dos partículas de cargas q_1, q_2, separadas la distancia r, queda determinada por la ley de Coulomb. Si la distancia r se disminuye a la mitad, entonces la fuerza F ________ (elige la opción que corresponda).

   A. Se incrementa cuatro veces
   B. Disminuye a la cuarta parte
   C. Se incrementa dos veces
   D. Disminuye a la mitad
   E. Se mantiene constante

2. Completa el texto siguiente:

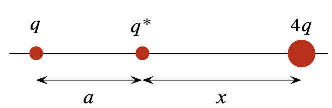
   La ley de Coulomb establece que la magnitud de la fuerza que ejercen entre sí dos cargas eléctricas es ________ proporcional ________ de la distancia entre ellas ________ proporcional ________ de las magnitudes de las cargas.

   A. Inversamente, al cuadrado, y directamente, al producto
   B. Inversamente, al cuadrado, y directamente, a la suma
   C. Directamente, al cuadrado, y directamente, al producto
   D. Inversamente, al cuadrado, e inversamente, al producto
   E. Directamente, al cuadrado, e inversamente, a la suma

3. La magnitud de la fuerza eléctrica F que ejercen entre sí dos partículas de cargas q_1, q_2, separadas la distancia r, queda determinada por la ley de Coulomb. Si se duplica el valor de las dos cargas, para mantener constante el valor de la fuerza F, la distancia r de separación debe: ________.

   A. Duplicarse
   B. Cuadriplicarse
   C. Disminuir a la mitad
   D. Disminuir a la cuarta parte
   E. Mantenerse constante

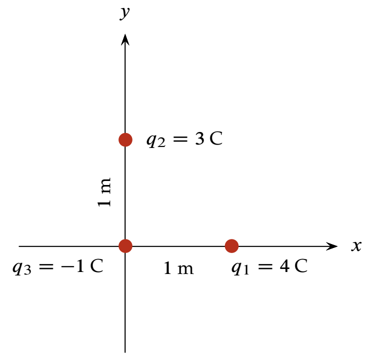
4. En el sistema de partículas cargadas mostrado en la figura siguiente:



   Se requiere que q^* esté en equilibrio. Por lo tanto la distancia x es: ________.

   A. $\dfrac{a}{2}$
   B. $4a$
   C. $2a$
   D. $\dfrac{a}{4}$
   E. a

5. En el sistema de partículas cargadas mostrado en la figura siguiente,



aplicando la ley de Coulomb, se obtiene que la fuerza resultante que actúa sobre q_3 tiene magnitud: ________ .

(La constante de Coulomb es $K = 9 \times 10^9$ Nm^2/C^2).

A. 4.5×10^{10} N
B. 6.3×10^{10} N
C. 4.5×10^{9} N
D. 6.3×10^{9} N
E. 9×10^{9} N

6. Relacionar las columnas que se muestran; encontrar la opción correspondiente: ________ .

1. Inversamente proporcional al cuadrado de	a. Unidad de carga
2. Directamente proporcional al producto de	b. Se repelen
3. Cargas de signo contrario	c. Constante de Coulomb
4. Cargas de igual signo	d. Las cargas
5. C	e. La distancia
6. 9×10^9 N $\cdot$ m^2/C^2	f. Se atraen

A. 1-e, 2-d, 3-f, 4-b, 5-a, 6-c
B. 1-d, 2-e, 3-f, 4-b, 5-c, 6-a
C. 1-e, 2-d, 3-b, 4-f, 5-a, 6-c
D. 1-e, 2-d, 3-f, 4-b, 5-c, 6-a
E. 1-d, 2-e, 3-b, 4-f, 5-c, 6-a

3. Química

3.1 Conceptos introductorios

3.1.1 La materia y los átomos

Materia es todo aquello que tiene masa y ocupa un lugar en el espacio; todo cuanto podemos imaginar, desde las partes de nuestro cuerpo, un árbol, el mar, un libro, un automóvil, e incluso algo que no vemos como es el aire que respiramos, está hecho de materia.

La cantidad de materia de un cuerpo está dada por su masa la cual es cuantificable y se mide normalmente en kilogramos, gramos, libras o alguna unidad equivalente.

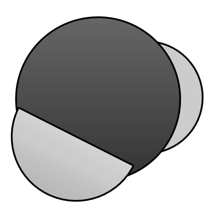
La masa es una medida de la inercia o resistencia que opone un cuerpo para detenerse o acelerarse cuando se encuentra sometido a una fuerza. Si dicha fuerza se deriva del campo gravitatorio terrestre, se denomina peso. En ocasiones ambos aspectos, masa y peso, se confunden; es importante aclarar que no son lo mismo.[15]

La materia está integrada por átomos, que son pequeñísimas partículas, invisibles para el ojo humano; incluso es imposible observarlos con sofisticados aparatos, sólo es posible identificarlos y verificar su existencia de forma indirecta.

Un átomo se considera la cantidad más simple de un elemento químico, que puede entrar en combinación con otros átomos para formar moléculas. Se han identificado a la fecha un total de 118 elementos químicos distintos, que están agrupados en la tabla periódica (véase apartado 3.3.1, página 169).

La materia puede encontrarse en la naturaleza en forma de sustancias puras o de mezclas de dos o más sustancias.

Una sustancia es una porción de materia con un conjunto único de propiedades características que permiten identificarla y distinguirla de otras. Cada sustancia tiene una composición fija y un conjunto de propiedades que la distinguen. Por *ejemplo*, el agua es un tipo de sustancia que, en condiciones normales de presión y temperatura, es un líquido incoloro con un punto de ebullición de 100 °C y con una densidad de 1 g/cm^3; invariablemente está formada por la unión de dos átomos de hidrógeno con un átomo de oxígeno (su fórmula química es H_2O).



Reactivos de La materia y los átomos

Soluciones: véase la página 279. Desarrollos: véase la página 417

1. Se sabe que la composición de la masa del agua (H_2O) es 88.8 % de oxígeno y 11.2 % de hidrógeno. ¿Qué cantidad de oxígeno se producirá al descomponer 175 g de agua?: ________.

15. La masa es una cantidad escalar (tiene magnitud) y el peso es una cantidad vectorial, que incluye magnitud, dirección y sentido.

A. 1 g
B. 88.8 g
C. 11.2 g
D. 155.4 g
E. 0.888 g

2. Todas las siguientes unidades se usan para medir la masa de un cuerpo, excepto: ______.

A. Gramos (g)
B. Onzas *avoirdupois* (oz)
C. Angstroms (Å)
D. Kilogramos (kg)
E. Libras (lb)

3.1.2 Propiedades de la materia

Las propiedades de la materia son todas las características de la materia que se pueden observar y medir.

La medición de una propiedad de la materia se expresa mediante un número y una unidad. Usualmente las unidades se expresan de acuerdo con el sistema internacional de unidades (SI). *Ejemplos*: 10 kg, 20 °C.

Las propiedades o características de la materia pueden dividirse en dos grupos: físicas y químicas.

Propiedades físicas: son aquellas que se pueden medir y observar sin que cambie o se modifique la composición o identidad de la materia; éstas se clasifican en extensivas e intensivas.

- Propiedades físicas extensivas: su valor depende de la cantidad de materia; tal es el caso de la masa, el peso y el volumen.
- Propiedades físicas intensivas: dependen exclusivamente del material de que se trate, independientemente de la cantidad que se tenga de éste y del volumen que ocupe. Por ejemplo, un litro de agua tiene la misma densidad que cien litros de agua; otras propiedades intensivas son el punto de fusión, la dureza, la maleabilidad y la conductividad eléctrica.

Propiedades químicas: son aquellas que determinan qué cambios o transformaciones puede experimentar la materia en su composición y estructura interna; son propiedades distintivas de las sustancias que pueden ser observadas cuando sucede un cambio químico, es decir, cuando se combinan dos o más sustancias, produciéndose un reordenamiento atómico. Estas propiedades se manifiestan en los procesos químicos (reacciones químicas). Un ejemplo de reacción química: cuando el hierro se expone al aire, y se forma el óxido correspondiente, ello indica que ha ocurrido un proceso de oxidación o corrosión.

Reactivos de Propiedades de la materia
Soluciones: véase la página 279. Desarrollos: véase la página 417

1. La plata, el cobre y el oro presentan propiedades que los identifican como metales; indica cuál de las siguientes no es una propiedades física intensiva: ______.

A. Conductividad eléctrica
B. Volumen
C. Maleabilidad
D. Ductilidad
E. Densidad

2. Las siguientes son descripciones de propiedades que corresponden a un elemento o a un compuesto, identificar cuál de ellas hace referencia a una propiedad química: ______.

   A. El hielo seco se sublima por el efecto del calor.
   B. El yodo es un gas de color púrpura e inestable como sólido.
   C. El cobre tiene una densidad de 8.96 g/cm^3.
   D. El zinc metálico conduce la electricidad.
   E. El carbonato de calcio se combina con un ácido y produce CO_2.

3.1.3 Estados de agregación

La materia puede presentarse en tres estados físicos, o de agregación, diferentes: sólido, líquido y gaseoso.

Características que distinguen a:

Sólidos	*Líquidos*	*Gases*
• Tienen volumen fijo. • Tienen forma definida. • No se pueden comprimir. • No fluyen (no se mueven) por sí mismos. • Presentan altas fuerzas de cohesión entre sus componentes. • La distancia media entre sus partículas es muy pequeña.	• Tienen volumen fijo. • No tienen forma definida. • Son poco compresibles. • Se difunden y fluyen por sí mismos. • Presentan altas fuerzas de cohesión. • La distancia media entre sus partículas es relativamente pequeña.	• Ocupan todo el volumen del recipiente que los contiene. • No tienen forma fija. • Son fácilmente compresibles. • Se difunden y tienden a mezclarse con otros gases. • Son capaces de expandirse.

Al modificar las condiciones de temperatura y/o presión a que se encuentran las sustancias, pueden ocurrir los siguientes cambios de estado:

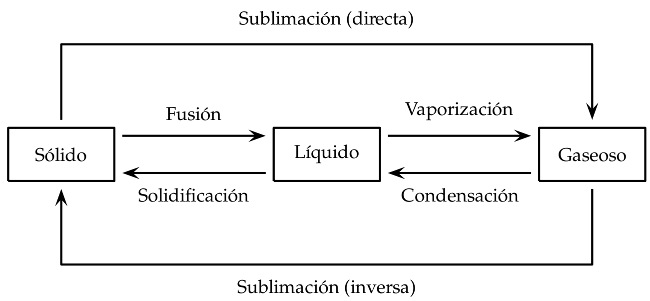
- Fusión. Paso de un sólido al estado líquido por medio de la energía térmica. El punto de fusión es la temperatura a la cual el sólido se funde, por lo que su valor es particular para cada sustancia.
- Solidificación. Transformación de un líquido a sólido por medio del enfriamiento. El punto de solidificación o de congelación es la temperatura a la cual el líquido se hace sólido.
- Vaporización. Cambio de estado de líquido a gaseoso. Hay dos tipos de vaporización: la ebullición y la vaporación.

  Ebullición. Cuando el cambio de estado ocurre por aumento de la temperatura en el interior del líquido; el punto de ebullición es la temperatura a la cual un determinado líquido hierve (a una presión dada), y permanece constante mientras dure el proceso de cambio de estado.

  Evaporación. Cuando el estado líquido cambia lentamente a estado gaseoso, tras haber adquirido suficiente energía para vencer la tensión superficial. A diferencia de la ebullición, la evaporación se produce a cualquier temperatura, siendo más rápida cuando más elevada está.

- Condensación. Cambio de estado de la materia que ocurre cuando un gas se transforma en líquido, este proceso es inverso a la vaporización.

- Sublimación. Cambio de estado de la materia sólida al estado gaseoso sin pasar por el estado líquido (o a la inversa).



Es importante saber que, en todos estos cambios, las sustancias no se transforman en otras sustancias, sólo cambia su estado físico. A estos procesos se los conoce igualmente como cambios de fase.

Reactivos de Estados de agregación
Soluciones: véase la página 279. Desarrollos: véase la página 418

1. El cambio de estado físico de líquido a vapor se denomina: ________ .
   A. Sublimación
   B. Solidificación
   C. Cristalización
   D. Vaporización
   E. Condensación

2. Cuando la materia se encuentra en estado sólido se caracteriza por poseer: ________ .
   A. Forma definida, volumen definido, compresibilidad, densidad alta.
   B. Forma definida, volumen indefinido, incompresibilidad, densidad alta.
   C. Forma definida, volumen definido, incompresibilidad, densidad alta.
   D. Forma definida, volumen definido, incompresibilidad, densidad baja.
   E. Forma indefinida, volumen definido, incompresibilidad, densidad alta.

3.1.4 Sustancias puras (elementos y compuestos)

Las sustancias puras se pueden presentar como elementos o como compuestos.

Los elementos son sustancias puras que no pueden descomponerse por ningún procedimiento en otras sustancias puras más sencillas, tal es el caso de todos los elementos de la tabla periódica; éstos se representan mediante su símbolo químico, por *ejemplo*, H (hidrógeno), He (helio), Li (litio), Na (sodio), K (potasio), Ca (calcio), O (oxígeno), Au (oro), Hg (mercurio).

Una sustancia elemental está formada por una sola clase de elemento, por lo tanto es imposible obtener dos o más sustancias a partir de una sustancia elemental, ni siquiera en condiciones extremas como sería la aplicación de electricidad, calor o luz; por definición, son las sustancias más simples que existen.

Los compuestos son sustancias puras constituidas por 2 o más elementos iguales o distintos, combinados en proporciones fijas. *Ejemplos*: el agua, con fórmula química H_2O, constituida por hidrógeno y oxígeno; NH_3 (amoníaco), formado por nitrógeno e hidrógeno; H_2SO_4 (ácido sulfúrico) constituido por hidrógeno, azufre y oxígeno; CO_2 (dióxido de carbono) formado por carbono y oxígeno.

Los compuestos se pueden descomponer mediante procedimientos químicos para obtener los elementos que los constituyen; el agua por ejemplo puede descomponerse en sus elementos, hidrógeno y oxígeno, mediante la acción de una corriente eléctrica (electrólisis).

Si el compuesto está formada por un solo tipo de elemento, se dice que es una sustancia simple o elemental. Por *ejemplo*: oxígeno gaseoso (O_2), ozono (O_3), nitrógeno (N_2), plata (Ag), que representan sustancias elementales.

Una molécula es la unión de al menos dos átomos del mismo elemento o de diferentes elementos.

Reactivos de Sustancias puras (elementos y compuestos)
Soluciones: véase la página 279. Desarrollos: véase la página 418

1. En la siguiente lista, las opciones representan compuestos que pueden ubicarse como sustancias elementales, excepto: ______.

   A. H_2 (molécula de hidrógeno)
   B. N_2 (molécula de nitrógeno)
   C. O_3 (molécula de ozono)
   D. Cl_2 (molécula de cloro)
   E. CO_2 (dióxido de carbono)

2. De las siguientes opciones, identificar cuál corresponde a una sustancia elemental: ______.

   A. HNO_3 (ácido nítrico)
   B. NH_3 (amoníaco)
   C. Al (aluminio)
   D. SiO_2 (arena)
   E. H_2O (agua)

3.1.5 Mezclas homogéneas y heterogéneas

Una mezcla se forma cuando dos o más sustancias puras se combinan de forma física, pero no químicamente; una característica de las mezclas es que sus componentes (sustancias) pueden ser separados empleando métodos físicos como los siguientes: vaporización, centrifugación, decantación, filtración, tamizado, destilación, cromatografía. La proporción en la que se combinan las sustancias para formar una mezcla generalmente es variable.

Por sus características, las mezclas se clasifican en: homogéneas y heterogéneas.

Mezclas homogéneas: son aquellas cuyas propiedades y composición son uniformes en toda la mezcla; a éstas se las llama frecuentemente soluciones o disoluciones. Sus componentes no pueden distinguirse a simple vista. *Ejemplos*: sal en agua, el aire, una aleación de oro y plata.

Mezclas heterogéneas: sus propiedades y composición no son uniformes y en algunos casos pueden observarse sus componentes a simple vista. *Ejemplos*: agua con aceite, arena de mar.

Las distintas partes que constituyen una mezcla heterogénea se denominan fases. Una fase es una porción de la mezcla que tiene características particulares que la distinguen de otras fases. Por *ejemplo*, en una muestra de arena de mar pueden observarse los granos de sal y los granos de arcilla; en una mezcla de agua y aceite pueden distinguirse las dos fases que no se combinan entre sí.

En las mezclas heterogéneas, cada una de las sustancias que la forman tiene características y propiedades particulares, tales como: densidad, color, punto de fusión.

Reactivos de Mezclas homogéneas y heterogéneas
Soluciones: véase la página 279. Desarrollos: véase la página 419

1. Las siguientes son características de una mezcla heterogénea, excepto: ______.
   A. Su composición no es uniforme.
   B. Se pueden distinguir sus componentes entre sí.
   C. Sus propiedades son idénticas en cualquier parte de la mezcla.
   D. Consta de diversas fases, cada una con propiedades particulares.
   E. Pueden observarse sus componentes a simple vista.

2. Los siguientes son ejemplos de mezclas homogéneas, excepto: ______.
   A. Arena con agua de mar.
   B. Aleación de cobre y oro.
   C. Mezcla de alcohol y agua.
   D. Aire.
   E. Gasolina.

3.2 Estructura del átomo

3.2.1 Partículas subatómicas y fundamentales (protones, neutrones y electrones)

Partícula subatómica	*Protón*	*Neutrón*	*Electrón*
Masa (kg)	1.6726×10^{-27} kg	1.675×10^{-27} kg	9.11×10^{-31} kg
Masa (u)	1.0073	1.0087	0.00054858
Carga eléctrica	$+1.602 \times 10^{-19}$ C	0	-1.6×10^{-19} C
Ubicación	En el núcleo	En el núcleo	Fuera del núcleo
Notación	p^+	n^0	e^-

Algunas características importantes de los átomos:

- Los protones y neutrones se ubican en el núcleo, fuera de éste se ubican los electrones.
- El número de protones en un átomo da cuenta del tipo de elemento.
- El número de electrones y neutrones puede cambiar sin que se vea afectada la identidad del elemento. Por ejemplo un átomo de sodio que pierde un electrón seguirá siendo sodio.
- El protón tiene carga eléctrica positiva y el electrón carga eléctrica negativa.
- El neutrón no tiene carga eléctrica, sólo masa.
- Un átomo neutro tiene el mismo número de protones (partículas con carga positiva) que de electrones (partículas con carga negativa), los neutrones no aportan carga.
- Comparativamente, la masa del protón y la del neutrón son similares.

La masa de un electrón es casi 1 800 veces menor que la de un protón o un neutrón.

Reactivos de Partículas subatómicas y fundamentales (protones, neutrones y electrones)
Soluciones: véase la página 279. Desarrollos: véase la página 419

1. Un átomo neutro, sin carga eléctrica, tiene el mismo número de: ______ .

   A. Fotones y electrones
   B. Positrones y electrones
   C. Protones y neutrones
   D. Electrones y protones
   E. Neutrones y electrones

2. Partícula subatómica cuyo número permite identificar el tipo de elemento y así diferenciarlo de otros: ______ .

   A. Electrón
   B. Protón
   C. Positrón
   D. Neutrón
   E. Fotón

3. Es una partícula subatómica con masa aproximada a la de un protón: ______ .

   A. Positrón
   B. Neutrón
   C. Leptón
   D. Electrón
   E. Fotón

3.2.2 Número atómico, masa atómica e isótopos

Número atómico y masa atómica

A cada elemento se asocian dos valores relacionados con su número de partículas subatómicas, éstos son: el número atómico (Z) y la masa atómica (A).

En la representación del elemento E, esto es, ${}^{A}_{Z}E$,

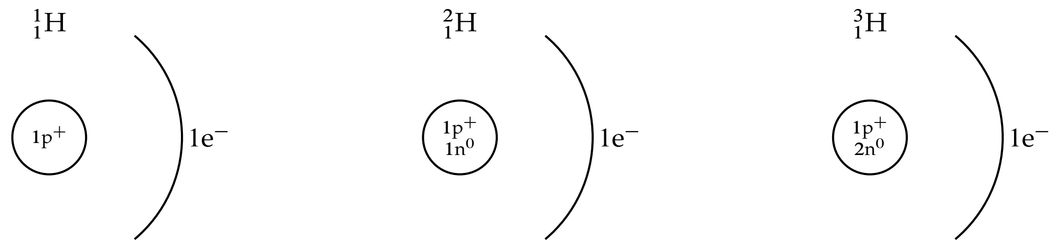
- Z es el número atómico que corresponde al número de protones que hay en el núcleo del átomo de un determinado elemento. Por *ejemplo*, el elemento que tiene un solo protón es hidrógeno, dos protones es helio, tres protones es litio y así sucesivamente para cada uno de los elementos de la tabla periódica.

- A es la masa atómica o número de masa que equivale a la suma del número de protones y neutrones en el núcleo del átomo del elemento.

Isótopos

Los isótopos son átomos de un mismo elemento que tienen el mismo número de protones, pero difieren en su cantidad de neutrones. Es decir, son isótopos aquellos átomos de un elemento que tienen el mismo número atómico y diferente masa atómica.

Por *ejemplo*, para el hidrógeno se han identificado los siguientes tres isótopos:



Protio Deuterio Tritio

Protio, deuterio y tritio contienen un protón en sus núcleos y cero, uno y dos neutrones.

El protio y el deuterio se encuentran de forma natural; el tritio se encuentra de forma artificial, es decir, es sintético.

La mayoría de los elementos se presentan en la naturaleza como una mezcla de varios isótopos diferentes.

Reactivos de Número atómico, número de masa e isótopos

Soluciones: véase la página 279. Desarrollos: véase la página 419

1. El átomo de uranio se presenta en la naturaleza como una mezcla de isótopos ¿en qué coinciden las variantes del uranio?: ________ .

   A. En su número de masa.
   B. En el número de partículas en su núcleo.
   C. En su carga eléctrica.
   D. En su número de neutrones.
   E. En su número de protones.

2. En la tabla periódica de los elementos, el símbolo del átomo de bario (Ba) se acompaña de dos números: $^{137}_{56}Ba$; el número 56, representa su número de protones, ¿qué representa el número 137?: ________ .

   A. El número de protones y electrones.
   B. El número de neutrones.
   C. La suma de protones y neutrones.
   D. El número de electrones.
   E. La diferencia entre protones y neutrones.

3. Para el átomo de polonio (Po) que tiene un número de masa de 209 y un número atómico de 84, ¿cuál es su número de neutrones?: ________ .

   A. 209
   B. 293
   C. 1 680
   D. 125
   E. 84

3.2.3 Moléculas e iones

Una molécula es un conjunto estable y eléctricamente neutro de, al menos, dos átomos unidos por un enlace covalente. Las moléculas pueden estar formadas por átomos de elementos iguales, como las moléculas homonucleares: O_2, N_2, Cl_2 o por átomos de distintos elementos, como las moléculas heteronucleares: H_2O, CO_2, SO_3. Según el número de átomos que pueden formar una molécula, éstas pueden ser diatómicas (de dos átomos), triatómicas (tres átomos) y poliatómicas, cuando tienen muchos átomos; por *ejemplo*: los plásticos, las proteínas, los ácidos nucleicos, que tienen miles y hasta millones de átomos unidos formando una sola molécula.

Es importante recordar que la materia tiene naturaleza eléctrica, es decir algunas de las partículas subatómicas que la constituyen poseen carga eléctrica; tal es el caso de los protones que tienen carga positiva y de los electrones que tienen carga negativa.

Si el número de partículas positivas (protones) es igual al número de partículas negativas (electrones), entonces el átomo es neutro. Si el número de protones y electrones en un mismo átomo no coincide, se tendrá un ión, lo cual se asociará a una carga eléctrica, ya sea positiva o negativa. Existen dos tipos de iones: los cationes y los aniones.

Se tiene un catión, si el número de protones (partículas con carga positiva) es mayor que el de electrones (partículas con carga negativa); en este caso el átomo ha perdido electrones. Por *ejemplo*: el signo positivo que acompaña al sodio (Na^+) indica que ha perdido un electrón.

Se tiene un anión, si el número de electrones (partículas con carga negativa) es mayor que el de protones (partículas con carga positiva); en este caso el átomo ha ganado electrones. Por *ejemplo*: el número 2 y el signo negativo que acompañan al ión carbonato (CO_3^{2-}) indican que éste ha ganado 2 electrones.

Reactivos de Moléculas e iones
Soluciones: véase la página 280. Desarrollos: véase la página 420

1. Identificar cuál de los siguientes iones representa la pérdida de dos electrones: ________.

   A. Cl_2
   B. Ca^{2+}
   C. SO_4^{2-}
   D. $Cr_2O_7^{2-}$
   E. O^{2-}

2. Cuando un átomo gana un electrón se transforma en un: ________.

   A. Neutrón
   B. Catión
   C. Isótopo
   D. Protón
   E. Anión

3.2.4 Cantidad de sustancia (mol) y masa molar

La masa atómica es la masa promedio de los distintos isótopos de un elemento; se expresa en unidades de masa atómica (u) o en dalton.

Por *ejemplo*, la masa atómica del hidrógeno es igual al promedio ponderado de la masa atómica de sus tres isótopos (hidrógeno común, deuterio y tritio); su valor se indica en la tabla periódica y es igual a 1.008 u.

La masa molecular es la masa de una molécula de una sustancia, cuyos átomos se encuentran unidos ya sea por enlaces iónicos o covalentes; se expresa en unidades de masa atómica (u) o en dalton. Por *ejemplo*, la masa molecular del cloruro de sodio (NaCl) se obtiene al sumar las masas atómicas de sodio y cloro, 22.39 y 35.45, esto es, 58.44 u.

La masa molar es la masa de un mol de cualquier sustancia; se expresa en gramos/mol (g/mol); numéricamente coincide con la masa molecular.

Observa que para el cloruro de sodio, la masa molar es 58.44 g/mol.

El mol es un concepto muy útil para realizar cualquier cálculo químico; hace referencia a la cantidad de sustancia que incluye tantas unidades elementales o partículas (átomos, iones o moléculas) como existen en 12 gramos de carbono doce (C_{12}).[16]

Lo anterior significa que un mol de carbono doce tiene una masa de 12 gramos y que en esa cantidad de sustancia hay 6.022×10^{23} átomos de carbono por cada mol; este último número es una constante y es conocido como número de Avogadro (NA) asociado a un mol de cualquier sustancia.

Por lo tanto, un mol de sustancia se asocia a su masa atómica o masa molecular expresada en gramos y a su vez también al número de Avogadro.

Como ejemplos de lo anterior tenemos que:

- 1 mol de H tiene una masa de 1 g y en esta cantidad de sustancia hay 6.022×10^{23} átomos de hidrógeno;
- 1 mol de iones de H^+ tienen una masa de 1 g y en esta cantidad de sustancia hay 6.022×10^{23} iones de hidrógeno;
- 1 mol de H_2O tienen una masa de 18 g y en esta cantidad de sustancia hay 6.022×10^{23} moléculas de agua;
- 1 mol de CO_2 tienen una masa de 44 g y en esta cantidad de sustancia hay 6.022×10^{23} de dióxido de carbono.

Reactivos de Cantidad de sustancia (mol) y masa molar

Soluciones: véase la página 280. Desarrollos: véase la página 421

1. Determinar el número de moles que hay en 350 g de ácido sulfúrico, cuya fórmula es H_2SO_4.
   Masas atómicas (g/mol): H (1), S (32), O (16).
   Elige la opción correcta: ______ .
   A. 2.5 moles
   B. 3.5 moles
   C. 7 moles
   D. 49 moles
   E. 350 moles
2. ¿Cuántas moléculas de glucosa ($C_6H_{12}O_6$) hay en 100 g del compuesto?
   Masa atómica (g/mol): H (1), C (12), O (16).
   Elige la opción correcta: ______ .
   A. 100 moléculas
   B. 29 moléculas
   C. 0.55 moléculas
   D. 3.34×10^{23} moléculas
   E. 6.022×10^{23} moléculas/mol

16. Se establece como referencia el C_12 por tratarse de un isótopo muy estable, de tal manera que:
1 mol de C_12 = 12 g = $\mathbf{6.022 \times 10^{23}}$ átomos de carbono/mol.

3.3 Tabla periódica

3.3.1 Símbolos y fórmulas químicas

Los símbolos químicos se utilizan para identificar a los átomos de los elementos y las fórmulas químicas para identificar a los compuestos químicos.

En los símbolos químicos de los elementos se emplea una letra mayúscula, o bien una letra mayúscula seguida por una minúscula. *Ejemplos*: hidrógeno (H); carbono (C); oxígeno (O); plata (Ag); magnesio (Mg); aluminio (Al).

Los símbolos químicos de los elementos se muestran en la tabla periódica; y la identidad de cada uno de ellos se define a partir del número atómico (número de protones) y número de masa (suma de protones y neutrones).

Una fórmula química indica tanto los elementos que forman una molécula o un compuesto, como la proporción de los átomos que lo constituyen. Por *ejemplo*: ozono O_3; peróxido de hidrógeno H_2O_2; carbonato de calcio $CaCO_3$; metanol CH_3OH.

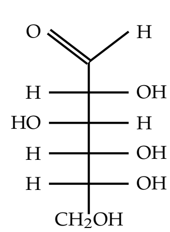
Existen diversas formas para presentar las fórmulas:

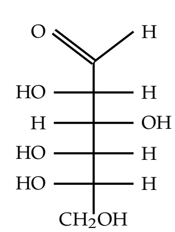
1. La fórmula molecular indica el tipo y número de átomos de los elementos presentes en los compuestos. *Ejemplo*: la fórmula molecular de la glucosa es $C_6H_{12}O_6$, es decir, nos indica que la molécula tiene 6 átomos de C, 12 átomos de H y 6 átomos de O.

2. La fórmula empírica o mínima muestra la mínima proporción que existe entre los átomos que forman un compuesto en términos de números pequeños y enteros; se obtiene simplificando los subíndices de la fórmula molecular. *Ejemplos*:

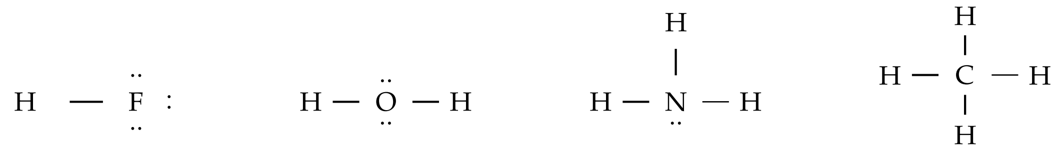
   - La fórmula molecular de la glucosa es ($C_6H_{12}O_6$); dividiendo sus índices entre seis, su fórmula empírica es CH_2O.
   - La fórmula molecular del benceno es (C_6H_6); dividiendo sus índices entre seis, su fórmula empírica es CH.
   - Hay casos en donde la fórmula molecular no puede simplificarse más; éste es el caso del agua (H_2O), por lo cual coinciden su fórmula molecular y su fórmula empírica.
   - En el caso de compuestos iónicos, la fórmula empírica es la única que se puede conocer. Por *ejemplo*: nitruro de litio (Li_3N), fosfuro de calcio (Ca_3P_2).

3. La fórmula desarrollada indica los enlaces entre los diferentes grupos de átomos en un compuesto; es una forma muy usada en química orgánica, en ella se puede observar la estructura de la cadena carbonada y los diferentes sustituyentes de la cadena. Por *ejemplo*, la glucosa ($C_6H_{12}O_6$) tendría la siguiente fórmula semidesarrollada:





4. La fórmula de Lewis (diagrama de Lewis o estructura de Lewis) de una molécula indica el número total de átomos de la molécula; en ésta los pares de electrones compartidos se representan con líneas rectas entre los átomos y los electrones no compartidos con puntos alrededor de los símbolos de los átomos. *Ejemplos*:



Fluoruro de hidrógeno — Agua — Amoníaco — Metano

Reactivos de Símbolos y fórmulas químicas

Soluciones: véase la página 280. Desarrollos: véase la página 422

1. Identificar los símbolos químicos de los siguientes elementos: potasio, plata, fósforo, estaño. ______.

   A. P, Pt, F, Es
   B. Po, Ag, P, Sn
   C. K, Ag, F, Sn
   D. K, Ag, P, Sn
   E. P, Ag, F, Es

2. Si se sabe que en la fórmula molecular del acetileno se tienen 2 átomos de hidrógeno y 2 de carbono, ¿cuál es la fórmula empírica y la masa molecular de este compuesto?

   Masas atómicas H, (1 u); C, (12 u).

   Elige la opción correcta: ______.

   A. CH, 26 u.
   B. C_2H_2, 24 u
   C. 2CH, 26 u
   D. CH, 13 u
   E. C_2H_2, 13 u

3.3.2 Grupos o familias, periodos y bloques

La tabla periódica (véase la página 171) muestra la organización y clasificación de los elementos químicos, con base en sus características y propiedades. Los elementos se ordenan con relación a su número atómico: H(1), He(2), Li(3), Be(4), y así sucesivamente.
En la tabla periódica hay 18 columnas y cada una de ellas representa un grupo o familia; se numeran de izquierda a derecha y estos grupos son:

Grupo 1 (IA): metales alcalinos
Grupo 2 (IIA): metales alcalinotérreos
Grupo 3 (IIIB): familia del escandio
Grupo 4 (IVB): familia del titanio
Grupo 5 (VB): familia del vanadio
Grupo 6 (VIB): familia del cromo
Grupo 7 (VIIB): familia del manganeso
Grupo 8 (VIIIB): familia del hierro
Grupo 9 (VIIIB): familia del cobalto
Grupo 10 (VIIIB): familia del níquel
Grupo 11 (IB): familia del cobre
Grupo 12 (IIB): familia del zinc
Grupo 13 (IIIA): familia del boro
Grupo 14 (IVA): familia del carbono
Grupo 15 (VA): familia del nitrógeno
Grupo 16 (VIA): anfígenos o calcógenos
Grupo 17 (VIIA): halógenos
Grupo 18 (VIIIA): gases nobles o inertes

Hay 7 filas en la tabla periódica de los elementos; cada una representa un periodo; se nombran de arriba a abajo; éstas corresponden al número de niveles energéticos que tienen los átomos. En las filas se presentan los elementos en razón de que, a su vez, cada nivel está dividido en distintos subniveles de energía y, conforme aumenta el número atómico, se van llenando las casillas en la tabla en ese orden.

NÚMERO DE GRUPO RECOMEND IUPAC (1985): 13
NÚMERO DE GRUPO CHEMICAL ABSTRACT SERVICE (1986): IIIA
NÚMERO ATÓMICO: 5
MASA ATÓMICA RELATIVA: 10.811
SÍMBOLO: B
NOMBRE DEL ELEMENTO: BORO

PERIODO \ GRUPO	1 IA	2 IIA	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8	9 VIIIB	10	11 IB	12 IIB	13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 VIIIA
1	1 1.0079 H HIDRÓGENO																	2 4.0026 He HELIO
2	3 6.941 Li LITIO	4 9.0122 Be BERILIO											5 10.811 B BORO	6 12.011 C CARBONO	7 14.007 N NITRÓGENO	8 15.999 O OXÍGENO	9 18.998 F FLÚOR	10 20.180 Ne NEÓN
3	11 22.990 Na SODIO	12 24.305 Mg MAGNESIO											13 26.982 Al ALUMINIO	14 28.086 Si SILICIO	15 30.974 P FÓSFORO	16 32.065 S AZUFRE	17 35.453 Cl CLORO	18 39.948 Ar ARGÓN
4	19 39.098 K POTASIO	20 40.078 Ca CALCIO	21 44.956 Sc ESCANDIO	22 47.867 Ti TITANIO	23 50.942 V VANADIO	24 51.996 Cr CROMO	25 54.938 Mn MANGANESO	26 55.845 Fe HIERRO	27 58.933 Co COBALTO	28 58.693 Ni NIQUEL	29 63.546 Cu COBRE	30 65.38 Zn CINC	31 69.723 Ga GALIO	32 72.64 Ge GERMANIO	33 74.922 As ARSÉNICO	34 78.96 Se SELENIO	35 79.904 Br BROMO	36 83.798 Kr KRIPTÓN
5	37 85.468 Rb RUBIDIO	38 87.62 Sr ESTRONCIO	39 88.906 Y YTRIO	40 91.224 Zr CIRCONIO	41 92.906 Nb NIOBIO	42 95.96 Mo MOLIBDENO	43 (98) Tc TECNECIO	44 101.07 Ru RUTENIO	45 102.91 Rh RODIO	46 106.42 Pd PALADIO	47 107.87 Ag PLATA	48 112.41 Cd CADMIO	49 114.82 In INDIO	50 118.71 Sn ESTAÑO	51 121.76 Sb ANTIMONIO	52 127.60 Te TELURO	53 126.90 I YODO	54 131.29 Xe XENÓN
6	55 132.91 Cs CESIO	56 137.33 Ba BARIO	57-71 La-Lu Lantánidos	72 178.49 Hf HAFNIO	73 180.95 Ta TÁNTALO	74 183.84 W WOLFRAMIO	75 186.21 Re RENIO	76 190.23 Os OSMIO	77 192.22 Ir IRIDIO	78 195.08 Pt PLATINO	79 196.97 Au ORO	80 200.59 Hg MERCURIO	81 204.38 Tl TALIO	82 207.2 Pb PLOMO	83 208.98 Bi BISMUTO	84 (209) Po POLONIO	85 (210) At ASTATO	86 (222) Rn RADÓN
7	87 (223) Fr FRANCIO	88 (226) Ra RADIO	89-103 Ac-Lr Actínidos	104 (267) Rf RUTHERFORDIO	105 (268) Db DUBNIO	106 (271) Sg SEABORGIO	107 (272) Bh BOHRIO	108 (277) Hs HASSIO	109 (276) Mt MEITNERIO	110 (281) Ds DARMSTADTIO	111 (280) Rg ROENTGENIO	112 (285) Cn COPERNICIO	113 (. . .) Uut UNUNTRIO	114 (287) Fl FLEROVIO	115 (. . .) Uup UNUNPENTIO	116 (291) Lv LIVERMORIO	117 (. . .) Uus UNUNSEPTIO	118 (. . .) Uuo UNUNOCTIO

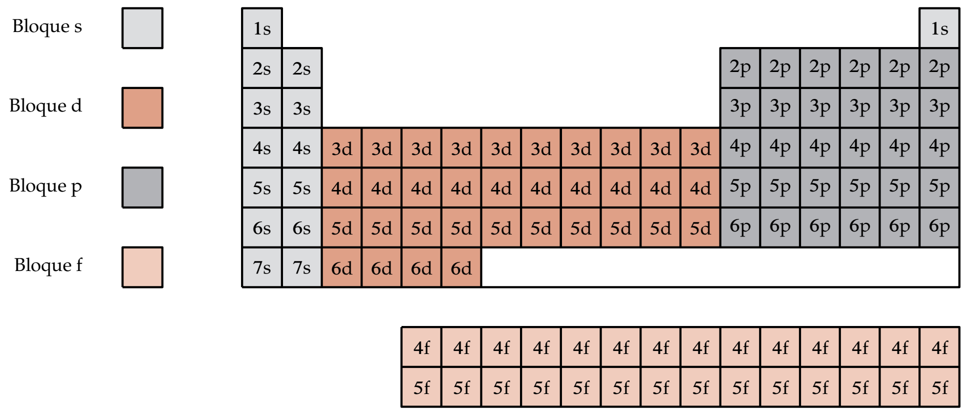
LANTÁNIDOS

57 138.91 La LANTANO	58 140.12 Ce CERIO	59 140.91 Pr PRASEODIMIO	60 144.24 Nd NEODIMIO	61 (145) Pm PROMETIO	62 150.36 Sm SAMARIO	63 151.96 Eu EUROPIO	64 157.25 Gd GADOLINIO	65 158.93 Tb TERBIO	66 162.50 Dy DISPROSIO	67 164.93 Ho HOLMIO	68 167.26 Er ERBIO	69 168.93 Tm TULIO	70 173.05 Yb YTERBIO	71 174.97 Lu LUTECIO

ACTÍNIDOS

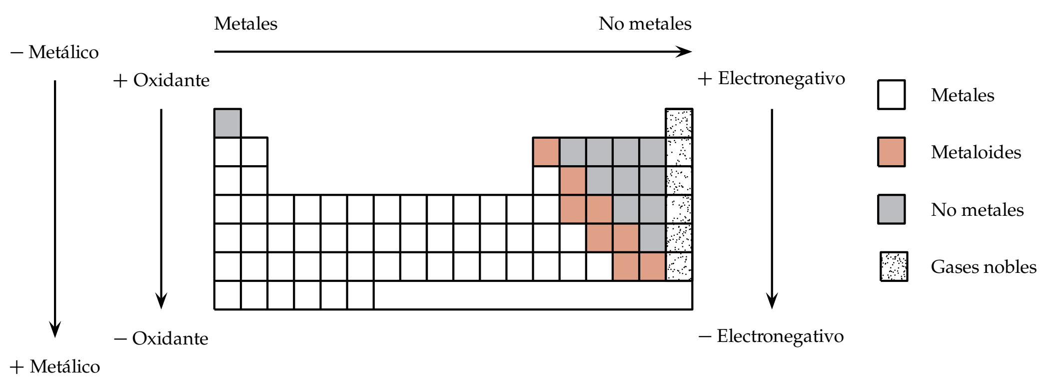
89 (227) Ac ACTINIO	90 232.04 Th TORIO	91 231.04 Pa PROTACTINIO	92 238.03 U URANIO	93 (237) Np NEPTUNIO	94 (244) Pu PLUTONIO	95 (243) Am AMERICIO	96 (247) Cm CURIO	97 (247) Bk BERKELIO	98 (251) Cf CALIFORNIO	99 (252) Es EINSTEINIO	100 (257) Fm FERMIO	101 (258) Md MENDELEVIO	102 (259) No NOBELIO	103 (262) Lr LAWRENCIO

Asimismo los elementos se agrupan en 4 bloques: s, d, p, f, que se relacionan con el último subnivel de energía ocupado por los electrones de valencia del elemento.



Por su naturaleza, los elementos se clasifican en:

- Metales: tienen generalmente de 1 a 3 electrones de valencia, y tendencia a perderlos para así quedar con los electrones del nivel previo equivalentes a la configuración de un gas noble.
- No metales: poseen en su último nivel generalmente entre 5 y 7 electrones de valencia, por ello tienen una tendencia a ganar electrones para completar su octeto.
- Metaloides: tienen 4 o 5 electrones de valencia y presentan tendencia a compartir electrones. Son un conjunto de elementos que se encuentran en la frontera entre los metales y los no metales.
- Gases nobles: tienen en su último nivel 2 electrones (helio) u 8 electrones de valencia (neón, argón, kriptón, xenón, radón), por lo que son estables.



Reactivos de Grupos o familias, periodos y bloques

Soluciones: véase la página 280. Desarrollos: véase la página 423

1. Son elementos que forman parte del grupo de los halógenos: ______.

   A. F, Cl, Br, I

   B. H, Li Na, K

   C. B, Al, Ga, In

D. Be, Mg, Ca, Sr

E. He, Ne, Ar Kr

2. En la tabla periódica, los elementos químicos con propiedades similares se ubican en un mismo: ______ .

A. Periodo

B. Bloque

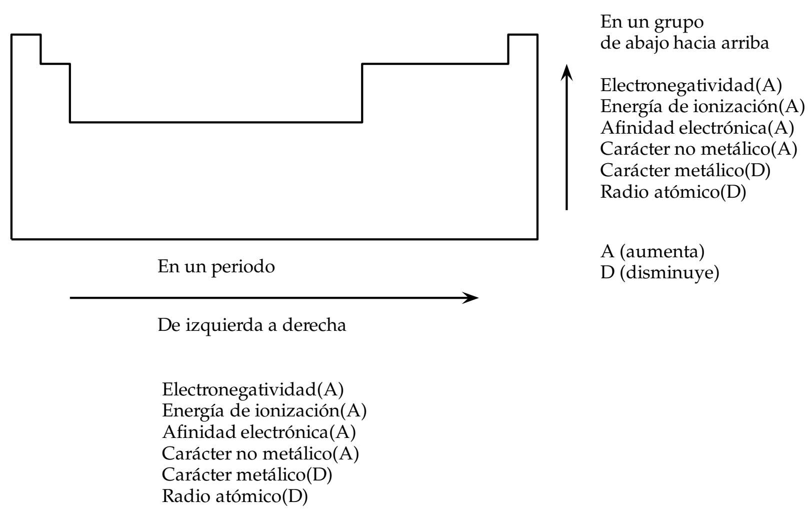
C. Nivel

D. Grupo

E. Sentido

3.3.3 Propiedades periódicas

Las propiedades periódicas son aquellas que presentan los elementos químicos y que se repiten de manera secuencial en la tabla periódica, entre éstas: la electronegatividad, la energía de ionización, la afinidad electrónica, el carácter no metálico, el carácter metálico, el radio atómico. La tendencia de variación de algunas de ellas se muestra en el siguiente diagrama.



- Electronegatividad: representa la fuerza con la cual un átomo en un enlace manifiesta su tendencia para atraer electrones.

- Energía de ionización o potencial de ionización: energía necesaria para ceder un electrón.

- Afinidad electrónica: energía liberada cuando un átomo gana un electrón.

- Carácter no metálico: define la tendencia de un átomo para no ceder electrones.

- Carácter metálico: define la tendencia de un átomo para ceder electrones.

- Radio atómico: se identifica con el tamaño del átomo, es la distancia que existe entre el núcleo y el electrón más externo de un átomo. Se define como la mitad de la distancia entre los núcleos de dos átomos adyacentes.

Reactivos de Propiedades periódicas
Soluciones: véase la página 280. Desarrollos: véase la página 423

1. Al avanzar de izquierda a derecha en un periodo, los elementos presentan un aumento de las siguientes propiedades periodicas, excepto de: ______.

   A. Electronegatividad
   B. Radio atómico
   C. Energía de ionización
   D. Carácter no metálico
   E. Afinidad electrónica

2. Seleccionar 2 de las siguientes propiedades que muestren un aumento al recorrer de abajo hacia arriba un grupo de la tabla periódica. Elige la opción que corresponda: ______.

   1. Carácter metálico
   2. Electronegatividad
   3. Radio atómico
   4. Energía de ionización
   5. Afinidad electrónica

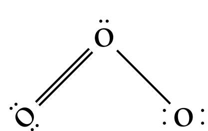
   A. 1, 2
   B. 3, 4
   C. 2, 4
   D. 2, 3
   E. 1, 5

3.4 Enlace químico

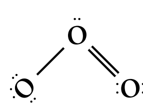
3.4.1 Principios de enlace químico

Para comprender el enlace químico, se revisarán a continuación un conjunto de conceptos, principios y reglas.
El término valencia o número de valencia es una medida de la capacidad de combinación de un elemento para formar enlaces químicos. Por ejemplo, en el agua (H_2O), la valencia del oxígeno es 2, y en el metano (CH_4) la del carbono es 4, lo cual les ofrece una capacidad de combinación de 2 y 4 respectivamente.

La estructura de puntos de Lewis es una representación gráfica que incluye los símbolos de los átomos de una molécula; en ella los enlaces entre los átomos se muestran con líneas o pares de puntos, y los electrones libres o no compartidos se representan con pares de puntos alrededor de la estructura.



A



B

Para establecer una estructura de Lewis, es necesario tener en cuenta los electrones de valencia[17] de cada átomo de oxígeno que interactúan con los de otros átomos para formar los enlaces.

17. Los electrones de valencia se encuentran en los últimos niveles de energía, y son los que intervienen en el enlace químico.

Los enlaces o uniones entre los átomos pueden ser: sencillos, dobles o triples, en donde se comparten uno, dos o tres pares de electrones, respectivamente,

Una configuración electrónica muestra la forma cómo los electrones se distribuyen en un átomo y es un elemento más que ayuda a comprender el enlace químico entre los átomos.

Para establecer una configuración electrónica, es necesario considerar los valores de cuatro números cuánticos: $n, l, s, m,$ que representan las coordenadas de posición de cada electrón de un átomo con respecto a su núcleo y permiten identificar cuáles electrones se encuentran cerca del núcleo (electrones internos) y cuáles más alejados (electrones de valencia).

Cada uno de los cuatro números cuánticos tienen determinados valores y representan lo siguiente:

- n, número cuántico principal, representa los niveles de energía y sus valores van desde 1 hasta 7.

  Los valores del número cuántico n indican el tamaño del orbital, es decir su cercanía al núcleo.

- l, número cuántico del momento angular orbital,[18] representa las formas geométricas de los orbitales y sus valores van desde cero hasta $n-1$.

  Los valores del número cuántico l definen el tipo del orbital:

  - Si $l = 0$ el orbital es de tipo s.
  - Si $l = 1$ los orbitales sons del tipo p.
  - Si $l = 2$ los orbitales sons del tipo d.
  - Si $l = 4$ los orbitales sons del tipo f.

  Las letras s, p, d, f proceden de los nombres en inglés que recibieron los distintos grupos de líneas espectrales relacionadas con cada uno de los cada uno de los orbitales:

  - *Sharp* (s): líneas nítidas pero de poca intensidad.
  - *Principal* (p): líneas intensas.
  - *Difuse* (d): líneas difusas.
  - *Fundamental* (f): líneas frecuentes en muchos espectros.

- m, número cuántico magnético, representa las posibilidades de orientación en el espacio de los orbitales y sus valores van desde -1 hasta $+1$ (incluido el cero).

- s, número cuántico del espín[19] electrónico, representa el sentido de giro del electrón sobre su propio eje y sus valores pueden ser $+\frac{1}{2}$ o bien $-\frac{1}{2}$.

En la configuración electrónica de un elemento es necesario aplicar los siguientes principios y reglas:

- Principio de construcción o regla de Aufbau. La configuración electrónica de cualquier átomo se construye siguiendo el orden que indica la punta de la flecha en el siguiente diagrama, lo cual permitirá ir acomodando los electrones en los diferentes niveles (valores de n) y subniveles (s, p, d f).

  Por *ejemplo*, para el calcio (Ca) que tiene 20 electrones, su configuración es $1s^1\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^6\ 3p^6\ 4s^2$.

18. Orbital atómico. Es una zona del espacio donde existe una alta probabilidad (superior a 90%) de encontrar un electrón. Esto supone considerar al electrón como una nube difusa de carga, alrededor del núcleo, con mayor densidad en las zonas donde la probabilidad de que encuentre dicho electrón sea mayor.

19. El término espín (*spin* en inglés) hace referencia al giro que puede tener un electrón; sus valores pueden ser $\pm\frac{1}{2}$.

n \ i	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1s							
2	2s	2p						
3	3s	3p	3d					
4	4s	4p	4d	4f				
5	5s	5p	5d	5f	5g			
6	6s	6p	6d	6f	6g	6h		
7	7s	7p	7d	7f	7g	7h	7i	
8	8s	8p	8d	8f	8g	8h	8i	8j

- Principio de exclusión de Pauli. Cada orbital será ocupado con un máximo de dos electrones con sus espines apareados, uno positivo y otro negativo, que se simbolizan con dos flechas, una apuntando hacia arriba y la otra hacia abajo respectivamente.
  - El subnivel s tendrá un solo orbital con 2 electrones como máximo.
  - El subnivel p tendrá 3 orbitales con 6 electrones como máximo.
  - El subnivel d tendrá 5 orbitales con 10 electrones como máximo.
  - El subnivel f tendrá 7 orbitales con 14 electrones como máximo.

  Lo anterior también podría representarse empleando el diagrama siguiente para cada nivel de energía desde n igual a 1 hasta n igual a 7.

	s	p	d	f
$n = 1$	2			
$n = 2$	2	6		
$n = 3$	2	6	10	
$n = 4$	2	6	10	14
$n = 5$	2	6	10	
$n = 6$	2	6		
$n = 7$	2			

- Regla de Hund. Para orbitales con la misma energía, cada electrón que se sume a la configuración electrónica ocupará un orbital diferente antes de unirse con otro electrón en el mismo orbital. De esta manera, el átomo será más estable (con energía más baja).

  Ejemplo: distruibuir los siguientes electrones en el subnivel que se indica:

	Forma incorrecta	*Forma correcta*
3 electrones en los orbitales 2p	$\uparrow\downarrow\ \uparrow$ $2p_x^2\ 2p_y^1\ 2p_z^0$	$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow$ $2p_x^1\ 2p_y^1\ 2p_z^1$
5 electrones en los orbitales 4d	$\uparrow\downarrow\ \uparrow\downarrow\ \uparrow$ $4d_1^2\ 4d_2^2\ 4d_3^1\ 4d_4^0\ 4d_5^0$	$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$ $4d_1^1\ 4d_2^1\ 4d_3^1\ 4d_4^1\ 4d_5^1$

Notación para las configuraciones electrónicas

Con base en el número atómico de cada elemento, aplicando los principios y reglas anteriores, se muestran a continuación las configuraciones electrónicas condensada y desarrollada de los primeros 10 elementos de la tabla periódica:

Átomo	*Núm. atómico*	*Configuración condensada*	*Configuración desarrollada*				
H	1	$1s^1$	↑↓	↑			
Be	4	$1s^2 2s^2$	↑↓	↑↓			
B	5	$1s^2 2s^2 2p^1$	↑↓	↑↓	↑		
C	6	$1s^2 2s^2 2p^2$	↑↓	↑↓	↑	↑	
N	7	$1s^2 2s^2 2p^3$	↑↓	↑↓	↑	↑	↑
O	8	$1s^2 2s^2 2p^4$	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑
F	9	$1s^2 2s^2 2p^5$	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑
Ne	10	$1s^2 2s^2 2p^6$	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓

Para simplificar la notación, en una configuración se utiliza entre corchetes el símbolo del gas noble que precede al elemento, el cual tiene niveles de energía completos ($ns^2\ np^6$); después se completa la configuración electrónica. Por *ejemplo*, en el vanadio, el argón es el gas noble que le precede:
$_{18}Ar$: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6$. Entonces: $_{23}V$: [Ar] $4s^2\ 3d^3$.

Los electrones de valencia son los que se encuentran en la capa electrónica más externa del átomo, llamada capa de valencia. Por *ejemplo*, el potasio ($_{19}K$) tiene una configuración electrónica: $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,4s^1$, que indica que hay un electrón de valencia $4s^1$ en cuarto nivel o capa de energía y subnivel s.

La regla del octeto establece la tendencia de los elementos para completar su último nivel de energía con ocho electrones, los átomos adquieren así una configuración muy estable, semejante a la de un gas noble; para que esto ocurra el átomo podrá ceder, ganar o compartir electrones.

En algunos casos esta regla, junto con otras características de los átomos (tales como la electronegatividad), permite predecir el tipo de enlace químico que formará un elemento. Por *ejemplo*, si un átomo tiene 1 electrón de valencia, será más fácil que lo ceda a otro átomo en vez de ganar 7 electrones para completar su octeto, o bien si un átomo tiene 6 electrones de valencia, será más probable que otro átomo le comparta 2 electrones para así completar su octeto.

La justificación a esta regla es que las moléculas o iones tienden a ser más estables cuando la capa de valencia está llena con ocho electrones (configuración de un gas noble). Por esta razón, los elementos tienden siempre a formar enlaces en la búsqueda de su estabilidad.

Sin embargo, aunque la regla del octeto es práctica y útil para predecir el comportamiento de muchas sustancias, presenta numerosas excepciones como por *ejemplo*: PF_5, SiF_6.

Un enlace químico es la fuerza de unión que existe entre dos átomos, cualquiera que sea su naturaleza (metal, no metal), que se origina a partir de un proceso en el que átomos de elementos iguales (I_2, Cl_2) o diferentes (NH_3, HCl), ceden, ganan o comparten sus electrones de valencia para adquirir una configuración electrónica estable, equivalente a la de los gases nobles o inertes.

El hecho de que las sustancias se presenten como moléculas de elementos (H_2, N_2, O_2), moléculas de compuestos (H_2O, CO_2, SO_2) o bien redes cristalinas (Ag, Au, KBr, NaCl) puede ser explicado por la existencia de los distintos tipos de enlace: iónico, covalente, metálico o fuerzas intermoleculares.

El enlace químico permite explicar muchas de las propiedades de las sustancias, como son: temperatura de fusión, densidad, propiedades mecánicas, eléctricas y térmicas, entre otras.

Reactivos de Principios de enlace químico

Soluciones: véase la página 280. Desarrollos: véase la página 424

1. La configuración electrónica del sodio (Na), que tiene número atómico 11 y número de masa 23, es: ______.

   A. $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$
   B. $1s^2\ 2s^2\ 3s^2\ 3p^5$
   C. $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^5$
   D. $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^3$
   E. $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^6$

2. ¿Cómo se representa la formación del SiH_4 utilizando la estructura de Lewis?: ______.

   A.
   $$\cdot\underset{\cdot}{\dot{\mathrm{Si}}}\cdot\ +4\mathrm{H}\cdot \longrightarrow \mathrm{H:H:Si:H:H}$$

   B.
   $$\cdot\underset{\cdot}{\dot{\mathrm{Si}}}\cdot\ +4\mathrm{H}\cdot \longrightarrow :\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{\mathrm{Si}}}:^{4-} + 4\mathrm{H}^{+}$$

   C.
   $$\cdot\underset{\cdot}{\dot{\mathrm{Si}}}\cdot\ +4\mathrm{H}\cdot \longrightarrow \mathrm{H:Si}^{4+} + 4\mathrm{H}:^{-}$$

   D. No es posible representar la estructura de Lewis al ser dos no metales.

   E.
   $$\cdot\underset{\cdot}{\dot{\mathrm{Si}}}\cdot\ +4\mathrm{H}\cdot \longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{H} \\ \cdot\cdot \\ \mathrm{H:Si:H} \\ \cdot\cdot \\ \mathrm{H} \end{array}$$

3.4.2 Enlace iónico o electrovalente

El enlace iónico es la fuerza de atracción eléctrica que mantiene unidos a los iones de signo contrario, cationes y aniones.

Un catión es un átomo que ha perdido al menos un electrón y un anión es un átomo que ha ganado al menos un electrón; éstos se forman a partir de la transferencia de electrones que ocurre entre átomos metálicos y no metálicos.

Por *ejemplo*, los átomos metálicos de los grupos I y II (con uno o dos electrones de valencia) se combinan con los átomos no metálicos de los grupos VI y VII (con seis o siete electrones de valencia); su ubicación en los extremos de la tabla periódica, los primeros a la izquierda, los segundos a derecha, provoca que tengan diferencias muy grandes en sus valores de electronegatividad.

A partir de las configuraciones electrónicas de sodio (grupo I) y flúor (grupo VII), la unión iónica en el fluoruro de sodio (NaF) puede describirse de la siguiente forma:

$$_{11}\mathrm{Na}\ 1s^2\ \underbrace{2s^2\ 2p^6}_{\text{8 electrones}}\ \overbrace{3s^1}^{\text{1 electrón de valencia}}$$

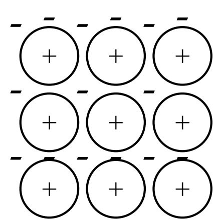
$$_{9}\mathrm{F}\ \ 1s^2\ \underbrace{2s^2\ 2p^5}_{\text{7 electrones}}$$

En las configuraciones electrónicas anteriores se observa que:

- Entre el sodio y el cloro existe una marcada diferencia en sus valores de electronegatividad; el sodio es electropositivo (tiende a perder electrones); el cloro es electronegativo (tiende a ganar electrones).
- El átomo de sodio tiene 11 electrones con un electrón de valencia ubicado en $3s^1$, el cual se transfiere al flúor y así el sodio se transforma en un catión.
- El átomo de flúor tiene 9 electrones de los cuales 7 son de valencia y recibe un electrón del sodio transformándose en un anión.
- Finalmente catión y anión se atraen mutuamente por fuerzas electrostáticas y se forma así un compuesto estable que tiene enlace iónico.

Algunas de las características y propiedades de los compuestos iónicos:

- Son sólidos cuyas partículas se agrupan en redes cristalinas, es decir, son arreglos ordenados a corto y largo alcance, donde de manera alternada se ubican iones positivos y iones negativos en un modelo simétrico, repetitivo y tridimensional.



- No son buenos conductores del calor y la electricidad. La conducción eléctrica sólo ocurre cuando el sólido se disuelve o se encuentra en estado de fusión.
- Son duros,[20] son frágiles,[21] tienen elevados puntos de fusión, son solubles en solventes como el agua y el alcohol. *Ejemplos*: NaCl, KBr, CaF_2, $BeCl_2$.

Reactivos de Enlace iónico o electrovalente

Soluciones: véase la página 280. Desarrollos: véase la página 424

1. Un compuesto iónico es la unión química de: ______.

   A. Dos metales
   B. Dos no metales
   C. Dos metales de transición
   D. Un metal y oxígeno

---

20. Duro. Se resiste a ser rayado, comprimido o cambiar de forma.
21. Frágil. El material es quebradizo y fácilmente se hace pedazos.

E. Un metal y un no metal

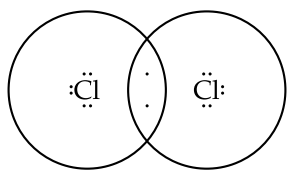
2. Determina algunas características de un compuesto iónico: ______ .

A. Es frágil, suave y conduce bien el calor.
B. Es resistente al calor y conduce bien la corriente eléctrica.
C. Es insoluble, duro y frágil.
D. Es frágil, duro y como sólido no conduce la corriente eléctrica.
E. Es suave y conduce la corriente como sólido.

3.4.3 Enlace covalente

El enlace covalente es la fuerza que mantiene unidos entre sí a los átomos no metálicos. En este tipo de átomos, que son electronegativos, no es posible la transferencia de electrones de un átomo a otro para formar iones de signo opuesto, como ocurre cuando los átomos metálicos reaccionan con los no metálicos, donde los primeros pueden transferir uno o más electrones a los no metales.

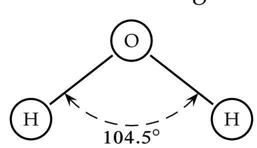
Por tanto, el enlace covalente se forma cuando dos átomos comparten un par de electrones, contribuyendo cada átomo con un electrón; con lo cual ambos átomos adquieren la estructura electrónica de gas noble,[22] ya que el par de electrones compartido es común a los dos átomos. Por *ejemplo*: el gas cloro está formado por moléculas Cl_2 en las que dos átomos de cloro se hallan unidos por un enlace covalente.



Obsérvese que los dos átomos de cloro tienen 8 electrones a su alrededor y, por lo tanto, configuración electrónica de gas noble.

Hay casos donde un mismo átomo puede compartir más de un par de electrones con otros átomos. Por *ejemplo*: en la molécula de agua H_2O, el átomo de oxígeno central comparte un par de electrones con cada uno de los dos átomos de hidrógeno. Estos pares de electrones compartidos se representan habitualmente por una línea entre los dos átomos unidos.

Molécula de agua



Observa que en los enlaces covalentes ΔEN[23] < 1.7.

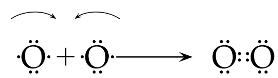
De acuerdo con el número de pares electrónicos compartidos, el enlace covalente puede ser:

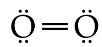
- Simple. Cuando los átomos enlazados comparten un par de electrones. *Ejemplo*: la molécula de hidrógeno H–H:

22. Los gases nobles por lo general tienen 8 electrones de valencia, por lo que se acostumbra decir que el enlace químico se forma cumpliendo la regla del octeto. Muy a menudo la formación de un compuesto covalente sigue la regla del octeto.

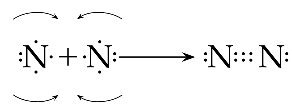
23. ΔEN: diferencia de electronegatividades.

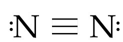
- Doble. Cuando se comparten dos pares de electrones. *Ejemplo*: la molécula de oxígeno O = O.



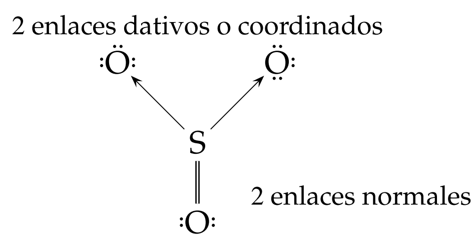


- Triple. Cuando se comparten tres pares de electrones. *Ejemplo*: la molécula de nitrógeno N ≡ N.





- Enlace covalente coordinado. En algunas ocasiones un solo átomo proporciona los dos electrones de un enlace covalente, el cual se conoce como enlace covalente coordinado, o dativo, y se representa por medio de una flecha (→) que parte del átomo que aporta el par de electrones (dador) y se dirige hacia el que no aporta ninguno (receptor). *Ejemplo*: en el trióxido de azufre (SO_3), el átomo de azufre (S) aporta dos pares de electrones para la formación de dos enlaces covalentes coordinados o dativos. Los otros dos enlaces (doble enlace) son covalentes normales.



Según la polaridad, un enlace covalente puede ser:

- Polar. Se presenta entre dos átomos no metálicos diferentes, donde $0 < \Delta EN < 1.7$. *Ejemplo*: yoduro de hidrógeno HI.
- No polar o apolar. Se presenta siempre en moléculas formadas por dos átomos idénticos, donde $\Delta EN = 0$. *Ejemplos*: F_2, H_2.

Reactivos de Enlace covalente

Soluciones: véase la página 280. Desarrollos: véase la página 425

1. Entre los átomos de los siguientes elementos, ¿cuáles pueden unirse mediante enlace covalente?: ________ .

   A. Cloro–sodio
   B. Plata–plata
   C. Flúor–calcio

D. Argón–argón

E. Carbono–oxígeno

2. Si en el HCl existe una diferencia de electronegatividades de 0.9, el enlace es de tipo: ________.

A. Parcialmente covalente

B. Iónico dativo

C. Metálico

D. Covalente dativo

E. Covalente

3. En el ión amonio NH_4^+, el átomo de nitrógeno aporta un par de electrones para la formación de un enlace al que se denomina: ________.

A. Metálico

B. Iónico dativo

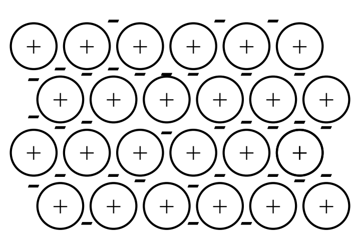
C. Covalente coordinado

D. Parcialmente covalente

E. Covalente normal

3.4.4 Enlace metálico

El enlace metálico puede definirse como la fuerza de atracción eléctrica entre los iones positivos del metal[24] (+) y los electrones de valencia, los cuales generan una nube o mar de electrones (−) alrededor de los iones positivos. Estos electrones no están unidos a ningún átomo del metal en particular y tampoco forman pares sino que están deslocalizados,[25] lo cual permite que se muevan libremente entre los iones positivos como se observa en la siguiente figura:



Las unidades estructurales de los sólidos metálicos son electrones y cationes. Los átomos de los metales tienen pocos electrones en su capa de valencia, por lo general 1, 2 o 3 y tienen tendencia a perderlos formando cationes +1, +2, +3, respectivamente.

Por *ejemplo*, el metal sodio es un conjunto ordenado de iones Na^+ y un mar de electrones distribuidos entre ellos. En este caso cada átomo de sodio deja en libertad su electrón de valencia transformándose el átomo de sodio en un ión Na^+. Los electrones libres de todos los átomos de sodio forman una especie de nube de electrones que ocupan el espacio entre los iones positivos moviéndose a través de él. Esta nube con carga negativa mantiene unidos a los cationes positivos del sodio.

Los metales tienden a tener altos puntos de fusión y ebullición debido a la fuerza del enlace metálico. La fuerza del enlace varía de metal a metal y depende del número de electrones que cada átomo deslocalice en el mar de electrones.

La deslocalización de los electrones en el enlace metálico explica diversas propiedades de los metales:

24. Los iones positivos del metal están constituidos por el núcleo del átomo y los electrones internos.

25. Electrones deslocalizados. Son aquellos que se mueven libremente por todo el material.

- Conductividad eléctrica elevada. La presencia de un gran número de electrones móviles explica por qué los metales tienen conductividad eléctrica cientos de veces mayores que los no metales. Los electrones deslocalizados son libres de moverse a lo largo de la estructura en 3 dimensiones.
- Alta conductividad térmica. La energía calorífica es recogida por los electrones como energía cinética adicional. La energía se transfiere a través del resto del metal por las colisiones entre electrones, que se producen con mucha frecuencia.
- Ductilidad y maleabilidad. La mayoría de los metales son dúctiles (capaces de ser estirados para obtener cables) y maleables (capaces de ser trabajados mediante golpes en láminas delgadas). Esto es debido a la capacidad de los átomos de desplazarse unos sobre otros en nuevas posiciones sin romper el enlace metálico. Como consecuencia de ello, los materiales metálicos se pueden deformar sin romperse, dentro de ciertos límites.
- Insolubilidad en agua y en otros disolventes comunes.

Muchos de los metales que se conocen no son puros, sino aleaciones. Una aleación es una solución sólida que se prepara disolviendo un metal en otro, generalmente cuando ambos están en estado líquido. Las propiedades fisicoquímicas de una aleación son distintas de los metales originales.

Reactivos de Enlace metálico

Soluciones: véase la página 281. Desarrollos: véase la página 425

1. El enlace metálico sucede entre: ______.

   A. Átomos neutros y una nube de electrones.
   B. Iones negativos y una nube de electrones.
   C. Átomos neutros que comparten electrones.
   D. Iones positivos y una nube de electrones.
   E. Iones positivos y negativos.

2. De los siguientes compuestos señala cuáles son de tipo metálico. Elige la opción: ______.

   1. CaO (óxido de calcio)
   2. Fe (hierro)
   3. NaCl (cloruro de sodio)
   4. SiO_2 (dióxido silicio)
   5. Cu (cobre)
   6. Na (sodio)
   7. CaF_2 (difluoruro de calcio)

   A. 2, 4, 7
   B. 1, 4, 7
   C. 1, 3, 4
   D. 2, 5, 6
   E. 3, 5, 6

3. Las siguientes son propiedades de los metales, excepto: ______.

   A. Conductividad eléctrica
   B. Solubilidad en agua
   C. Ductilidad
   D. Conductividad térmica
   E. Maleabilidad

3.4.5 Interacciones por puente de hidrógeno

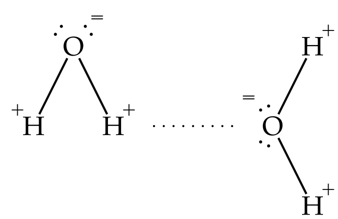
La interacción por puente de hidrógeno es una atracción electrostática entre un átomo altamente electronegativo (como el O, N o F) que posee un par de electrones libres (carga negativa) y un átomo de hidrógeno con carga positiva que está unido covalentemente a un segundo átomo electronegativo (como el O, N o F). Los siguientes ejemplos muestran la interacción por puente de hidrógeno en diversas moléculas:

$$\begin{array}{ll} \text{O–H}\cdots\text{O–H} & \text{(atracción entre moléculas de agua).} \\ \text{–N–H}\cdots\text{O=C–} & \text{(en una proteína).} \\ \text{–O–H}\cdots\text{O=C} & \text{(entre moléculas de agua y de glucosa).} \end{array}$$

Los puentes de hidrógeno se representan con líneas punteadas.

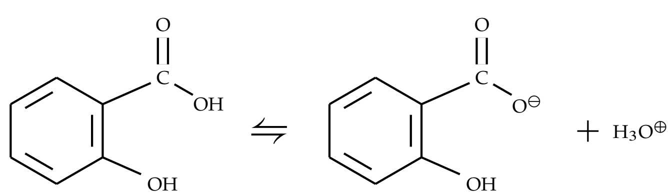
La interacción por puente de hidrógeno puede ser de dos tipos:

- Intermolecular, cuando ocurre entre moléculas. *Ejemplo*:



  La figura anterior representa la interacción por puente de hidrógeno intermolecular en la unión de dos moléculas de agua.

- Intramolecular, cuando ocurre entre diferentes partes de una misma molécula. *Ejemplo*:



Reactivos de Interacciones por puente de hidrógeno

Soluciones: véase la página 281. Desarrollos: véase la página 426

1. De las siguientes sustancias, ¿en cuál está presente la interacción por puente de hidrógeno? Escribe la opción: ______.

   A. Amoníaco (NH_3)
   B. Sulfuro de hidrógeno (H_2S)
   C. Metano (CH_4)
   D. Ácido clorhídrico (HCl)
   E. Fosfina (PH_3)

2. De las siguientes parejas de compuestos, indica cuál puede formar puentes de hidrógeno: ______.

   A. H_2O / NH_3
   B. H_2S / H_2O
   C. CH_4 / H_2O
   D. NH_3 / CH_4
   E. HCl / H_2S

3.5 Nomenclatura

3.5.1 Iones mono y poliatómicos

Un ión monoatómico está conformado por un solo átomo y puede ser de carga positiva o negativa.
Un ión poliatómico es el que está conformado por dos o más átomos químicamente unidos; tiene carga positiva o negativa; los iones son considerados como una unidad en las reacciones químicas.

A continuación se describen las formas utilizadas para nombrar a los compuestos químicos.

Tipos de nomenclatura

1. No recomendadas por la IUPAC.[26]

   - Nomenclatura común, tradicional o funcional: se basa en distinguir los compuestos por una serie de prefijos y sufijos que indican el estado de oxidación del elemento correspondiente.

     Si el elemento tiene un solo estado de oxidación, simplemente se coloca el nombre del elemento precedido de la sílaba de; en algunos casos se puede usar el sufijo –ico.

     Ejemplo: K_2O, óxido de potasio u óxido potásico.

     Cuando el elemento posee solamente dos estados de oxidación, se utiliza el sufijo –oso para el menor número de oxidación y el sufijo –ico para el mayor.

     Si poseen cuatro estados de oxidación ($+1$, $+3$, $+5$ y $+7$), se utilizan los prefijos hipo– y per– para distinguir el menor y el mayor, respectivamente.
   - Nomenclatura antigua: se considera así a la nomenclatura tradicional o funcional.

2. Recomendadas por la IUPAC.

   - Nomenclatura sistemática: comúnmente llamada estequiomérica; en ésta las proporciones en que se encuentran los elementos en una fórmula puede indicarse por medio de prefijos griegos: mono(1), di(2), tri(3), tetra(4), penta(5), hexa(6), hepta(7), etc.; también hemi(1/2) y sesqui(3/2). El prefijo mono puede omitirse. No es necesario mencionar las proporciones estequiométricas[27] si en el compuesto interviene un elemento con número de oxidación constante.
   - Nomenclatura de Stock: en ésta, el número de oxidación[28] del elemento se indica en números romanos, y entre paréntesis, inmediatamente después del nombre. Este número se denomina numeral de Stock. Si en el compuesto interviene un elemento cuyo número de oxidación es constante, es innecesario indicarlo.
   - Nomenclatura de Ewens-Bassett: aquí se indica entre paréntesis la carga total de un ión en lugar del número de oxidación del átomo.

Cationes monoatómicos

Cuando un átomo pierde electrones de valencia,[29] adquiere una carga positiva neta convirtiéndose en un catión.

Para nombrar a los átomos cargados positivamente, se antepone la palabra catión o ión al nombre del elemento.

En los casos en que el átomo adopta más de un estado de oxidación, éste se indica entre paréntesis con un número romano. Algunos *ejemplos* son:

26. IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry): siglas en inglés de la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada.
27. Proporción estequiométrica. Es la proporción mínima, en términos de números enteros, entre los elementos que forman un compuesto.
28. Número de oxidación o estado de oxidación. Es el número que se asigna al átomo e indica los electrones que un átomo pierde o gana en una unión química. Tiene signo. Si en una unión iónica el átomo tiende a ganar electrones, el signo es negativo; y si tiende a perderlos, el signo es positivo. El mismo átomo puede tener más de un número de oxidación, dependiendo de con quién reaccione.
29. Electrones de valencia. Se definen como aquellos que están situados en los orbitales más externos del átomo.

Catión	*Nomenclatura Stock*	*Nomenclatura tradicional*
H^{+}	Ión hidrógeno	Ión hidrógeno
Cu^{+}	Ión cobre (I)	Ión cuproso
Na^{+}	Ión sodio	Ión sodio
Fe^{2+}	Ión hierro (II)	Ión ferroso
Sn^{2+}	Ión estaño (II)	Ión estannoso
I^{+}	Catión yodo	Catión yodo
Li^{+}	Ión litio	Ión litio
Cu^{2+}	Ión cobre (II)	Ión cúprico
K^{+}	Ión potasio	Ión potasio
Fe^{3+}	Ión hierro (III)	Ión férrico
Pb^{4+}	Ión plomo (IV)	Ión plúmbico
Mn^{2+}	Ión manganeso (II)	Ión manganoso

Cationes poliatómicos

Nomenclatura tradicional:
Los que proceden de hidruros llevan el sufijo –onio.

Catión poliatómico que procede de hidruro	*Nomenclatura tradicional*
NH_4^+	Ión amonio
AsH_4^+	Ión arsonio
PH_4^+	Ión fosfonio

Los que proceden de oxoácidos llevan el sufijo –ilo. (Si se usa la nomenclatura Stock, se indicará la valencia en números romanos entre paréntesis).

Catión poliatómico que procede de oxoácido	*Nomenclatura Stock*	*Nomenclatura tradicional*
NO^{+}	Catión monoxonitrógeno (III)	Catión nitrosilo
SO_2^+	Catión monoxoazufre (IV)	Catión sulfinilo
CO_2^+	Catión monoxocarbono (IV)	Catión carbonilo

Aniones monoatómicos

Se llaman aniones a los iones cargados negativamente. Los aniones más simples son los monoatómicos; proceden de la ganancia de uno o más electrones por un elemento electronegativo.

Para nombrar los iones monoatómicos se utiliza la terminación –uro, como en los siguientes *ejemplos*:

Anión monoatómico	*Nombre*
H^-	Ión hidruro
F^-	Ión fluoruro
Te^{2-}	Ión teleruro
Cl^-	Ión cloruro
Br^-	Ión bromuro
I^-	Ión yoduro
S^{2-}	Ión sulfuro
Se^{2-}	Ión seleniuro
C^{4-}	Ión carburo
N^{3-}	Ión nitruro
P^{3-}	Ión fosfuro
As^{3-}	Ión arseniuro

Aniones poliatómicos

Los aniones poliatómicos son los que provienen de moléculas que han perdido uno o más iones de hidrógeno. El ión de este tipo más común y sencillo es el ión hidroxilo OH^- que procede de la pérdida de un ión hidrógeno de una molécula de agua.

La gran mayoría de los aniones poliatómicos proceden de un ácido que ha perdido o cedido sus hidrógenos.

Otros *ejemplos*:

Anión poliatómico	*Nombre*
OH^-	Hidróxido
O_2^{2-}	Peróxido
O_2^-	Superóxido

Oxianiones

Los oxianiones son aniones poliatómicos que provienen de los oxiácidos (veáse página 195) y se nombran de acuerdo con las siguientes reglas:

- Cuando se quitan todos los iones H^+ de un ácido terminado en –ico, el nombre del anión formado termina en –ato. *Ejemplo*: CO_3^{2-} ión carbonato, derivado del ácido carbónico, H_2CO_3.

- Cuando se quitan todos los iones H^+ de un ácido terminado en –oso, el nombre del anión formado termina en –ito. *Ejemplo*: ClO_2^- ión clorito, derivado del ácido cloroso, $HClO_2$.

Ahora bien, los oxianiones terminados en –ito contienen menos oxígeno; los terminados en –ato contienen más oxígeno, como se puede ver en los siguientes *ejemplos*:

Ácido	*Nombre del ácido*	*Anión poliatómico*	*Nomenclatura tradicional*	*Nomenclatura sistemática*
$HClO$	Ácido hipocloroso	ClO^-	Ión hipoclorito	Ión monoxoclorato (I)
$HClO_3$	Ácido clórico	ClO_3^-	Ión clorato	Ión trioxoclorato (V)
$HClO_4$	Ácido perclórico	ClO_4^-	Ión perclorato	Ión tetraoxoclorato (VII)
H_2SO_3	Ácido sulfuroso	SO_3^{2-}	Ión sulfito	Ión trioxosulfato (IV)
H_2SO_4	Ácido sulfúrico	SO_4^{2-}	Ión sulfato	Ión tetraoxosulfato (VI)
HNO_2	Ácido nitroso	NO_2^-	Ión nitrito	Ión dioxonitrato (III)
HNO_3	Ácido nítrico	NO_3^-	Ión nitrato	Ión trioxonitrato (V)
H_3PO_3	Ácido fosforoso	PO_3^{3-}	Ión fosfito	Ión trioxofosfato (V)
H_3PO_4	Ácido fosfórico	PO_4^{3-}	Ión fosfato	Ión tetraoxofosfato (VI)

Oxianiones que tienen uno o dos átomos de hidrógeno extra

Anión	*Nombre*	*Anión con un hidrógeno extra*	*Nombre*
SO_4^{2-}	Sulfato	HSO_4^{2-}	Ión hidrógeno sulfato (bisulfato)
SO_3^{2-}	Sulfito	HSO_3^{2-}	Ión hidrógeno sulfito (bisulfito)
PO_4^{3-}	Fosfato (tribásico)	HPO_4^{3-}	Ión hidrógeno fosfato (dibásico)
PO_4^{3-}	Fosfato (tribásico)	$H_2PO_4^-$	Ión dihidrógeno fosfato (monobásico)

Polianiones que poseen diferentes cantidades de átomos de oxígeno

Algunos átomos, como el cloro, pueden presentar diferentes estados de oxidación de $1-$, $1+$, $3+$, $5+$, $7+$, incrementándose el número de átomos de oxígeno en sus aniones correspondientes.

Anión poliatómico	*Nombre*
ClO^-	Hipoclorito
ClO_2^-	Clorito
ClO_3^-	Clorato
ClO_4^-	Perclorato
CO_3^{2-}	Carbonato
HCO_3^-	Carbonato de hidrógeno (bicarbonato)
$C_2H_3O_2^-$	Acetato

Metales que forman oxianiones

Anión poliatómico	*Nombre*
MnO_4^-	Permanganato
CrO_4^{2-}	Cromo
$Cr_2O_7^{2-}$	Dicromato

Reactivos de Iones mono y poliatómicos

Soluciones: véase la página 281. Desarrollos: véase la página 427

1. ¿Cuáles de los siguientes iones tienen el nombre incorrecto?: ______.

    1. Na^{+}, ión sodio
    2. Fe^{2+}, ión hierro (III)
    3. I^{-}, ión yoduro
    4. NH_4^{+}, ión amonio
    5. NO_2^{-}, ión nitrato

    A. 2, 5
    B. 1, 2
    C. 3, 5
    D. 1, 3
    E. 1, 5

2. Asignar el nombre correcto a los siguientes aniones, relacionando ambas columnas: ______.

1. ClO_2^{-}	a. clorato
2. ClO_3^{-}	b. clorito
3. ClO^{-}	c. perclorato
4. ClO_4^{-}	d. hipoclorito

    A. 1-b, 2-a, 3-d, 4-c
    B. 1-a, 2-b, 3-d, 4-c
    C. 1-c, 2-a, 3-b, 4-d
    D. 1-a, 2-b, 3-c, 4-d
    E. 1-d, 2-a, 3-c, 4-b

3.5.2 Óxidos metálicos y no metálicos

Los óxidos son combinaciones binarias entre el oxígeno y todos los demás elementos químicos con excepción de los gases nobles y el flúor que es un halógeno.

Los óxidos tienen la siguiente fórmula: X_2O_n, donde X es el símbolo del elemento, el subíndice 2 corresponde a la valencia del oxígeno que siempre va actuar con valencia -2, O es el símbolo del oxígeno y la n es la valencia del elemento X, sea metal o no metal.

Para nombrar los óxidos se utilizan 3 nomenclaturas: la tradicional, la sistemática y la de Stock.

Óxidos metálicos

Los óxidos metálicos (básicos) son formados por cualquier metal (M) de valencia (n), unido al oxígeno (O):

$$\mathrm{M + O \rightarrow \text{óxido metálico o básico.}}$$

Ejemplo: $2Mg + O_2 \rightarrow 2MgO$.

Nomenclatura tradicional: óxido + nombre de M terminado en –oso (valencia menor) o –ico (valencia mayor) (en algunos casos, como para el estaño, se cambia la letra ñ por dos letras n).

Nomenclatura sistemática:

$$\text{Óxido} + \text{de} + \text{nombre de M.}$$

En los casos en que M tiene más de una valencia, se antepone el correspondiente prefijo: mono–, di–, tri–, tetra–, penta–, ... indicando el subíndice del anión $(O)^{-}$.

Cuando los dos subíndices (M y O) son 1, el prefijo mono– sólo es necesario utilizarlo como prefijo de la palabra óxido, por ejemplo, CaO (monóxido de calcio); cuando sólo uno de los dos tiene el subíndice 1, puede no utilizarse el prefijo mono–, por ejemplo, K_2O (óxido de dipotasio), en lugar de monóxido de dipotasio.

Nomenclatura Stock:

$$\text{Óxido} + \text{de} + \text{nombre de M.}$$

Si M tiene más de una valencia, se indica el valor de ésta en números romanos y entre paréntesis.

Cuando el metal posee un solo valor de número de oxidación no es necesario especificarlo. En los óxidos metálicos se recomienda usar la nomenclatura de Stock.

Ejemplos de óxidos metálicos:

Fórmula $M + (O)_n$	*Nomenclatura tradicional*	*Nomenclatura sistemática*	*Nomenclatura Stock*
SnO	Óxido estannoso	Monóxido de estaño	Óxido de estaño (II)
SnO_2	Óxido estánnico	Dióxido de estaño	Óxido de estaño (IV)
Cu_2O	Óxido cuproso	Monóxido de dicobre	Óxido de cobre (I)
CuO	Óxido cúprico	Monóxido de cobre	Óxido de cobre (II)
Al_2O_3	Óxido de aluminio	Trióxido de dialuminio	Óxido de aluminio[30]
CaO	Óxido de calcio	Monóxido de calcio	Óxido de calcio[31]
FeO	Óxido ferroso	Monóxido de hierro	Óxido de hierro (II)
Fe_2O_3	Óxido férrico	Trióxido de dihierro	Óxido de hierro (III)
Na_2O	Óxido de sodio	Óxido de disodio[32]	Óxido de sodio[33]

Óxidos no metálicos

Los óxidos no metálicos (ácidos), también llamados anhídridos, son formados por cualquier no metal (NM) de valencia (n), unido al oxígeno (O).

Ejemplo: $C + O_2 \rightarrow CO_2$.

Para nombrar a los óxidos no metálicos se siguen las mismas reglas que para los óxidos metálicos. En la nomenclatura tradicional, se usa la palabra genérica anhídrido, seguida de la específica del no metal terminada en –oso o en –ico, según su valencia sea menor o mayor, respectivamente. Si solamente tiene un número de oxidación, no se usa sufijo. Si se forman más de dos anhídridos se antepone el prefijo hipo– al de menor valencia y per– al de mayor valencia.

30. No se pone nada entre paréntesis porque el Al sólo tiene valencia III.
31. No se pone nada entre paréntesis porque el Ca sólo tiene valencia II.
32. No se usa el prefijo mono– debido a que sólo el O tiene el subíndice 1.
33. No se pone nada entre paréntesis porque el Na sólo tiene valencia I.

Se recomienda usar la nomenclatura sistemática y la de Stock en los óxidos tanto básicos como ácidos, pero, por la aplicación que tienen estos últimos en el correcto aprendizaje de los oxiácidos, se insiste en la nomenclatura tradicional de los óxidos ácidos (anhídridos).

Ejemplos:

Fórmula *NM + (O)$_n$*	*Nomenclatura tradicional*	*Nomenclatura Sistemática (IUPAC)*	*Nomenclatura Stock*
B_2O_3	Óxido bórico	Trióxido de diboro	Óxido de boro
CO	Óxido carbonoso	Monóxido de carbono	Óxido de carbono (II)
CO_2	Anhídrido carbónico/óxido carbónico	Dióxido de carbono	Óxido de carbono (IV)
N_2O	Anhídrido hiponitroso	Óxido de dinitrógeno	Óxido de nitrógeno (I)
N_2O_3	Anhídrido nitroso/óxido nitroso	Trióxido de dinitrógeno	Óxido de nitrógeno (III)
N_2O_5	Anhídrido nítrico	Pentóxido de dinitrógeno	Óxido de nitrógeno (V)
Cl_2O	Anhídrido hipocloroso	Monóxido de dicloro	Óxido de cloro (I)
Cl_2O_3	Anhídrido cloroso	Trióxido de dicloro	Óxido de cloro (III)
Cl_2O_5	Anhídrido clórico	Pentaóxido de dicloro	Óxido de cloro (V)
Cl_2O_7	Anhídrido perclórico	Heptaóxido de dicloro	Óxido de cloro (VII)

Reactivos de Óxidos metálicos y no metálicos

Soluciones: véase la página 281. Desarrollos: véase la página 427

1. Si el Fe tiene una valencia de +3 en el óxido Fe_2O_3, elige la opción que presenta la nomenclatura tradicional, sistemática y de Stock, respectivamente: ________.

   A. Óxido ferroso / óxido de hierro (II) / trióxido de hierro
   B. Trióxido de dihierro / óxido férrico / óxido de hierro (III)
   C. Óxido férrico / óxido de hierro (II) / trióxido de dihierro
   D. Óxido férrico / trióxido de dihierro / óxido de hierro (III)
   E. Óxido de hierro (III) / óxido férrico / trióxido de dihierro

2. Elige los nombre de los óxidos enlistados a la izquierda con base en las nomenclaturas de Stock y tradicional y relaciónalos con la columna de la derecha: ________.

	a. Anhídrido sulfúrico / óxido de azufre (VI)
1. SO	b. Anhídrido sulfuroso / óxido de azufre (IV)
2. SO_2	c. Anhídrido hiposulfuroso/ óxido de azufre (II)
3. SO_3	d. Anhídrido persulfúrico / óxido de azufre (II)
	e. Anhídrido sulfuroso / óxido de azufre (IV)

   A. 1b, 2a, 3c
   B. 1e, 2c, 3d
   C. 1a, 2b, 3c
   D. 1b, 2d, 3e
   E. 1c, 2e, 3a

3.5.3 Hidruros

Los hidruros son las combinaciones binarias del hidrógeno con otro elemento químico. Existen tres clases: metálicos, no metálicos con carácter ácido y no metálicos.

1. Hidruros metálicos (iónicos). Son combinaciones del ión hidruro H^- con cationes metálicos M^{n+}, donde n es la carga del catión. Para su fórmula, primero va el metal y a continuación el hidrógeno, con su correspondiente subíndice. El hidrógeno, por ser más electronegativo que los metales, se coloca a la derecha.

   En la nomenclatura Stock se escribe la palabra hidruro + de + el nombre del metal correspondiente. Si M tiene más de una valencia, se indica el valor de ésta en números romanos entre paréntesis.

   Se recomienda usar la nomenclatura de Stock en los hidruros metálicos.

   Ejemplos:

Hidruro	*Nomenclatura de tradicional*	*Nomenclatura sistemática*	*Nomenclatura Stock*
LiH	Hidruro lítico	Hidruro de litio	Hidruro de litio
AlH_3	Hidruro alumínico	Trihidruro de aluminio	Hidruro de aluminio
PbH_4	Hidruro plúmbico	Tetrahidruro de plomo	Hidruro de plomo (IV)
SnH_2	Hidruro estannoso	Dihidruro de estaño	Hidruro de estaño (II)
SnH_4	Hidruro estánnico	Tetrahidruro de estaño	Hidruro de estaño (IV)
BeH_2	Hidruro berílico	Dihidruro de berilio	Hidruro de berilio
MgH_2	Hidruro de magnesio	Dihidruro de magnesio	Hidruro de magnesio
KH	Hidruro de potásico	Hidruro de potasio	Hidruro de potasio
NiH_3	Hidruro niquélico	Trihidruro de níquel	Hidruro de níquel (III)
CuH_2	Hidruro cúprico	Dihidruro de cobre	Hidruro de cobre (II)
PbH_4	Hidruro plúmbico	Tetrahidruro de plomo	Hidruro de plomo (IV)

2. Hidruros no metálicos de carácter ácido (covalentes). Son combinaciones del H (número de valencia $+1$) con un no metal de los halógenos F, Cl, Br, I (número de valencia -1) y anfígenos S, Se, Te (número de valencia -2); el nombre del no metal termina en –uro, siendo su nomenclatura y formulación a la inversa de los hidruros metálicos, es decir, en su fórmula, primero se escribe el hidrógeno con su correspondiente subíndice y, a continuación, el no metal.

   Estos hidruros dan disoluciones ácidas cuando se disuelven en agua, llamándose en ese caso hidrácidos; en la nomenclatura sistemática se escribe ácido + el no metal con el sufijo –hídrico.

   Se prefiere usar la nomenclatura de Stock para los hidruros en estado gaseoso.

Ejemplos:

Hidruro	*Nomenclatura sistemática (en disolución acuosa[34])*	*Nomenclatura sistemática (en estado gaseoso)*	*Nomenclatura de Stock*
HF	HF_{ac} ácido fluorhídrico	Fluoruro de hidrógeno	Fluoruro de hidrógeno
HCl	HCl_{ac} ácido clorhídrico	Cloruro de hidrógeno	Cloruro de hidrógeno
HBr	HBr_{ac} ácido bromhídrico	Bromuro de hidrógeno	Bromuro de hidrógeno
HI	HI_{ac} ácido yodhídrico	Yoduro de hidrógeno	Yoduro de hidrógeno
H_2S	H_2S_{ac} ácido sulfhídrico	Sulfuro de dihidrógeno	Sulfuro de hidrógeno
H_2Se	H_2Se_{ac} ácido selenhídrico	Seleniuro de dihidrógeno	Seleniuro de hidrógeno
H_2Te	H_2Te_{ac} ácido telurhídrico	Teleruro de dihidrógeno	Teleruro de hidrógeno

3. Hidruros no metálicos (covalentes). Son combinaciones del H (número de valencia +1) con el C, Si, N, P, As, Sb, O. Sus disoluciones acuosas no presentan carácter ácido. Todos reciben nombres particulares aceptados por la IUPAC, por tanto, la nomenclatura más frecuentemente usada es la tradicional.

   Ejemplos:

Hidruro	*Nomenclatura tradicional*	*Nomenclatura sistemática*
NH_3	Amoníaco	Trihidruro de nitrógeno
PH_3	Fosfina	Trihidruro de fósforo
SbH_3	Estibina	Trihidruro de antimonio
SiH_4	Silano	Tetrahidruro de silicio
Si_2H_6	Disilano	Hexahidruro de disilicio
N_2H_4	Hidrazina	Tetrahidruro de dinitrógeno
AsH_3	Arsina	Trihidruro de arsénico
CH_4	Metano	Tetrahidruro de carbono
BH_3	Borano	Trihidruro de boro
BiH_3	Bismutina	Trihidruro de bismuto

Reactivos de Hidruros

Soluciones: véase la página 281. Desarrollos: véase la página 428

1. Da los nombres de Stock de los siguientes hidruros metálicos: CuH_2, KH, AlH_3. ________.

   A. Dihidruro de cobre, hidruro potásico, trihidruro de aluminio.
   B. Hidruro de cobre (II), hidruro de potasio, hidruro de aluminio.
   C. Hidruro cúprico, hidruro potásico, hidruro alumínico.
   D. Dihidruro cuproso, monohidruro de potasio, hidruro de aluminio.
   E. Hidruro cuproso, monohidruro de potasio, trihidruro alumínico.

34. El subíndice ac significa que la substancia se encuentra disuelta en agua.

2. Del listado de la derecha, elige la fórmula correcta para los hidruros no metálicos de la izquierda: ______.

1. Silano
2. Estibina
3. Amoníaco
4. Bismutina
5. Atrazina

a. Si_2H_6
b. N_2H_4
c. BH_3
d. SiH_4
e. NH_3
f. BiH_3
g. SbH_3
h. CH_4

A. 1-a, 2-c, 3-b, 4-h, 5-g
B. 1-d, 2-g, 3-e, 4-f, 5-b
C. 1-g, 2-d, 3-e, 4-c, 5-a
D. 1-a, 2-f, 3-h, 4-g, 5-e
E. 1-h, 2-e, 3-c, 4-b, 5-d

3.5.4 Hidrácidos

Hidrácidos o ácidos hidrácidos son compuestos formados por hidrógeno + no metal de los grupos 16[35] y 17.[36] El hidrógeno actúa en estos compuestos con valencia +1 y el no metal con su respectiva negativa, para conservar la neutralidad del compuesto. Estos compuestos se encuentran en forma natural en estado gaseoso. Se les llama hidrácidos debido a que, al disolverse en agua y disociarse, generan soluciones ácidas.

Para formular los hidrácidos la IUPAC recomienda lo siguiente:

- Colocar el símbolo del hidrógeno a la izquierda y el del no metal a la derecha, ya que es el que tiene valencia negativa.
- Intercambiar los valores de sus valencias colocándolos como subíndices sin la carga.
- El subíndice 1 no se escribe.

En la nomenclatura química tradicional, se utiliza la palabra ácido y el sufijo hídrico, por *ejemplo*, el HCl que en estado gaseoso se denomina cloruro de hidrógeno, en disolución acuosa se nombra ácido clorhídrico. Es importante indicar, después de la fórmula del ácido, que está en disolución acuosa (con subíndice ac) porque si no, no habría diferencia entre las sustancias binarias covalentes y los ácidos. *Ejemplos*:

- Grupo 17, sólo valencia 1:

Hidrácido	*Nomenclatura tradicional*
HF_{ac}	Ácido fluorhídrico
HCl_{ac}	Ácido clorhídrico
HBr_{ac}	Ácido bromhídrico
HI_{ac}	Ácido yodhídrico

35. Familia anfígenos: el grupo de los anfígenos o calcógenos es el grupo conocido antiguamente como VIA, y actualmente como grupo **16** (según la IUPAC) en la tabla periódica de los elementos: azufre, selenio, telurio, así como oxígeno y polonio (estos dos últimos no intervienen en la formación de los hidrácidos).

36. Familia halógenos: los halógenos (del griego, formador de sales) son los elementos químicos que forman el grupo **17** (anteriormente grupo VII A) de la tabla periódica de los elementos: flúor, cloro, yodo, bromo.

- Grupo 16, sólo valencia 2:

Hidrácido	*Nomenclatura tradicional*
H_2S_{ac}	Ácido sulfhídrico
H_2Se_{ac}	Ácido selenhídrico
H_2Te_{ac}	Ácido telurhídrico

Reactivos de Hidrácidos

Soluciones: véase la página 281. Desarrollos: véase la página 428

1. El nombre del HF_{ac} es ________ y el del HI_{ac} es: ________ .

   A. Fluoruro de hidrógeno, yoduro de hidrógeno
   B. Halogenuro de flúor, halogenuro de yodo
   C. Fluorato de hidrógeno, yodato de hidrógeno
   D. Ácido fluorhídrico, ácido yodhídrico
   E. Hidruro de flúor, hidruro de yodo

3.5.5 Oxiácidos

Los oxiácidos, también llamados oxácidos y oxoácidos, son compuestos ternarios ácidos que contienen hidrógeno, oxígeno y otro elemento por lo general no metálico (el elemento central). Los oxiácidos son originados por la combinación del agua con un anhídrido u óxido ácido. Al igual que los ácidos binarios, estos compuestos no son nombrados ácidos a menos que se encuentren en solución acuosa (ac).

La fórmula general para los oxiácidos es H + no metal + O.

Ejemplos:

H_2CO_3 (ácido carbónico).

HNO_3 (ácido nítrico).

$HClO_3$ (ácido clórico).

En algunos casos existen oxiácidos que poseen el mismo elemento central, pero diferente número de átomos de oxígeno.

Ejemplos:

H_2SO_2 (ácido hiposulfuroso).

H_2SO_3 (sulfuroso).

H_2SO_4 (ácido sulfúrico).

Nomenclatura tradicional:

La nomenclatura tradicional en los ácidos oxiácidos es admitida por la IUPAC, como es el caso del ácido sulfúrico H_2SO_4, o el ácido nítrico HNO_3. Los prefijos hipo–, per– y los sufijos –oso, –ico indicarán el número de oxidación del elemento central del ácido, de menor a mayor, es decir:

- Para el número de oxidación más bajo se antepone al nombre del elemento central el prefijo hipo– (del griego *hypo*, inferior) y detrás del nombre el sufijo –oso.
- Para el número de oxidación bajo se añade al nombre del elemento central el sufijo –oso.
- Para el número de oxidación alto se añade al nombre del elemento central el sufijo –ico.

- Para el número de oxidación más alto se añade el prefijo per– (del griego *hyper*, superior) y el sufijo –ico.

  Si el no metal tiene número de oxidación impar, al hidrógeno se le asigna un 1 (no es necesario escribirlo). Por *ejemplo*:

Núm. de oxidación impar (Grupos 15 y 17)	*Prefijo/sufijo*	*Fórmula*	*Nomenclatura tradicional*
$+1$	hipo– $\cdots$ –oso	$HClO$	Ácido hipocloroso
$+3$	–oso	$HClO_2$	Ácido cloroso
$+5$	–ico	$HClO_3$	Ácido clórico
$+7$	per– $\cdots$ –ico	$HClO_4$	Ácido perclórico

  Si el no metal tiene número de oxidación par, al hidrógeno se le asigna un 2.

  Por *ejemplo*:

Num. de oxidación par (Grupo 14)	*Prefijo/sufijo*	*Fórmula*	*Nomenclatura tradicional*
$+2$	–oso	H_2CO_2	Ácido carbonoso
$+4$	–ico	H_2CO_3	Ácido carbónico

Num de oxidación par (Grupo 16)	*Prefijo/sufijo*	*Fórmula*	*Nomenclatura tradicional*
$+2$	hipo $\cdots$ –oso	H_2SO_2	Ácido hiposulfuroso
$+4$	–oso	H_2SO_3	Ácido sulfuroso
$+6$	–ico	H_2SO_4	Ácido sulfúrico

- La suma de los números de oxidación del no metal con el H tiene que ser igual al número del oxígeno. A partir de los prefijos y sufijos se deduce el número de oxidación del elemento central. El hidrógeno tiene número de oxidación $+1$ y el oxígeno -2. Se buscan luego unos coeficientes que hagan que la carga aportada por los oxígenos sea igual y de signo contrario a la aportada por los hidrógenos y el elemento central.

- Prefijos meta– y orto–. En algunos casos, un elemento con un número de oxidación determinado, puede ser el átomo central de dos oxácidos que se diferencian en el número de hidrógenos y oxígenos, de forma que parecen diferenciarse en el número de moléculas de agua H_2O. El prefijo meta– se utiliza para indicar el ácido que tiene menor contenido en agua y el orto– para indicar el ácido que tiene mayor contenido en agua.

  Por *ejemplo*: HIO_4 es el ácido metaperyódico y H_5IO_6 es el ácido ortoperyódico.

  Hay algunos metales que también forman oxiácidos, como el cromo Cr y el manganeso Mn.

Núm. de oxidación	*Fórmula*	*Nomenclatura tradicional*
6	$CrO_3 + H_2O \longrightarrow H_2CrO_4$	Ácido crómico
6	$Cr_2O_6 + H_2O \longrightarrow H_2Cr_2O_7$	Ácido dicrómico
6	$MnO_3 + H_2O \longrightarrow H_2MnO_4$	Ácido mangánico
7	$Mn_2O_7 + H_2O \longrightarrow H_2Mn_2O_8$[37]	Ácido permangánico

Nomenclatura sistemática de la IUPAC:

Para los oxiácidos, la IUPAC además de admitir como válida la nomenclatura tradicional, propone en las normas del año 2005 las siguientes dos nomenclaturas:

- Nomenclatura de adición. Esta nomenclatura da información de la fórmula estructural, al denominar de diferente forma los oxígenos que están unidos a los hidrógenos ácidos (a los que para llamarlos usa hidróxido) y los oxígenos unidos únicamente al elemento central (que se llaman óxido), ambos precedidos por los prefijos de cantidad pertinentes: di–, tri–, tetra–, etc. Se enlistan por orden alfabético seguidos del nombre del átomo central. Esto es:

  Prefijo de cantidad–hidróxido–prefijo de cantidad–óxido–elemento central.

- Nomenclatura de hidrógeno. Se escribe un prefijo: di–, tri–, tetra–, etc., según los hidrógenos que contiene el ácido. A continuación, sin dejar espacios y entre paréntesis se nombra el anión, dependiendo de la nomenclatura de adición, terminado en –ato. Es decir, en general, se nombran los oxígenos que tiene y se finaliza con la raíz del nombre del átomo central acabado en –ato.

  Prefijo de cantidad–hidrógeno–prefijo de cantidad–óxido-elemento central-ato.

Fórmula	*Fórmula Estructural*	*Nomenclatura de adición*	*Nomenclatura de hidrógeno*
$HClO$	$Cl(OH)$	Hidroxidocloro	Hidrógeno (oxidoclorato)
$HClO_2$	$ClO(OH)$	Hidroxidooxidocloro	Hidrógeno (dioxidoclorato)
$HClO_3$	$ClO_2(OH)$	Hidroxidodioxidocloro	Hidrógeno (trioxidoclorato)
$HClO_4$	$ClO_3(OH)$	Hidroxidotrioxidocloro	Hidrógeno (tetraoxidoclorato)
H_2SO_3	$SO(OH)_2$	Dihidroxidooxidoazufre	Dihidrógeno (trioxidosulfato)
H_2SO_4	$SO_2(OH)_2$	Dihidroxidodioxidoazufre	Ddihidrógeno (tetraoxidosulfato)

Reactivos de Oxiácidos

Soluciones: véase la página 281. Desarrollos: véase la página 429

1. ¿Cuál es el nombre correcto del HNO_3?: ______.

   A. Ácido nitroso
   B. Ácido nítrico
   C. Ácido hiponitroso
   D. Ácido pernítrico
   E. Ácido metanítrico

2. Si los números de oxidación del Br (bromo) son +1, +3, +5, +7, ¿cuáles son los nombres de los oxiácidos que se forman cuando el Br actúa con +3 y con +7 respectivamente?: ______.

   A. Ácido bromoso / ácido perbrómico
   B. Ácido hipobromoso / ácido bromoso
   C. Ácido bromoso / ácido brómico
   D. Ácido perbrómico / ácido bromoso
   E. Ácido brómico / ácido perbrómico

37. La fórmula mínima del ácido permangánico es $HMnO_4$.

3.5.6 Hidróxidos

Los hidróxidos o bases[38] son compuestos formados por el anión oxhidrilo (OH^-), también llamado hidróxido, de valencia -1, unido a un elemento metálico (M) de valencia (v), o al catión amonio (NH_4^+). Su fórmula general será $M(OH)_v$, como si fuesen compuestos binarios, es decir, se escribe el símbolo del metal seguido del grupo hidróxido con el número de valencia del metal como subíndice. El grupo hidróxido se coloca siempre a la derecha por ser más electronegativo que el metal. Por *ejemplo* el hidróxido de potasio es KOH y el hidróxido de calcio $Ca(OH)_2$.

Nomenclatura tradicional:

hidróxido + nombre de M terminado en –oso (valencia menor) o –ico (valencia mayor).

Nomenclatura Stock: según la IUPAC, se nombran

usando la palabra hidróxido + de + nombre de M.

Si M tiene más de una valencia, se indica el valor de v en números romanos y entre paréntesis.

Nomenclatura sistemática:

hidróxido + de + nombre de M.

En los casos en que M tiene más de una valencia, se antepone mono–[39], di–, tri–, tetra– ... , indicando el subíndice del anión $(OH)^-$.

Ejemplos:

Fórmula M(OH)v	*Nomenclatura tradicional*	*Nomenclatura Stock*	*Nomenclatura sistemática*
NaOH	Hidróxido sódico	Hidróxido de sodio	Hidróxido de sodio
HgOH	Hidróxido mercuroso	Hidróxido de mercurio (I)	Hidróxido de mercurio
$Hg(OH)_2$	Hidróxido mercúrico	Hidróxido de mercurio (II)	Dihidróxido de mercurio
$Cr(OH)_2$	Hidróxido cromoso	Hidróxido de cromo (II)	Dihidróxido de cromo
$Co(OH)_3$	Hidróxido cobáltico	Hidróxido de cobalto (III)	Trihidróxido de cobalto
$Pb(OH)_2$	Hidróxido plumboso	Hidróxido de plomo (II)	Dihidróxido de plomo
$Pb(OH)_4$	Hidróxido plúmbico	Hidróxido de plomo (IV)	Tetrahidróxido de plomo
$Al(OH)_3$	Hidróxido alumínico	Hidróxido de aluminio[40]	Trihidróxido de aluminio
NH_4OH	Hidróxido amónico	Hidróxido de amonio[41]	Hidróxido de amonio

Para los hidróxidos, que siempre son metálicos, se recomienda usar la nomenclatura de Stock.

Reactivos de Hidróxidos

Soluciones: véase la página 281. Desarrollos: véase la página 430

1. En la siguiente tabla, el nombre sistemático para el $Mn(OH)_4$ es ________, mientras que el nombre de Stock para el $Pb(OH)_2$ es: ________ .

38. Se denominan bases debido al carácter básico de sus disoluciones acuosas y también por la tendencia que tienen los OH^- para reaccionar con los H^+.
39. El prefijo mono– se suele omitir.
40. No se pone nada porque el Al sólo tiene valencia 3.
41. El NH_4OH es el resultado de la disolución de amoníaco NH_3 en agua, ya que el catión amonio se formula como NH_4^+.

Fórmula	*Nomenclatura sistemática*	*Nomenclatura Stock*
$Mn(OH)_4$	?	Hidróxido de manganeso (IV)
$Al\ (OH)_3$	Trihidróxido de aluminio	Hidróxido de aluminio
$Pb(OH)_2$	Dihidróxido de plomo	?
$Co(OH)_3$	Trihidróxido de cobalto	Hidróxido de cobalto (III)

A. Hidróxido de manganeso (II), hidróxido plumboso
B. Hidróxido mangánico, hidróxido de plomo
C. Hidróxido manganoso, hidróxido plúmbico
D. Tetrahidróxido de manganeso, hidróxido de plomo (II)
E. Tetrahidróxido de magnesio, hidróxido de plomo (IV)

2. Elige la fórmula correcta de los siguientes hidróxidos, relacionando ambas columnas : ______.

1. Hidróxido de níquel (III)	a. $Pt(OH)_4$
2. Hidróxido de platino (II)	b. $Co(OH)_3$
3. Hidróxido de cobalto (III)	c. $Pt(OH)_2$
4. Hidróxido de platino (IV)	d. $Co(OH)_2$
5. Hidróxido de cobalto (II)	e. $Ni(OH)_3$

A. 1,a 2,b 3,c 4,d 5,e
B. 1,c 2,d 3,e 4,b 5,a
C. 1,e 2,a 3,d 4,c 5,b
D. 1,e 2,c 3,b 4,a 5,d
E. 1,d 2,e 3,b 4,e 5,c

3.5.7 Sales

Las sales son compuestos iónicos que provienen de la neutralización de un ácido con una base.

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Ácido} & + & \text{base} & \longrightarrow & \text{sal} & + & \text{agua} \\ HCl & + & NaOH & \longrightarrow & NaCl & + & H_2O \end{array}$$

La sal se forma del anión que proviene del ácido más el catión que proviene de la base.

Un ejemplo es la sal de mesa o cloruro de sodio (NaCl), que es el producto de la base hidróxido sódico (NaOH) y ácido clorhídrico (HCl).

Las sales se clasifican en binarias y terciarias (u oxosales, también llamadas oxisales).

Sales binarias

Las sales binarias son compuestos iónicos que provienen de los hidrácidos; están formadas por un metal y un no metal distinto del oxígeno. En las sales binarias, el no metal, al igual que lo hace en las combinaciones con el hidrógeno, siempre utiliza su menor estado de oxidación; se nombra con la terminación –uro.

Nomenclatura sistemática. En la cual la proporción del no metal se nombra con los prefijos mono–, di–, tri–, tetra– . . .

Nomenclatura tradicional. El no metal se nombra con el sufijo –uro y el metal con el sufijo –oso o –ico. Por *ejemplo*: cloruro sódico, NaCl.

Nomenclatura de Stock (IUPAC). El no metal se nombra con el sufijo –uro, luego la palabra de seguida del nombre del metal y, entre paréntesis, el número de oxidación, con números romanos.

Ejemplos:

Fórmula	*Nomenclatura sistemática*	*Nomenclatura Stock*	*Nomenclatura tradicional*
KCl	Monocloruro de potasio	Cloruro de potasio	Cloruro potásico
SnI_4	Tetrayoduro de estaño	Ioduro de estaño (IV)	Ioduro estánnico
SnS	Monosulfuro de estaño	Sulfuro de estaño (II)	Sulfuro estannoso
FeS	Monosulfuro de hierro	Sulfuro de hierro (II)	Sulfuro ferroso
Fe_2S_3	Trisulfuro de hierro	Sulfuro de hierro (III)	Sulfuro férrico
$AuCl_3$	Tricloruro de oro	Cloruro de oro (III)	Cloruro áurico
AuBr	Monobromuro de oro	Bromuro de oro (I)	Bromuro aúrico

Sales terciarias (oxosales)

Las oxosales u oxisales se forman al reaccionar una base con un oxiácido, generándose agua como producto secundario. Surgen al sustituir total o parcialmente a los hidrógenos de un ácido oxoácido u oxiácido por el metal correspondiente, intercambiando los subíndices. En la nomenclatura tradicional, cuando el nombre del ácido termina en –oso, la sal correspondiente se nombra con el sufijo –ito, y cuando el nombre del ácido termina en –ico, la sal correspondiente se nombra con el sufijo –ato; por lo tanto es necesario primero obtener la fórmula del ácido y determinar su nombre para poder establecer la terminación correspondiente. Se clasifican en oxosales neutras, cuando no contienen hidrógeno en su molécula, por *ejemplo*: Na_2CO_3 (carbonato de sodio), y en oxosales ácidas, cuando en su molécula existe hidrógeno, por *ejemplo*: $NaHCO_3$ (carbonato ácido de sodio).

Ácido		*Sal*
–oso	se sustituye por	–ito
–ico	se sustituye por	–ato

Nomenclatura tradicional. Aceptada por la IUPAC, utiliza los prefijos y sufijos: hipo–. . . –ico, –ito, –ato y per–. . . –ato, que derivan del correspondiente ácido. Por *ejemplo* el sulfato sódico sería Na_2SO_4 (ya que deriva del H_2SO_4) y el nitrato férrico sería $Fe(NO_3)_3$ (ya que deriva del HNO_3).

Otros *ejemplos*:

Fórmula	*Nomenclatura tradicional*
$KMnO_4$	Permanganato potásico
$CaSO_4$	Sulfato cálcico
$AgNO_3$	Nitrato de plata
$Fe(NO_2)_3$	Nitrito férrico
$Cu(ClO_4)_2$	Perclorato cúprico
Na_3PO_4	Ortofosfato sódico (fosfato sódico)
$K_2Cr_2O_7$	Dicromato potásico

Nomenclatura sistemática. Recomendada por la IUPAC. No metal con sufijo –ato + (número de oxidación con números romanos) + de + metal (número de oxidación con números romanos).
Las sales del ejemplo anterior se nombrarían:

Na_2SO_4 = tetraoxosulfato (VI) de sodio.

$Fe(NO_3)_3$ = trioxonitrato (V) de hierro (III); también se podría llamar [tris trioxonitrato (V) de hierro]; el prefijo tris– indica el número de oxidación del hierro.

Fórmula	*Nomenclatura sistemática*
$KMnO_4$	Tetraoxomanganato (VII) de potasio
$CaSO_4$	Tetraoxosulfato (VI) de calcio
$AgNO_3$	Trioxonitrato (V) de plata
$Fe(NO_2)_3$	Dioxonitrato (III) de hierro (III)
$Cu(ClO_4)_2$	Tetraoxoclorato (VII) de cobre (II)
Na_3PO_4	Tetraoxofosfato (V) de sodio
$K_2Cr_2O_7$	Heptaoxodicromato (VI) de potasio

Sales ácidas de oxoácidos

Los ácidos con más de un hidrógeno pueden ceder solamente alguno de ellos formando una sal ácida, por lo tanto, se pueden formar iones en los cuales quedan uno o más hidrógenos.

Por *ejemplo*: del ácido sulfúrico H_2SO_4 se puede obtener el hidrogenosulfato de sodio, $NaHSO_4$, también nombrado sulfato ácido de sodio en la nomenclatura tradicional.

Nomenclatura tradicional:

Se nombran igual que las sales binarias, pero colocando los prefijos mono–, di–, tri–, etc., delante del nombre del metal, según el número de hidrógenos sustituidos; cuando se sustituye la mitad de los hidrógenos, se antepone el prefijo bi– al nombre de la sal o se intercala la expresión ácido de.

Ejemplos:

Fórmula	*Nomenclatura tradicional*
$NaHCO_3$	Carbonato ácido de sodio (Bicarbonato sódico)
$CaHSO_4$	Sulfato ácido de calcio (Bisulfato cálcico)
$NaHSO_3$	Sulfito ácido de sodio (Bisulfito sódico)
KH_2PO_4	Ortofosfato diácido de potasio (Bifosfato potásico)

Nomenclatura sistemática (IUPAC): (di) hidrógeno no metal –ato (número de oxidación con números romanos) de metal (número de oxidación con números romanos). Se nombran anteponiendo la palabra hidrógeno precedido de los prefijos di–, tri–, tetra–, etc., según el número de hidrógenos del anión. *Ejemplos*:

Fórmula	*Nomenclatura sistemática*
$NaHCO_3$	Hidrógenotrioxocarbonato (IV) de sodio (Hidrógenocarbonato de sodio)
$CaHSO_4$	Hidrógenotetraoxosulfato (VI) de calcio (Hidrógenosulfato de calcio)
$NaHSO_3$	Hidrógenotrioxosulfato (IV) de sodio (Hidrógenosulfito de sodio)
KH_2PO_4	Dihidrógenotetraoxofosfato (V) de potasio (Dihidrógenofosfato de potasio)

Reactivos de Sales

Soluciones: véase la página 282. Desarrollos: véase la página 430

1. Usando la nomenclatura de Stock, nombra las siguientes sales binarias: Fe_2S_3, PbI_2, KCl. Escribe la opción correcta: ________.

   A. Trisulfuro de dihierro / diyoduro de plomo / monocloruro de potasio

   B. Sulfuro de hierro / yoduro de plomo / clorato de potasio

   C. Sulfuro de hierro (III) / yoduro de plomo (II) / cloruro de potasio

   D. Sulfuro férrico / yoduro plúmbico / cloruro potásico

   E. Trisulfuro de hierro / diyoduro plumboso / monocloruro de potasio

3.5.8 Hidrocarburos (alcanos, alquenos y alquinos)

Los hidrocarburos son compuestos orgánicos que se componen únicamente por átomos de carbono e hidrógeno. La estructura molecular de los hidrocarburos consiste en un armazón de átomos de carbono a los que se unen átomos de hidrógeno.

Las cadenas de átomos de carbono pueden ser lineales o ramificadas; abiertas o cerradas

$$CH_3–CH_2–CH_2–CH_2–CH_3$$

Pentano (lineal abierta)

$$\begin{array}{c}
\qquad\qquad\;\; CH_3 \\
\qquad\qquad\;\; | \\
CH_3–CH_2–CH–CH3
\end{array}$$

2–metilbutano (ramificada abierta)

Los hidrocarburos se pueden clasificar como alifáticos y aromáticos.
Los alifáticos, a su vez, se pueden clasificar como alcanos, alquenos y alquinos, según los tipos de enlace que unen entre sí a los átomos de carbono, esto es, sencillo ($C-C$), doble ($C=C$) o triple ($C\equiv C$).

Los alcanos contienen únicamente enlaces sencillos en su estructura. Por esto contienen el máximo número posible de átomos de hidrógeno por átomo de carbono (también llamados hidrocarburos saturados). Su fórmula general es C_nH_{2n+2}, donde n es el número de átomos de carbono. Un *ejemplo* de un alcano es el etano C_2H_6:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H & & H & & \\
 & & | & & | & & \\
H & - & C & - & C & - & H \\
 & & | & & | & & \\
 & & H & & H & &
\end{array}$$

Un tipo particular de alcanos son los cicloalcanos, cuyo nombre se debe al hecho de que forman anillos o ciclos. Tienen por fórmula general C_nH_{2n}.

Los alquenos, también conocidos como olefinas, contienen un doble enlace ($C=C$) en su estructura. Su fórmula general es C_nH_{2n}. El alqueno más simple es el eteno, comúnmente denominado etileno C_2H_4:

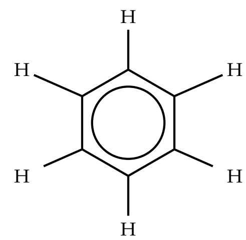
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H & & H & & \\
 & & | & & | & & \\
H & - & C & = & C & - & H
\end{array}$$

Los alquinos contienen un triple enlace ($C\equiv C$) en su estructura y tienen por fórmula general C_nH_{2n-2}. El alquino más simple es el etino, comúnmente denominado acetileno C_2H_2:

$$H - C \equiv C - H$$

En los hidrocarburos aromáticos los átomos de carbono están unidos formando una estructura de anillo plano que contiene enlaces tanto sigma (σ) como Pi (π) entre átomos de carbono.
Los enlaces (σ) se forman entre dos átomos de un compuesto covalente debido a la superposición directa o frontal de los orbitales; es más fuerte y determina la geometría de la molécula. El enlace sigma se manifiesta cuando se superponen dos orbitales s.
El enlace Pi (π) se forma después del enlace sigma; es el segundo o tercer enlace formado entre dos átomos, debido a la superposición lateral de los orbitales p. Sus electrones se encuentran en constante movimiento.

El benceno (C_6H_6) es el ejemplo mejor conocido de hidrocarburo aromático.



Los alquenos, alquinos e hidrocarburos aromáticos se conocen como hidrocarburos insaturados por contener menos hidrógeno que un alcano con el mismo número de átomos de carbono.

Nomenclatura de los hidrocarburos

Los hidrocarburos se nombran siguiendo las principales reglas de la nomenclatura de compuestos orgánicos, de acuerdo con la IUPAC.

Alcanos lineales. Se nombran mediante un prefijo que indica el número de átomos de carbono de la cadena y el sufijo –ano.

Num. de C	*Prefijo*	*Num. de C*	*Prefijo*	*Num. de C*	Prefijo
1	met–	6	hex–	11	undec–
2	et–	7	hept–	12	dodec–
3	prop–	8	oct–	13	tridec–
4	but–	9	non–	14	tetradec–
5	pent–	10	dec–	15	pentadec–

Ejemplos:

$$CH_3 - CH_3$$
Etano

$$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_3$$
Butano

$$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_3$$
Octano

Grupos alquilo. Se forman cuando un alcano pierde un átomo de hidrógeno. Se nombran, sustituyendo en el nombre del alcano correspondiente, el sufijo –ano por –ilo. *Ejemplos*:

$$CH_3 - CH_2 -$$
Etilo

$$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2 -$$
Butilo

$$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 -$$
Octilo

Los grupos alquilo no son compuestos por sí mismos, sino que forman parte de moléculas más grandes. Se emplea el símbolo R para representar a un grupo alquino cualquiera.

Alcanos de cadena ramificada.[42] Los alcanos con cuatro o más átomos de carbono también pueden formar cadenas ramificadas, y se les llama entonces hidrocarburos de cadena ramificada. El isómero[43] en el que un grupo CH_3 se ramifica de la cadena principal se identifica como el isómero iso– (por ejemplo, isobutano). De acuerdo con la IUPAC, los nombres de los isómeros de butano y pentano son 2-metilpropano y 2-metilbutano, respectivamente.

Podemos resumir entonces, lo que sigue, respecto a la nomenclatura de los alcanos:

1. Se identifica la cadena continua más larga de átomos de carbono, la cual determina el nombre base del alcano de acuerdo a la tabla anterior. La cadena más larga no siempre está escrita en línea recta.

2. Si una molécula tiene dos o más cadenas de igual longitud, se selecciona como cadena base o principal aquella que tiene un mayor número de sustituyentes.[44]

3. Se nombran todos los grupos unidos a la cadena más larga como sustituyentes alquilo.

4. Se numera la cadena principal comenzando por el extremo más próximo a uno de los sustituyentes. Si hay dos sustituyentes a igual distancia de los extremos, se utiliza el orden alfabético para determinar la numeración. En una cadena lateral, el carbono 1 es siempre el que está unido a la cadena principal.

5. Para nombrar el compuesto se colocan los nombres de los sustituyentes por orden alfabético precedidos del número de C al que están unidos y de un guión y, a continuación, se añade el nombre de la cadena principal.

6. En el caso de cicloalcanos, se antepone el prefijo ciclo– al nombre del alcano de igual número de átomos de C.

7. En cicloalcanos monosustituidos, si el sustituyente tiene más átomos de C, entonces ese sustituyente es la cadena principal. Si el sustituyente tiene igual o menor número de átomos de C, entonces la cadena principal es el cicloalcano, y no es necesario numerar la posición de aquel.

8. Si son cicloalcanos multisustituidos, se ordenan alfabéticamente los sustituyentes y se indica su posición relativa con un número asignándoles los localizadores más bajos posibles.

Nomenclatura IUPAC de alquenos

1. Se busca la cadena más larga que contenga el doble enlace y, tomando como base ese número de carbonos, se nombra utilizando el sufijo –eno.

2. Se numera la cadena principal de forma que se asigne el número más bajo posible al doble enlace.

3. La ubicación del doble enlace se indica mediante un prefijo numérico que designa el número del átomo de carbono que interviene en el doble enlace y está más próximo a un extremo de la cadena.

4. Si hay más de un doble enlace, se indica la posición de cada uno de ellos y se emplean los sufijos –dieno, –trieno, –tetraeno, etcétera.

   Ejemplos:

$$\underset{\text{1 penteno}}{CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH = CH_2}$$

$$\underset{\text{1, 3 hexadieno}}{CH_2 = CH - CH = CH - CH_2 - CH_3}$$

42. Cadena ramificada. Es aquella principal de la cual pueden surgir diversas ramificaciones o radicales hidrocarbonados (R). Una ramificación de 1 C será metil; de 2, etil; de 3, propil, y así sucesivamente.

43. Isómeros. Son compuestos que tienen la misma fórmula molecular, pero diferente estructura así como propiedades distintas.

44. Sustituyente. Diferentes grupos que pueden sustituir a los átomos de hidrógeno en un hidrocarburo. Por *ejemplo*, los alquilos. Sustituyentes o radicales (R) es lo mismo.

Nomenclatura IUPAC de alquinos

1. Se identifica la cadena continua más larga de la molécula que contiene el triple enlace, y se nombra utilizando el sufijo –ino.
2. Se numera la cadena principal, asignando el número más bajo posible al triple enlace.
3. La posición del triple enlace se indica mediante un prefijo numérico que designa el primero de los átomos que intervienen en el triple enlace.
4. Si hay más de un triple enlace, se indica la posición de cada uno y se emplean los sufijos –diino, –triino, –tetraino, etcétera.
5. Si en una molécula existen dobles y triples enlaces, se les asigna los números más bajos posible y, al nombrarlos, se indican primero los dobles y después los triples enlaces.
6. Si un doble y triple enlace están en posiciones equivalentes, se empieza a numerar por el extremo que da el número más bajo al doble enlace.

   Ejemplos:

$$\begin{array}{l} CH_3—C \equiv C—CH—C \equiv CH \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ \qquad\qquad\qquad\quad CH_2—CH_2—CH_3 \end{array}$$

3–propil–1,5–heptadiino

$$CH_2 = CH—C \equiv CH$$

1–buten–3–ino

Reactivos de Hidrocarburos (alcanos, alquenos y alquinos)

Soluciones: véase la página 282. Desarrollos: véase la página 430

1. De acuerdo con la IUPAC, el compuesto de la izquierda se denomina ______, y el de la derecha ______.

$$CH_3 - CH = CH - CH_2 - CH_3 \qquad\qquad CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - C \equiv CH$$

   A. 2-penteno, 6-heptino
   B. 2-heptino, 3-penteno
   C. 4-pentano, 2 heptino
   D. 2-penteno, 1-heptino
   E. 3-penteno, 6-heptino

2. Indica el nombre del siguiente compuesto usando el sistema de nomenclatura IUPAC: ______ .

$$\begin{array}{l} CH_3—C \equiv C—CH—C \equiv CH \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ \qquad\qquad\qquad\quad CH_2—CH_2—CH_3 \end{array}$$

   A. 2-dimetilpentano
   B. 4-metilhexano
   C. 1-metilheptano
   D. 3-metilhexano
   E. 3-metilhexano

3.6 Reacciones químicas

3.6.1 Tipos de reacciones químicas (síntesis, descomposición y desplazamiento)

Una reacción química, cambio químico o fenómeno químico, es el proceso en el cual, una o más sustancias (los reactivos o reactantes) se transforman, cambiando su estructura molecular y sus enlaces en otras sustancias (productos).

La representación simbólica de una reacción se denomina ecuación química; en ella se utilizan algunos símbolos tales como: (l) líquido, (s) sólido, (g) gaseoso y (ac) acuoso (en solución), (E) energía, (Δ) suministro de calor, ($\uparrow$) gas que se desprende, ($\downarrow$) sólido que se precipita y ($\leftrightarrow$) reacción reversible. Toda reacción debe estar balanceada, es decir, el número de átomos que reaccionan debe ser igual al de átomos que se producen.

Tipos de reacciones químicas

Las reacciones químicas se clasifican en cuatro grandes grupos:

- Síntesis o combinación. Donde dos o más sustancias (elementos o compuestos) se combinan para formar un solo producto. *Ejemplo*:

$$2\mathrm{Al}_{(s)} + 3O_{2(g)} \longrightarrow 2\mathrm{AlO}_{3(s)}$$

- Descomposición. Es el opuesto de la síntesis, es decir, cuando una sola sustancia se descompone para formar dos o más sustancias (elementos o compuestos). Generalmente requieren calor o algún tipo de energía. *Ejemplo*:

$$2\mathrm{KNO}_3 \xrightarrow[\Delta]{} 2\mathrm{KNO}_{2(s)} + \mathrm{O}_2 \uparrow$$

- Desplazamiento o simple sustitución. Un elemento sustituye o desplaza a otro en un compuesto. *Ejemplo*:

$$2\mathrm{AgNO}_{3(ac)} + \mathrm{Cu}_{(s)} \longrightarrow \mathrm{Cu(NO_3)}_{2(ac)} + 2\mathrm{Ag}_{(s)}$$

- Doble desplazamiento o metátesis. Ocurre por intercambio de iones entre las sustancias que participan en la reacción. *Ejemplo*:

$$\mathrm{AgNO}_{3(ac)} + \mathrm{NaCl}_{(ac)} \longrightarrow \mathrm{NaNO}_{3(ac)} + \mathrm{AgCl}_{(s)}$$

Reactivos de Tipos de reacciones químicas (síntesis, descomposición y desplazamiento)

Soluciones: véase la página 282. Desarrollos: véase la página 431

1. Del siguiente listado, ¿cuáles son reacciones de desplazamiento o simple sustitución? Indica la opción: ______ .

   1. $\mathrm{Fe}_{(s)} + \mathrm{CuSO}_{4(ac)} \longrightarrow \mathrm{FeSO}_{4(ac)} + \mathrm{Cu}_{(s)}$
   2. $2\mathrm{HgO}_{(s)} \xrightarrow[\Delta]{} 2\mathrm{Hg}_{(l)} + \mathrm{O}_{2(g)}$
   3. $\mathrm{CaO}_{(s)} + \mathrm{H_2O}_{(l)} \longrightarrow \mathrm{Ca(OH)}_{2(ac)}$
   4. $\mathrm{Sn}_{(s)} + 2\mathrm{HCl}_{(ac)} \longrightarrow \mathrm{SnCl}_{2(ac)} + \mathrm{H}_{2(g)}$
   5. $\mathrm{Cl}_{2(g)} + 2\mathrm{NaBr}_{(ac)} \longrightarrow 2\mathrm{NaCl}_{(ac)} + \mathrm{Br}_{2(g)}$

   A. 1, 2, 3
   B. 2, 3, 4
   C. 1, 4, 5
   D. 2, 4, 5
   E. 3, 4, 5

2. Para las siguientes reacciones, en el orden en que se encuentran, indicar el tipo de reacción: ______.

   1. $4Al_{(s)} + 3O_{2(g)} \longrightarrow 2Al_2O_{3(s)}$
   2. $AgNO_{3(ac)} + HCl_{(ac)} \longrightarrow AgCl_{(s)} + HNO_{3(ac)}$
   3. $CaCO_{3(s)} \longrightarrow CaO_{(s)} + CO_{2(g)}$
   4. $SO_3 + H_2O \longrightarrow H_2SO_4$

   A. Descomposición, síntesis, doble desplazamiento, síntesis
   B. Síntesis, desplazamiento, descomposición, doble desplazamiento
   C. Síntesis, doble desplazamiento, descomposición, síntesis
   D. Doble desplazamiento, síntesis, desplazamiento, descomposición
   E. Desplazamiento, descomposición, doble desplazamiento, síntesis

3.6.2 Reacciones ácido–base

Las reacciones ácido–base o de neutralización son un tipo especial de reacción de doble desplazamiento que tienen lugar cuando reaccionan los iones que se forman al entrar en contacto un ácido y una base, obteniéndose una sal neutra y agua. *Ejemplo*:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{HBr} & + & \text{NaOH} & \longrightarrow & \text{NaBr} & + & H_2O. \\ \text{Ácido} & & \text{base} & & \text{sal} & & \text{agua} \end{array}$$

El ión H^+ en el ácido reacciona con el ión OH^- en la base, formándose agua. Por otra parte, el ión Br^- en el ácido reacciona con el ión Na^+ en la base, formándose la sal NaBr.

Principales teorías ácido–base

Teoría de Arrhenius:

- Ácido: sustancia que en solución acuosa aumenta la concentración de iones hidronio H_3O^+ o de iones hidrógeno H^+. *Ejemplo*:

$$HNO_3 + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + NO_3^-$$

- Base: sustancia que en solución acuosa aumenta la concentración de iones oxhidrilo OH^-. *Ejemplo*:

$$NaOH + H_2O \longrightarrow Na^+ + OH^- + H_2O.$$

Teoría de Brønsted–Lowry:

- Ácido: sustancia capaz de ceder un protón H^+.
- Base: sustancia capaz de aceptar un protón H^+

En general, según Brønsted–Lowry, cualquier reacción ácido–base se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ácido AH} & + & \text{base B} & \leftrightharpoons & \text{ácido } BH^+ & + & \text{base } A^- \\ \text{Cede un protón} & & \text{acepta un protón} & & \text{ácido conjugado} & & \text{base conjugada} \end{array}$$

Donde el ácido AH y la base A^- representan un par conjugado y el ácido BH^+ y la base B representan otro par conjugado, entendiéndose por par conjugado aquel cuyos elementos están relacionados entre sí por la transferencia de un protón.

Ejemplo de pares conjugados:

Par conjugado

$$\underbrace{H_2O}_{\text{Base}} + \overbrace{HF}^{\text{Ácido}} \leftrightharpoons \underbrace{H_3O^+}_{\text{Ácido}} + \overbrace{F^-}^{\text{Base}}$$

Par conjugado

Sustancias anfóteras. Son sustancias o iones que actúan como ácidos o bases.

Por *ejemplo* el agua:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ácido A} & + & \text{base B} & \leftrightharpoons & \text{ácido B} & + & \text{base A} \\ H_2O_{(l)} & + & H_2O_{(l)} & \leftrightharpoons & H_3O^+_{(ac)} & + & OH^-_{(ac)}. \end{array}$$

Otro *ejemplo* es el ion bicarbonato (HCO_3^-):

$$\begin{array}{ccccccc} HCO^-_{3(ac)} & + & OH^-_{(ac)} & \leftrightharpoons & H_2O_{(l)} & + & CO^{2-}_{3(ac)} \\ \text{Ácido} & & \text{base} & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} HCO^-_{3(ac)} & + & HCl_{(ac)} & \leftrightharpoons & H_2CO_{3(ac)} & + & Cl^-_{(ac)} \\ \text{Base} & & \text{ácido} & & & & \end{array}$$

Todos los ácidos de Arrhenius son también ácidos de Brønsted.
Todas las bases de Arrhenius son también bases de Brønsted.

Teoría de Lewis.

Ácido: sustancia que acepta un par de electrones provenientes de una base.

Base: sustancia capaz de ceder un par de electrones.

Según esta teoría, toda reacción entre un ácido y una base forma un enlace covalente coordinado al donar un par de electrones, ello da como resultado un complejo ácido–base.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ácido} & + & \text{base} & \longrightarrow & \text{complejo ácido–base} \\ A & + & :B & \longrightarrow & A:B. \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} :NH_3 & + & BF_3 & \longrightarrow & H_3N:BF_3. \\ \text{Base} & & \text{ácido} & & \end{array}$$

Los ácidos y bases son electrólitos fuertes cuando se ionizan totalmente en disolución y se denominan ácidos fuertes y bases fuertes. Los que son electrólitos débiles (parcialmente ionizados) se denominan ácidos débiles y bases débiles.

Reactivos de Reacciones ácido–base

Soluciones: véase la página 282. Desarrollos: véase la página 432

1. De las siguientes reacciones, ¿cuáles corresponden al tipo ácido–base? Elige la opción: ________.

   1. $HBr + NH_4OH \longrightarrow NH_4Br + H_2O$
   2. $CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O$
   3. $2Fe + 6NaBr \longrightarrow 2FeBr_3 + 6Na$
   4. $H_2SO_4 + 2NaOH \longrightarrow Na_2SO_4 + 2H_2O$

5. $NaOH + KNO_3 \longrightarrow NaNO_3 + KOH$

A. 1, 4
B. 1, 2
C. 2, 4
D. 3, 4
E. 1, 5

2. Con base en la teoría Brønsted-Lowry, indicar cuál afirmación es cierta para la siguiente reacción en solución acuosa. Elige qué opción corresponde: ______.

$$HCl_{(g)} + H_2O_{(l)} \longrightarrow H_3O^+_{(ac)} + Cl^-_{(ac)}$$

A. Cl^- es la base conjugada de HCl
B. H_2O es el ácido conjugado de H_3O^+
C. H_3O^+ es la base conjugada de H_2O
D. HCl es el ácido conjugado de H_3O^+
E. H_2O es la base conjugada de HCl

3.6.3 Reacciones de combustión

Una reacción de combustión consiste en la oxidación rápida exotérmica[45] que sucede al combinarse una sustancia (o una mezcla de ellas), denominada combustible, con el oxígeno o bien con una mezcla de sustancias que contengan oxígeno, denominada comburente, produciendo una llama que es una masa gaseosa incandescente la cual emite luz y calor. El aire atmosférico es el comburente más habitual.

Los combustibles pueden ser sólidos (carbón, madera); líquidos (gasolina, diesel) y gaseosos (butano, gas natural).

Los productos de una combustión son denominados humos y pueden ser N_2, CO_2, H_2O, SO_2. Los más comunes son CO_2, H_2O.

Según la cantidad de oxígeno disponible, la combustión puede verificarse de manera completa o incompleta:

- Completa. El combustible se quema hasta el máximo grado posible de oxidación, por lo cual no habrá sustancias combustibles en los humos.

  Ejemplos de reacción de combustión completa:

  - Respiración celular: donde la glucosa al reaccionar con el oxígeno genera bióxido de carbono, agua y energía.
    $$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O + \text{energía}.$$
  - Combustión completa del metano: el combustible arde y se produce una llama azul.
    $$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$

- Incompleta. El combustible no se oxida completamente porque la cantidad de oxígeno es limitada, formándose sustancias que pueden seguir oxidándose.

  Ejemplos de reacción de combustión incompleta:

45. Una reacción exotérmica es cualquier reacción química en la que se libera energía.

– Combustión incompleta del metano; se produce monóxido de carbono.

$$2CH_4 + 3O_2 \rightarrow 2CO + 4H_2O$$

– Combustión incompleta del metano, se produce hollín: el combustible arde y se produce una llama amarilla

$$CH_4 + O_2 \rightarrow C + 2H_2O$$

- Combustión de combustibles fósiles. Los combustibles fósiles están formados por hidrocarburos. La combustión completa de éstos da como resultado la producción de bióxido de carbono CO_2 y agua H_2O, mientras que cuando es incompleta se producen monóxido de carbono CO y carbono C (hollín).

Reactivos de Reacciones de combustión
Soluciones: véase la página 282. Desarrollos: véase la página 433

1. De las siguientes opciones, eligir la que no corresponde a una reacción de combustión: ________.

   A. $N_2H_4 + O_2 \rightarrow N_2 + 2H_2O +$ energía
   B. $C_6H_6 + \frac{15}{2}O_2 \rightarrow 6CO_2 + 3H_2O +$ energía
   C. $C_{10}H_8 + 12O_2 \rightarrow 10CO_2 + 4H_2O +$ energía
   D. $4NH_3 + 7O_2 \rightarrow 4NO_2 + 6H_2O +$ energía
   E. $C_2H_4 + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 2H_2O +$ energía

2. De las siguientes reacciones, ¿cuáles corresponden a combustión incompleta?: ________.

   1. $C_8H_{18} + \frac{17}{2}O_2 \rightarrow 8CO + 9H_2O$
   2. $C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$
   3. $C_8H_{18} + \frac{25}{2}O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O$
   4. $C_6H_{14} + 4O_2 \rightarrow CO + 5C + 7H_2O$
   5. $CH_4 + O_2 \rightarrow C + 2H_2O$

   A. 1, 4
   B. 2, 3
   C. 1, 5
   D. 4, 5
   E. 1, 3

3.6.4 Reacciones óxido–reducción

Las reacciones de óxido–reducción (redox) son todas aquellas reacciones en solución acuosa que involucran una transferencia de electrones entre las substancias reactantes.

En estas reacciones, el número de oxidación de un átomo, ión o molécula cambia al ganar o perder un electrón. En toda reacción redox, se llevan a cabo de manera simultánea la oxidación y la reducción. Un componente (átomo, ión, molécula) se oxida cuando pierde electrones, con lo cual su número de oxidación aumenta (se hace más positivo). El componente que se oxida actuará como agente reductor, provocando con ello que otro componente se reduzca.
Ejemplo:

$$Fe^{+2} \xrightarrow{-1e^-} Fe^{+3}$$

Por otra parte, un componente se reduce cuando gana electrones; esto es, su número de oxidación disminuye (se hace más negativo). El componente que se reduce será el agente oxidante, por favorecer la oxidación de otro.

$$O_2^0 \longrightarrow 2O^{-2}$$

En resumen:

$$\begin{array}{rcl} \text{El componente oxidado} & \longrightarrow & \text{agente reductor.} \\ \text{El componente reducido} & \longrightarrow & \text{agente oxidante.} \end{array}$$

Un *ejemplo* de reacción redox es la reacción entre ácido clorhídrico (HCl) y el metal zinc (Zn):

$$Zn + 2HCl \rightarrow Zn^{2+} + H_2 + 2Cl^-$$

En ella los átomos de Zn pierden 2 electrones y son oxidados para formar iones Zn^{2+}, lo cual se expresa en la semirreacción:

$$Zn_{(s)} \rightarrow Zn^{2+}_{(ac)} + 2e^-$$

Por su parte, los iones H^+ del HCl ganan 2 electrones y son reducidos a átomos H, los cuales se combinan para formar moléculas H_2, de acuerdo con la siguiente semirreacción:

$$2H^+_{(ac)} + 2e^- \rightarrow H_{2(g)}$$

Combinando ambas semirreacciones, la ecuación general para la reacción es:

$$\begin{array}{ccccccc} Zn_{(s)} & + & 2H^+_{(ac)} & \rightarrow & Zn^{2+}_{(ac)} & + & H_{2(g)} \\ \text{Oxidado} & & \text{Reducido} & & & & \\ \text{Agente} & & \text{Agente} & & & & \\ \text{reductor} & & \text{oxidante} & & & & \end{array}$$

Donde el Zn tiene número de oxidación 0 y es oxidado a Zn^{2+}, es decir, aumentó su número de oxidación: $0 \rightarrow 2^+$.

El H^+ tiene número de oxidación 1^+ y es reducido a H_2, es decir, disminuyó su número de oxidación: $1^+ \rightarrow 0$.

Al escribir las ecuaciones balanceadas para las reacciones entre componentes en una solución, se aplican dos principios:

1. La ecuación balanceada sólo incluye los componentes que participan en la formación de los productos. Por *ejemplo*: en la reacción entre el HCl y el Zn, los iones Cl^- no estuvieron involucrados, ni incluidos en la ecuación balanceada (el número de oxidación de los iones Cl^- no cambió, es decir, no es oxidado ni reducido).

2. La carga total, cero o diferente de cero, debe ser la misma, en ambos lados de la ecuación balanceada.

Reglas para la asignación de números de oxidación

Para identificar este tipo de reacciones, hay que tener presente los cambios en los números de oxidación entre reactantes y productos. Para determinar el estado o número de oxidación, existen las siguientes reglas:

1. El número de oxidación de un átomo individual es 0, por *ejemplo*, He, O_2.

2. El número de oxidación de un ión monoatómico es igual a la carga del ión, por *ejemplo*, el número de oxidación del H^+ es 1^+ y el del ión N^{3-} es 3^-.

3. Los átomos de metales alcalinos (grupo I) tienen un número de oxidación de 1^+ en sus compuestos, y los alcalinotérreos (grupo II), un estado de oxidación de 2^+ en sus compuestos.

4. Todos los halógenos tienen un número de oxidación de 1^- en sus compuestos, excepto en compuestos con oxígeno u otros halógenos, donde su estado de oxidación puede ser positivo.

5. El hidrógeno generalmente tiene un número de oxidación de 1^+ en sus compuestos, excepto en hidruros de metal, por *ejemplo*, LiH, donde su número de oxidación es 1^-.

6. El oxígeno generalmente tiene un estado de oxidación de 2^-, excepto en los peróxidos, donde su número de oxidación es 1^-, y en los hiperóxidos donde es de $\frac{1}{2}^-$. Por *ejemplo*, en el peróxido de hidrógeno o agua oxigenada H_2O_2, el número de oxidación es 1^-.

7. La suma de los números de oxidación de todos los átomos en un compuesto neutro es igual a cero; para los iones poliatómicos es igual a la carga del ión.

Ejemplos:

$1^+\ 2^-$	$1^+\ 1^-$	$1^+\ 1^-$	$1^+\ \frac{1}{2}^-$	0	$4^+\ 2^-$	$1^+\ 6^+\ 2^-$
N_2O	LiH	Na_2O_2	KO_2	N_2	SO_3^{2-}	$K_2Cr_2O_7$

Reactivos de Reacciones óxido–reducción

Soluciones: véase la página 282. Desarrollos: véase la página 433

1. Del siguiente listado, determinar el número de oxidación del elemento en color: ______.

   1 $CuSO_4$

   2 Na_2NO_3

   A. $2^+, 4^-$

   B. $6^-, 2^+$

   C. $4^+, 6^+$

   D. $4^+, 2^+$

   E. $6^+, 4^+$

2. En la siguiente ecuación, identifica en el orden: átomo oxidado, átomo reducido, agente oxidante y agente reductor:

$$Fe + CuSO_4 \rightarrow FeSO_4 + Cu$$

   A. Fe, S, Fe, S

   B. Cu, Fe, Fe, Cu

   C. Fe, Cu, Cu, F

   D. Cu, Fe, Cu, Fe

   E. Fe, O, O, Fe

3.6.5 Balanceo de ecuaciones por tanteo y por el método redox

La ley de la conservación de la materia especifica que el número de átomos de los reactivos o reactantes debe ser igual al número de átomos de los productos. Las ecuaciones químicas deben cumplir esta ley y, si esto no se cumple, deberán balancearse por el método de tanteo o por el método redox.

Método de tanteo

Este método consiste en observar las ecuaciones y colocar coeficientes a la izquierda de cada sustancia, hasta tener igual número de átomos tanto en reactantes como en productos, para lo cual se balancean los átomos de los elementos de acuerdo con el siguiente orden:

- Metálicos
- No metálicos
- De hidrógeno
- De oxígeno

Ejemplo:

$$Zn + HCl \rightarrow Zn^{2+} + H_2 + Cl^-$$

Al balancear los átomos de los elementos metálicos:

$$Zn + HCl \rightarrow Zn^{2+} + H_2 + Cl^-$$

En este caso no hay cambio para el Zn, ya que hay un átomo tanto en reactantes como en productos. Balanceando los átomos de los elementos no metálicos:

$$Zn + 2HCl \rightarrow Zn^{2+} + H_2 + 2Cl^-$$

Se pone coeficiente 2 donde aparece el Cl tanto en reactantes como en productos. Al balancear los átomos de hidrógeno, queda balanceada la ecuación, dado que en este caso no existen átomos de oxígeno:

$$Zn + 2HCl \rightarrow Zn^{2+} + H_2 + 2Cl^-$$

Método redox

Ya que en los procesos de óxido–reducción hay un intercambio de electrones, las ecuaciones químicas estarán balanceadas cuando el número de electrones cedidos por el agente oxidante sea igual al recibido por el agente reductor. A partir de esto, el número de electrones intercambiados se calcula teniendo en cuenta la variación de los números de oxidación de los elementos.

Para utilizar este método, es necesario identificar la sustancia que gana electrones y la que los pierde; además se requiere manejar los términos que aparecen en la siguiente tabla:

Balanceo de ecuaciones	*Cambio en electrones*	*Cambio de número de oxidación*
Oxidación	Pérdida	Aumento
Reducción	Ganancia	Disminución
Agente oxidante (sustancia que se reduce)	Gana	Disminuye
Agente reductor (sustancia que se oxida)	Pierde	Aumenta

Los dos métodos más comunes para el balanceo de reacciones redox son:

- Método del cambio del número de oxidación

  Como su nombre lo indica, el balanceo se basa en los cambios de los números de oxidación de las especies que reaccionan.

  Para balancear por este método, se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Determinar los números de oxidación de los diferentes compuestos que existen en la ecuación.
2. Analizar cada uno de los elementos, comparando el primer miembro de la ecuación con el segundo, para identificar que elementos químicos cambian sus números de oxidación. Por *ejemplo*:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & 3^{+}\ 2^{-} \\ \mathrm{Fe} & + & \mathrm{O_2} & \rightarrow & \mathrm{Fe_2O_3} \end{array}$$

   Los elementos que cambian su número de oxidación son el hierro, Fe, que pasa de $0 \rightarrow 3^{+}$ y el oxígeno, O, que pasa de $0 \rightarrow 2^{-}$.
3. Se comparan los números de los elementos que variaron, en la escala de óxido–reducción.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & 3^{+}\ 2^{-} \\ \mathrm{Fe} & + & \mathrm{O_2} & \rightarrow & \mathrm{Fe_2O_3} \end{array}$$

   El hierro (Fe) se oxida en 3 y el oxígeno (O) se reduce en 2.
4. Si el elemento que se oxida o se reduce tiene número de oxidación 0, se multiplican los números oxidados o reducidos por el subíndice del elemento que tenga número de oxidación 0. Veamos:

$$\begin{aligned} &\text{El Fe se oxida en } 3 \times 1 = 3. \\ &\text{El O se reduce en } 2 \times 2 = 4. \end{aligned}$$

5. Los números que resultaron se cruzan, es decir, el número del elemento que se oxidó se pone al que se reduce y viceversa:

$$4\mathrm{Fe} + 3\mathrm{O_2} \rightarrow 2\mathrm{Fe_2O_3}.$$

   Los números obtenidos finalmente se escriben como coeficientes en el miembro de la ecuación que tenga más términos y de ahí se continua balanceando la ecuación por el método de tanteo.

   En este paso la reacción ya quedó balanceada, pues se cumple la ley de la conservación de la materia.

- Método del ión–electrón

  Consiste en los siguientes pasos:

  1. Identificar los componentes de oxidación y reducción de la reacción.
  2. Separar la reacción en semirreacción de oxidación y semirreacción de reducción.
  3. Balancear cada semirreacción tanto atómicamente como electrónicamente.
  4. Igualar la transferencia de electrones entre la semirreacción de oxidación y la semirreacción de reducción.
  5. Volver a combinar las dos semirreacciones para formar la reacción redox completa.

  Ejemplo:

  Balancear la siguiente reacción redox en solución ácida:

$$\mathrm{Cu_{(s)}} + \mathrm{HNO_{3(ac)}} \rightarrow \mathrm{Cu^{2+}_{(ac)}} + \mathrm{NO_{(g)}}$$

  1. Identificar qué está siendo oxidado y qué está siendo reducido.

     Para identificar cuáles átomos están siendo reducidos u oxidados, se deben asignar los números de oxidación a cada átomo de la reacción, para lo cual se tienen que revisar las reglas de asignación de números o estados de oxidación en el subtema Reacciones óxido–reducción.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cu_{(s)}}: \mathrm{Cu} = 0 \\ &\mathrm{HNO_3}: \mathrm{H} = 1^{+}, \mathrm{N} = 5^{+}, \mathrm{O} = 6^{-} \\ &\mathrm{Cu^{2+}}: \mathrm{Cu} = 2^{+} \\ &\mathrm{NO_{(g)}}: \mathrm{N} = 2^{+}, \mathrm{O} = 2^{-} \end{aligned}$$

El número de oxidación del Cu cambió ($0 \rightarrow 2^{+}$); al perder $2e^{-}$, es oxidado en esta reacción.

El número de oxidación del N cambió ($5^{+} \rightarrow 2^{+}$); al ganar $3e^{-}$, es reducido en esta reacción.

2. Separar la reacción en dos semirreacciones: oxidación y reducción.

$$\text{Oxidación: } Cu \rightarrow Cu^{2+}$$
$$\text{Reducción: } HNO_3 \rightarrow NO$$

3. Balancear cada semirreacción tanto por estequiometría (atómicamente) como por carga electrónica (electrónicamente).

   Esto se logra mediante la adición de sustancias a la reacción. La única regla es que las sustancias que se pueden adicionar deben estar ya en la solución. Éstas incluyen agua (H_2O), iones H^{+} (en soluciones ácidas), iones OH^{-} (en soluciones básicas) y electrones.

   Empezar con la semirreacción de oxidación:

   La semirreacción ya está balanceada atómicamente. Para balancearla electrónicamente, deben añadirse dos electrones del lado del producto.

$$Cu \rightarrow Cu^{2+} + 2e^{-}$$

   Ahora, balancear la reacción de reducción.

   La primera etapa consiste en balancear todos los átomos, excepto oxígeno e hidrógeno.

$$HNO_3 \rightarrow NO$$

   La segunda etapa es balancear los átomos de oxígeno. Esto se hace adicionando agua al lado que necesite más oxígeno. En este caso, el lado reactante tiene 3 oxígenos y el de los productos tiene solamente 1 oxígeno. Añadir 2 moléculas de agua al lado del producto.

$$HNO_3 \rightarrow NO + 2H_2O$$

   La tercera etapa es balancear los átomos de hidrógeno. Esto se logra adicionando iones H^{+} al lado que necesite más hidrógeno. El lado reactante tiene 1 átomo de hidrógeno, mientras que el lado del producto tiene 4. Añadir 3 iones H^{+} al lado reactante.

$$HNO_3 + 3H^{+} \rightarrow NO + 2H_2O$$

   La ecuación está balanceada atómicamente, pero no eléctricamente. La etapa final es balancear la carga añadiendo electrones al lado más positivo de la reacción.

   En el lado de los reactivos, la carga total es 3, mientras que el lado del producto es neutro. Para contrarrestar la carga 3^{+}, añadir 3 electrones al lado reactante.

$$HNO_3 + 3H^{+} + 3e^{-} \rightarrow NO + 2H_2O$$

   Ahora la semirreacción de reducción está balanceada.

4. Igualar la transferencia de electrones.

   En las reacciones redox, el número de electrones ganados debe ser igual al número de electrones perdidos. Para conseguir esto, cada reacción es multiplicada por números enteros.

   La semirreacción de oxidación tiene 2 electrones, mientras que la semirreacción de reducción tiene 3 electrones. Su mínimo común denominador es 6 electrones. Multiplicar la semirreacción de oxidación por 3 y la de reducción por 2.

$$3Cu \rightarrow 3Cu^{2+} + 6e^{-}$$
$$2HNO_3 + 6H^{+} + 6e^{-} \rightarrow 2NO + 4H_2O$$

5. Volver a combinar las semirreacciones.

   Esto se logra mediante la suma de las dos reacciones juntas. Una vez que se suman, anular todo lo que aparece en ambos lados de la reacción.

$$\begin{array}{rl} 3Cu \rightarrow 3Cu^{2+} + 6e^- & \\ 2HNO_3 + 6H^+ + 6e^- \rightarrow 2NO + 4H_2O & + \\ \hline 3Cu + 2HNO_3 + 6H^+ + 6e^- \rightarrow 3Cu^{2+} + 2NO + 4H_2O + 6e^- & \end{array}$$

   Ambos lados tienen 6 electrones que pueden ser cancelados.

$$3Cu + 2HNO_3 + 6H^+ \rightarrow 3Cu^{2+} + 2NO + 4H_2O$$

   Ahora está balanceada la reacción completa.

Reactivos de Balanceo de ecuaciones por tanteo y por el método redox
Soluciones: véase la página 282. Desarrollos: véase la página 434

1. Elegir la opción que corresponda al balanceo correcto por tanteo, de la siguiente ecuación: ______ .

$$KOH + H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4 + H_2O$$

   A. $3KOH + H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4 + H_2O$
   B. $6KOH + H_3PO_4 \rightarrow 2K_3PO_4 + 6H_2O$
   C. $3KOH + H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4 + 3H_2O$
   D. $KOH + 2H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4 + 3H_2O$
   E. $6KOH + 2H_3PO_4 \rightarrow 2K_3PO_4 + 5H_2O$

2. Balancear la siguiente ecuación de reacción redox en solución ácida por el método del ión electrón: ______ .

$$MnO_4^- + I^- \rightarrow I_2 + Mn^{2+}$$

   A. $5I^- + 8H^+ + MnO_4^- \rightarrow 5I_2 + Mn^{2+} + 8H_2O$
   B. $10I^- + 8H^+ + 2MnO_4^- \rightarrow 5I_2 + 2Mn^{2+} + 4H_2O$
   C. $10I^- + 16H^+ + 2MnO_4^- \rightarrow 5I_2 + 2Mn^{2+} + 8H_2O$
   D. $10I^- + 16H^+ + MnO_4^- \rightarrow 5I_2 + Mn^{2+} + 8H_2O$
   E. $5I^- + 8H^+ + MnO_4^- \rightarrow 5I_2 + 2Mn^{2+} + 8H_2O$

3.6.6 Cálculos estequiométricos

La estequiometría es la parte de la química que se encarga de calcular las proporciones de reactivos y productos en una reacción química y se basa en tres leyes:

1. Ley de la conservación de la materia o ley de Lavoisier,[46] que es la más importante en química.

---

46. Ley de Lavoisier. Se puede enunciar de distintas formas:

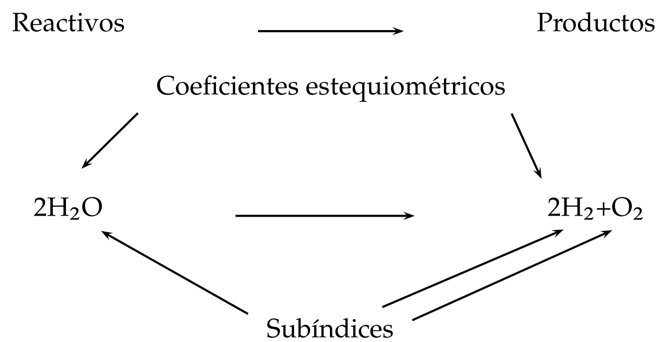
   1 La materia ni se crea, ni se destruye, sólo se transforma.
   2 En una reacción química, la suma de la masa de los reactivos es igual a la suma de la masa de los productos.
   3 En una reacción química, los átomos no desaparecen, simplemente se ordenan de otra manera.

2. Ley de la composición constante o ley de Proust.[47]

3. Ley de las proporciones múltiples o ley de Dalton.[48]

Los cálculos estequiométricos permiten conocer la masa de los reactivos necesarios para obtener una determinada cantidad de productos y viceversa.

Dichos cálculos se basan en las relaciones fijas de combinación que existen entre las sustancias en las reacciones químicas balanceadas; tales relaciones están indicadas por los subíndices numéricos que aparecen en las fórmulas y por los coeficientes estequiométricos:



Ecuación química balanceada

El O_2 no lleva coeficiente estequiométrico, pero al ser 1, en este caso no se escribe. En general, cuando en un reactivo o en un producto no aparece un coeficiente estequiométrico, se considera que éste es 1.

Los coeficientes estequiométricos en reactivos y productos se expresan en moles e indican la proporción o relación estequiométrica con la que reaccionan los reactivos para dar como resultado los productos de la reacción. De acuerdo con la ley de Proust, dicha proporción, o relación, es una constante para cada reacción. Al conocer la relación estequiométrica dada por los coeficientes estequiométricos, se puede calcular la cantidad de reactivos que se necesitan para generar una cantidad definida de productos, o la cantidad de productos que se forma con una cantidad definida de reactivos.

Por *ejemplo*, en la reacción balanceada

$$2H_2O \rightarrow 2H_2 + O_2$$

los coeficientes estequiométricos indican que, por cada 2 moléculas de agua (H_2O), se forman 2 moléculas de hidrógeno (H_2) y 1 molécula de oxígeno (O_2). También se puede decir que 2 moles de moléculas de agua producirán 2 moles de moléculas de hidrógeno y 1 mol[49] de moléculas de oxígeno. Considerar los coeficientes como moles, en lugar de moléculas, sirve para efectuar los cálculos estequiométricos.

La masa de cualquier mol es la masa molecular expresada en gramos.

En la reacción anterior, la masa molecular de cada compuesto involucrado se calcula de la siguiente manera:

Si las masas atómicas del hidrógeno y del oxígeno son:

$$M(H) = 1 \text{ u};^{50} \text{ la } M(O) = 16 \text{ u}.$$

47. Ley de Proust (ley de proporciones definidas). Establece que un compuesto químico puro siempre contiene los mismos elementos y en la misma proporción.

48. Ley de Dalton. Establece que la masa de un elemento se combina con una masa fija de otro elemento en una relación de números enteros.

49. Mol. Es la cantidad de sustancia que contiene tantas entidades elementales (por *ejemplo*, átomos, moléculas, etc.) como los átomos que existen en 0.012 kg (12 g) de carbono-12; 1 mol $= 6.022 \times 10^{23}$ entidades.

50. La unidad de masa atómica, u, se define como la doceava parte de la masa del isótopo más abundante del carbono (el carbono-12), cuyo valor es aproximado a la masa del átomo de hidrógeno que fue tomada inicialmente como patrón.

Entonces las masas moleculares del gas hidrógeno, del gas oxígeno y del agua (número de átomos del elemento multiplicado por la M del elemento) son:

$$\begin{aligned} M(H_2) &= 2 \times M(H) = 2 \times 1\ u = 2\ u; \\ M(O_2) &= 2 \times M(O) = 2 \times 16\ u = 32\ u; \\ M(H_2O) &= 2 \times M(H) + 1 \times M(O) = [2 \times 1\ u + 1 \times 16\ u] = 18\ u. \end{aligned}$$

De tal manera que la masa de 1 mol de cada sustancia es:

$$\begin{aligned} M(H_2) &= 2\ g/mol; \\ M(O_2) &= 32\ g/mol; \\ M(H_2O) &= 18\ g/mol. \end{aligned}$$

Al considerar los coeficientes estequiométricos como moles:

$2H_2O$	$\rightarrow$	$2H$	$+$	O_2
$M\ (2H_2O) = 36\ u$		$M(2H) = 2\ u$		$M(O)_2 = 2\ u$
2 moles		2 moles		1 mol
$2\ \text{moles} \times 18\ g/mol = 36\ g$		$2\ \text{moles} \times 2\ g/mol = 4\ g$		$1\ \text{mol} \times 32\ g/mol = 32\ g$

Lo anterior demuestra que se cumple la ley de Lavoisier ya que antes de la reacción había 36 g de reactivos y después de la reacción hay igualmente 36 g ($4 + 32 = 36$) de productos.

Composición porcentual a partir de la fórmula

En ocasiones es importante conocer la composición porcentual en peso que tienen los elementos que forman un compuesto; dicho porcentaje no cambia y es independiente de la cantidad del compuesto. Por ejemplo, si se desea verificar la pureza del compuesto, podría compararse su composición calculada con base en su fórmula química, con la obtenida experimentalmente.

El cálculo de la composición porcentual es sencillo, si se conoce la fórmula química. Dicho cálculo depende del peso fórmula de la sustancia, del peso atómico del elemento de interés y del número de átomos que hay de ese elemento en la fórmula química.

Para calcular la composición porcentual de un compuesto, se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{Porcentaje del elemento} = \frac{(\text{átomos del elemento})(\text{masa atómica del elemento})}{\text{masa molecular del compuesto}} \times 100\%.$$

Es recomendable confirmar que el resultado es correcto sumando los porcentajes obtenidos: el resultado final deberá ser 100%.

Ejemplo: encontrar los porcentajes de masa de Na, H, C, O en el $NaHCO_3$ (bicarbonato de sodio):

1. De acuerdo con la tabla periódica, las masas atómicas de los elementos son:

   $Na = 23\ u$, $H = 1\ u$, $C = 12\ u$, $O = 16\ u$.

2. Masa molecular del compuesto:

   $NaHCO_3 = 1(23\ u) + 1\ (1\ u) + 1\ (12\ u) + 3\ (16\ u) = 84\ u$.

3. Aplicando la fórmula, se obtienen los porcentajes de cada elemento en el compuesto:

$$\begin{aligned}
\text{Porcentaje de Na} &= \frac{(1)(23\text{ u})}{84\text{ u}} \times 100\,\% &&= 27.36\,\% \\
\text{Porcentaje de H} &= \frac{(1)(1\text{ u})}{84\text{ u}} \times 100\,\% &&= 1.20\,\% \\
\text{Porcentaje de C} &= \frac{(1)(12\text{ u})}{84\text{ u}} \times 100\,\% &&= 14.30\,\% \quad + \\
\text{Porcentaje de O} &= \frac{(3)(16\text{ u})}{84\text{ u}} \times 100\,\% &&= \underline{57.14\,\%} \\
& && \ 100.00\,\%.
\end{aligned}$$

Reactivos de Cálculos estequiométricos

Soluciones: véase la página 282. Desarrollos: véase la página 435

1. Dados los siguientes datos: M(C)= 12 u, M(H) = 1 u, M(O) = 16 u, encontrar la masa molecular de la glucosa cuya fórmula es $C_6H_{12}O_6$. Indica la opción que corresponde: ______.

   A. 24 u
   B. 362 u
   C. 90 u
   D. 180 u
   E. 216 u

2. Determinar la composición porcentual del $NaNO_3$, es decir, el porcentaje en que se encuentran presentes el Na, el N y el O, respectivamente, partiendo de los siguientes datos:

$$M(Na) = 23\text{ u}, \quad M(N) = 14\text{ u}, \quad M(O) = 16\text{ u}.$$

   Escribe la opción: ______.

   A. 23%, 14%, 16%
   B. 16.5%, 27.0%, 56.5%
   C. 27.0%, 16.5%, 56.5%
   D. 23%, 14%, 48%
   E. 27%, 56%, 16.5%

4. Lingüística del texto

4.1 Comprensión textual

4.1.1 Análisis y síntesis de textos

Hay diferencia entre leer y comprender un texto. Leer es cambiar del código escrito[51] al código oral. Comprender consiste en identificar el tema y los subtemas de un texto y presentar los asuntos sobresalientes brevemente con nuestras palabras. Es decir: analizar[52] y sintetizar[53] un discurso. Algunos autores denominan "resumen" a lo que nosotros llamamos "síntesis". Empleamos los términos "resumen" y "síntesis" como sinónimos.

Ejemplificamos lo anterior con este fragmento:

> ¿Saborea un platillo que percibe a varios metros de distancia? Entonces puede estar seguro de que en su cerebro se ha liberado una buena cantidad de dopamina.
> Un grupo de científicos ha descubierto que oler comida o incluso su mínima degustación, antes de ingerirla, puede producir en el cerebro el aumento de una sustancia química llamada dopamina, un neurotransmisor relacionado con la sensación de placer.

Este texto señala que la percepción olfativa de los alimentos trae como consecuencia el incremento de la existencia de un neurotransmisor en el cerebro llamado dopamina.

El texto tiene dos partes: una introductoria y otra informativa. La primera parte es una motivación para el lector y, con base en ella, se proporciona la información. En la segunda, el enunciado da solidez al texto: "Un grupo de científicos ha descubierto. . . "

En color presentamos un ejemplo de síntesis y en el párrafo que le sigue, uno de análisis. Empleamos 26 palabras en nuestra síntesis, contra 65 que tiene el fragmento que estudiamos. Como se observa, el análisis da cuenta de los elementos del texto y de sus características.

Es necesario señalar que algunas personas entienden que resumir consiste en subrayar lo más importante de lo que se ha leído para posteriormente unirlo. Es decir copiar y pegar. Eso no es resumen, habría que llamarlo plagio.

Reactivos de Análisis y síntesis de textos

Soluciones: véase la página 283. Desarrollos: véase la página 437

Lee el texto. Resuelve los dos reactivos siguientes.

51. En el código escrito se usan grafías (letras) para representar fonemas, por ejemplo: la grafía x representa al fonema /s/ en Xochimilco; a los fonemas /k/ /s/ en exacto; al fonema /x/ (con sonido de jota) en México.

52. El análisis es distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos.

53. La síntesis es la composición de un todo mediante sus elementos.

Herbicidas herbales[54]

Las hierbas silvestres que crecen alrededor de los cultivos son un enemigo constante de los agricultores, ya que roban nutrientes, luz y agua. Para evitar que invadan las áreas de siembra, hoy se emplean herbicidas sintéticos, si bien han resultado tóxicos y contaminantes; además, las hierbas silvestres terminan por volverse resistentes a ellos.
Un grupo de agrónomos ha encontrado que algunas plantas tienen su propia manera de atacar a otra, cuando ésta intenta crecer en sus inmediaciones; para ello produce sustancias que impiden su desarrollo. A esto se lo conoce como alelopatía.
Los investigadores piensan que es posible aprovechar estas plantas para mejorar el rendimiento agrícola sin dañar el ambiente.
Un ejemplo es el sorgo, cuya raíz libera una sustancia, llamada sorgoleone, que es muy tóxica para otras plantas. Si se efectúa una rotación de algún cultivo con este cereal, por ejemplo sembrar sorgo en una temporada y trigo en otra, el rendimiento de este último aumenta, dado que la tierra queda impregnada de sorgoleone, que impide el crecimiento de otras hierbas y posibilita que el trigo aproveche más los nutrientes.
Otras plantas de la familia de las crucíferas, como col, brócoli y nabo, contienen en sus tejidos sustancias que liberan en la tierra isotiocianatos, que anulan el crecimiento de otras hierbas.
Sin duda, aprender de la naturaleza representa beneficios ambientales y agrícolas.

1. Indica cuál es la síntesis más apropiada.

   (Texto anterior).

   A. Los investigadores consideran que se deben emplear el sorgoleone y los isotiocianatos para producir herbicidas sintéticos a fin de combatir las hierbas silvestres pues éstas sustraen nutrientes, luz y agua a los cultivos.

   B. Para mejorar el rendimiento de los cultivos una buena solución sería la rotación de cultivos con plantas y cereales. Ello evitaría emplear sustancias que intoxican y contaminan las tierras de los cultivos de sorgo. Éstas roban los nutrientes a las plantas silvestres que son muy útiles para mejorar el rendimiento de los cultivos.

   C. Los agrónomos que han dedicado una buena parte de su vida a estudiar para mejorar las condiciones de vida de los agricultores señalan que las hierbas silvestres resultan perjudiciales para los cultivos de las crucíferas pues les disminuyen la luz y el agua.

   D. El sorgoleone y los isotiocianatos aunque son eficaces herbicidas desarrollan sus propias defensas que representan un grave peligro para los cultivos pues, a lo largo del tiempo, estas defensas intoxican y contaminan las tierras de los cultivos.

   E. Los herbicidas sintéticos que se emplean para combatir las hierbas silvestres que sustraen nutrientes luz y agua a los cultivos dañan la tierra y, con el tiempo, las hierbas silvestres desarrollan resistencia a ellos. Una opción que optimizaría el rendimiento de los cultivos sería la rotación de cultivos con plantas y cereales que desarrollan sus propias defensas (como las crucíferas y el sorgo). Este fenómeno se denomina alelopatía.

2. Señala el análisis más adecuado.

   (Texto anterior).

   A. El texto tiene cuatro partes. En la primera se introduce el tema de la alelopatía. En la segunda, se proporcionan algunas observaciones de investigadores. En la siguiente se formula la propuesta de sustituir los herbicidas sintéticos por naturales. La cuarta parte finaliza el texto mediante la ilustración de un par de ejemplos: el sorgo y las crucíferas.

   B. El tema central del texto es la existencia de hierbas silvestres. El mismo se desarrolla en dos partes. La primera ejemplifica cómo la naturaleza enseña a los investigadores y en la segunda se ejemplifica mediante hechos agrícolas.

54. Extraído de *400 pequeñas dosis de ciencia*.

C. En la primera parte del texto se proporcionan algunas observaciones de investigadores. Como resultado de lo anterior se formula la propuesta de sustituir los herbicidas sintéticos por naturales. El texto concluye exhortando a aprender de la naturaleza.

D. El texto se divide en introducción, desarrollo y conclusión. En la introducción se presenta el tema de la alelopatía. En el desarrollo se proporcionan algunas observaciones de investigadores. El texto concluye con un consejo: "aprender de la naturaleza".

E. El texto tiene cinco partes. En la primera se introduce el tema de la alelopatía. En la segunda, se proporcionan algunas observaciones de investigadores. En la siguiente se formula la propuesta de sustituir los herbicidas sintéticos por naturales. La cuarta parte ilustra el hecho con un par de ejemplos: el sorgo y las crucíferas. Concluye en la quinta parte exhortando a aprender de la naturaleza.

Lee el texto. Resuelve los tres reactivos siguientes.

Alas aerodinámicas

Un biólogo que antes había realizado estudios de ingeniería aeronáutica, sorprendido por las excepcionales características del vuelo del vencejo, un ave parecida a las golondrinas, ha investigado cómo es posible que a lo largo de su vida llegue a volar 4.5 millones de kilómetros y alcance una velocidad de 110 kilómetros por hora.

El vencejo pasa casi toda su existencia en el aire, ya que come, se aparea y duerme volando. Para el estudio, el investigador recolectó 15 pares de alas de vencejos y las colocó en un túnel de viento, con el fin de medir el efecto de la forma, posición y orientación de las alas en relación con la eficiencia del vuelo.

3. Indica cuál es la síntesis más apropiada.

   (Texto anterior).

   A. El vencejo come, se aparea y duerme volando. Eso hace posible que llegue a volar 4.5 millones de kilómetros y alcance una velocidad de 110 kilómetros por hora.

   B. El vencejo come, se aparea y duerme volando. Eso hace posible que llegue a volar 4.5 millones de kilómetros y alcance una velocidad de 110 kilómetros por hora. Esto se comprobó gracias a un túnel de viento.

   C. Un ingeniero en aeronáutica estudió a los vencejos y demostró que a lo largo de su vida llegan a volar 4.5 millones de kilómetros y alcanzan una velocidad de 110 kilómetros por hora.

   D. Un biólogo, que antes había realizado estudios de ingeniería aeronáutica, sorprendido por las excepcionales características del vuelo del vencejo, un ave parecida a las golondrinas, que pasa casi toda su existencia en el aire, demostró que ello se debe a que come, se aparea y duerme volando.

   E. Un tipo de ave denominada vencejo atrajo la atención de un investigador por la distancia que pueden recorrer durante su vida y la velocidad de su vuelo. El especialista colocó varias alas de esta ave en un túnel de viento para analizar las causas de lo anterior.

4. Señala el análisis más adecuado.

   (Texto anterior).

   A. El texto tiene cuatro partes. En la primera se introduce el tema de los vencejos. En la segunda, se explica el método empleado. En la siguiente se indaga la relación entre la forma de las alas y la eficiencia en el vuelo. La cuarta parte finaliza el texto mediante la ilustración de la actividad de un vencejo.

   B. El fragmento del texto *Alas aerodinámicas* tiene una primera parte en la que se mencionan las características de quien hizo posible conocer las causas y el método empleado para explicar por qué los vencejos vuelan enormes distancias y lo hacen a gran velocidad. Esto último se describe en la segunda parte del texto.

C. En primer lugar se dice que los vencejos se parecen a las golondrinas. Enseguida se ilustran algunas costumbres de los vencejos y se demuestra, finalmente, en un túnel de viento la eficiencia de la forma aerodinámica de las alas.

D. En la primera parte del texto se proporcionan algunas observaciones de investigadores. Como resultado de lo anterior se formula la propuesta de conocer a los vencejos. El texto nos da un mensaje: construir aviones con la forma de las alas de estas aves.

E. El texto se divide en introducción, desarrollo y conclusión. En la introducción se presenta el tema de la biología aerodinámica. En el desarrollo se proporcionan algunas observaciones de investigadores. El texto concluye demostrando las grandes velocidades que alcanzan los vencejos y asimismo la distancia que cubren a lo largo de su vida.

5. Señala el análisis más adecuado del primer párrafo.

   (Texto anterior).

   A. El párrafo se refiere a cuatro asuntos: la ingeniería aeronáutica, la causa de la sorpresa del investigador, la definición de vencejo y los temas de investigación.

   B. El párrafo se refiere a tres asuntos: los estudios anteriores, la causa de la sorpresa del investigador y los temas de investigación.

   C. El párrafo se refiere a tres asuntos: los estudios anteriores, la causa de la sorpresa del investigador y la definición de vencejo.

   D. El párrafo se refiere a cuatro asuntos: la importancia de la biología, la causa de la sorpresa del investigador, la definición de vencejo y los temas de investigación.

   E. El párrafo se refiere a cuatro asuntos: los estudios anteriores, la causa de la sorpresa del investigador, la definición de vencejo y los temas de investigación.

4.1.2 Identificación de la información y argumentos de un texto

Un discurso, es decir un texto, posee: información,[55] inferencias,[56] ilustraciones,[57] juicios[58] y argumentos.[59] Aunque es muy importante distinguir entre unas y otros, ello no es sencillo. Se requiere de experiencia que únicamente se obtiene mediante la práctica.
A continuación se presentan algunos ejemplos:

1) *La tela de araña de la viuda negra es muy resistente.*

2) *Es falso que la tela de araña de la viuda negra sea muy resistente.*

3) *La tela de araña de la viuda negra es muy resistente ya que se ha comprobado que es cinco veces más resistente que el acero y que el kevlar, el polímero empleado en la fabricación de chalecos antibalas.*

4) *Su resistencia hace pensar que podría usarse en cables que resistan enormes tensiones.*

Para estos ejemplos:

1) Es una afirmación.

2) Es un juicio.

3) Es una información con argumento.

55. Información. Comunicación o adquisición de conocimientos que permiten ampliar o precisar los que se poseen sobre una materia determinada.

56. Inferencia. Sacar una consecuencia o deducir algo de otra cosa.

57. Una ilustración puede darse mediante ejemplos, diagramas, esquemas, imágenes, etcétera.

58. Juicio. Opinión, parecer o dictamen.

59. Argumento. Razonamiento que se emplea para convencer a alguien de aquello que se afirma o se niega.

4) Una inferencia.

Advertir la diferencia mediante expresiones aisladas es sencillo; pero hacerlo en un discurso es más complicado. Sin embargo, ello podría realizarse si se hace un análisis de texto, dicho en otras palabras, si se separan sus elementos.
Observa las características de un texto argumentativo:

5) "Cuando alguien enfrenta una situación conflictiva o angustiante, la presión arterial se eleva debido a que las arterias se contraen y su diámetro disminuye. Si se prolonga esta situación, la presión alta puede producir un ataque cardiaco, ya que las arterias de estas personas tardan más tiempo en volver a su estado normal después de contraerse".

En 5) hay dos argumentos del tipo: "Si se cumple X, entonces se cumple Y". En color aparece X, y en negro Y.
(Otra forma de representación es $X \Rightarrow Y$).

Reactivos de Identificación de la información y argumentos de un texto
Soluciones: véase la página 283. Desarrollos: véase la página 438

Lee el siguiente texto. Resuelve los dos reactivos siguientes.

No es raro oír hablar de lenguas complejas, o de lenguas primitivas y lenguas incultas, o, peor aún, de lenguas "con gramática" y lenguas "sin gramática". Sin embargo, la lingüística del siglo XX ha dejado bien claro que no existe nada en la estructura de la lengua que haga que unas sean "mejores" o "más completas" y ni siquiera "más adecuadas para determinadas funciones". Cada lengua es un sistema que puede cumplir perfectamente la función para la que ha sido creada: la comunicación. Y esta función, sea entre los vecinos de un barrio o internacional, puede ser realizada por cualquier lengua: son los factores económicos, políticos, sociales, culturales, etc., los que determinan que una lengua sea usada internacionalmente y otra tenga una base territorial restringida, pero cualquier lengua hablada en el lugar más recóndito de la Tierra podría ser utilizada como medio de comunicación internacional si se pusiesen los medios para ello. No podemos olvidar que las lenguas como el inglés o el alemán, que hoy son utilizadas como medios de comunicación en el ámbito de la ciencia, hace poco tiempo que son consideradas adecuadas para ello, mientras que el latín, que sí desempeñaba esta función, es ahora una lengua con ámbitos de uso muy restringidos. Y, más recientemente, podemos ver cómo lenguas consideradas como "primitivas" como el suahelí (suajili) en Tanzania, el tagalo en Filipinas o el indonesio en Indonesia, entre otras, están sufriendo una enorme transformación a fin de poder ser usadas como lenguas oficiales en sus países respectivos.

[Carme Yunyent (1993) *Las lenguas del mundo, una introducción*, Barcelona, Octaedro, 15-16].

1. ¿Cuál de los siguientes fragmentos del texto es un argumento?

   A. No es raro oír hablar de lenguas complejas, o de lenguas primitivas y lenguas incultas.
   B. Cada lengua es un sistema que puede cumplir perfectamente la función para la que ha sido creado.
   C. Las lenguas como el inglés o el alemán, que hoy son utilizadas como medios de comunicación en el ámbito de la ciencia, hace poco tiempo que son consideradas adecuadas para ello.
   D. Son los factores económicos los que determinan que una lengua sea usada internacionalmente.
   E. Cualquier lengua hablada en el lugar más recóndito de la Tierra podría ser utilizada como medio de comunicación internacional.

2. ¿Cuál de los siguientes fragmentos del texto es una inferencia?

   A. No es raro oír hablar de lenguas complejas, o de lenguas primitivas y lenguas incultas.
   B. Cada lengua es un sistema que puede cumplir perfectamente la función para la que ha sido creado.

C. Cualquier lengua hablada en el lugar más recóndito de la Tierra podría ser utilizada como medio de comunicación internacional, si se pusiesen los medios para ello.

D. Son los factores económicos, políticos, sociales, culturales, etc., los que determinan que una lengua sea usada internacionalmente

E. El suahelí en Tanzania, el tagalo en Filipinas o el indonesio en Indonesia, entre otras, están sufriendo una enorme transformación.

Lee el siguiente texto. Resuelve los tres reactivos siguientes.

El hablante ingenuo de nuestra época puede seguir considerando su propia lengua superior a otras lenguas; puede seguir pensando que la lengua por él hablada corresponde a la esencia misma de las cosas mejor que otras lenguas; pero los hablantes de lenguas extranjeras ya no son para él "los mudos", "los no hablantes", "los bárbaros": simplemente hablan otras lenguas. Mediante el reconocimiento de otras lenguas, el hombre se ha hecho consciente de su propia historicidad y la pertenencia a una comunidad lingüística; y ha hecho del lenguaje un símbolo de esta historicidad: las comunidades idiomáticas se han convertido en pueblos o naciones. Asimismo se ha reconocido a las lenguas el estatus de objetos históricos. Los antiguos concebían a las lenguas de manera inmediata, como modalidades del hablar, es decir, mediante conceptos verbales o adverbiales [...]; el hombre moderno concibe las lenguas más bien sustantivamente [...]. El hecho de que esto también entraña riesgos, en particular el de la "cosificación" de la lengua, o sea, del desconocimiento del lenguaje como actividad, es otro aspecto de la misma actitud, que no podemos discutir aquí.

[Eugenio Coseriu (1977) "El lenguaje y la comprensión de la existencia", en *El hombre y su lenguaje*, Madrid, Gredos, 57].

3. ¿Cuál de los siguientes fragmentos es una ilustración?

   A. Puede seguir pensando que la lengua por él hablada corresponde a la esencia misma de las cosas.

   B. Es decir, mediante conceptos verbales o adverbiales [...].

   C. El hombre moderno concibe las lenguas más bien sustantivamente.

   D. Mediante el reconocimiento de otras lenguas, el hombre se ha hecho consciente de su propia historicidad.

   E. Asimismo se ha reconocido a las lenguas el estatus de objetos históricos.

4. ¿Cuál de los siguientes fragmentos es un juicio?

   A. Los antiguos concebían a las lenguas de manera inmediata, como modalidades del hablar.

   B. Es otro aspecto de la misma actitud, que no podemos discutir aquí.

   C. El hombre moderno concibe a las lenguas más bien sustantivamente.

   D. Mediante el reconocimiento de otras lenguas, el hombre se ha hecho consciente de su propia historicidad.

   E. Asimismo se ha reconocido a las lenguas el estatus de objetos históricos.

5. Una de las expresiones del texto anterior puede presentarse así: si el hombre reconoce la existencia de otras lenguas, se hace consciente de su propia historicidad.

   Esta nueva presentación es:

   A. Una ilustración

   B. Un argumento

   C. Una información

   D. Una afirmación con sustento

   E. Un texto argumentativo

4.2 Ortografía

4.2.1 Grafemas y fonemas

Observa el siguiente cuadro:

1	2	*3*	*4*
a	/a/	n	/n/
b*	/b/	o	/o/
c*	/k/ /s/	p	/p/
d	/d/	q*	/k/
e	/e/	r	/r/
f	/f/	rr	/r̄/
g*	/g/ /x/	s*	/s/
h		t	/t/
i	/i/	u	/u/
j*	/x/	v*	/b/
k*	/k/	w	/ue/
l	/l/	x*	/s/ /ks/ /x/ /š/
ll*	/y/	y*	/y/
m	/m/	z*	/s/

Las columnas *1* y *3* presentan las grafías.[60] Las *2* y *4* los fonemas.[61]
Hay grafías (*) que representan al mismo fonema. Por ejemplo: k, q representan a /k/; ll, y a /y/.
Por otro lado, hay fonemas que equivalen a más de una grafía. Por ejemplo: /s/ equivale a z, s, c; /b/ a b, v; /x/ a s, j, ks, sh (como en “Xola”).
Y el colmo: grafías que no equivalen a ningún fonema (h).
Por lo anterior, se entiende que algunas personas se equivoquen y usen una grafía por otra, por ejemplo ”avajo” en lugar de “abajo”; ”gícama” en lugar de “jícama”, etcétera.
Las diferencias que observamos entre fonemas y grafías se explican porque la lengua oral registra las variaciones y los cambios más rápidamente que la lengua escrita.[62] Si la distancia entre estas lenguas se hiciera mayor, estaríamos presenciando un caso de inteligibilidad. La lengua española posee, a pesar de las diferencias que hemos observado, un alfabeto transparente y, sin embargo, los problemas ortográficos que se observan en los estudiantes, en los diferentes niveles de nuestro sistema educativo, son graves.
La razón por la cual el alfabeto de la lengua española es “transparente”, en contraste con los alfabetos de las lenguas francesa e inglesa que son “opacos”, se puede entender porque los países hispanohablantes

60. Las grafías son elementos del código escrito.
61. Los fonemas son elementos del código oral.
62. Por ejemplo, la palabra “chido” se usa en el español de México, pero no aparece todavía en el *DRAE*.

han hecho adecuaciones periódicas y los países francófonos[63] y anglófonos,[64] no. En los países hispanohablantes se requiere una adecuación. Mientras ello sucede, habrá que evitar usar una grafía en lugar de otra, es decir, no incurrir en faltas ortográficas.

Reactivos de Grafemas y fonemas

Soluciones: véase la página 283. Desarrollos: véase la página 439

1. ¿Qué fonemas corresponden a la grafía x?

   A. /s/, /š/, /ks/, /x/

   B. /s/, /sh/, /ks/

   C. /sh/, /x/,/ks/

   D. /s/, /sh/, /x/

   E. /s/, /ks/

2. ¿Cuál palabra está usando un fonema incorrectamente?

   A. /waxáka/

   B. /váka/

   C. /sapáto/

   D. /oxas/

   E. /keso/

3. Señala la transcripción ortográfica de /bíno a mi kása kon su muxér/:

   A. Víno a mi casa con su mujer.

   B. Vino a mi casa cón su mujer.

   C. Vino a mi casa con su mujer.

   D. Vino a mi casa con su mujér.

   E. Bino a mi casa con su mujer.

4. La transcripción ortográfica de /wastepék/ es:

   A. Oaxtepec

   B. Oaxtepéc

   C. Wastepec

   D. Huastepec

   E. Uastepec

5. La transcripción fonológica de aguacate es:

   A. /awakáte/

   B. /ahuakate/

   C. /ahuakáte/

   D. /ahuacáte/

   E. /awakate/

63. Los francófonos son los países en los que el francés es la lengua oficial.

64. Los anglófonos son los países en los que el inglés es la lengua oficial.

4.2.2 La sílaba. Clasificación de las palabras

Dentro de una palabra, la sílaba sobre la que recae el acento prosódico[65] es la tónica. Para señalar la sílaba tónica de una palabra, el español emplea en ciertos casos el acento gráfico o tilde (´).[66]
Según el lugar que ocupe la sílaba tónica, se pueden distinguir cuatro clases de palabras:

a) Agudas: la última sílaba es la tónica. Llevan tilde cuando terminan en vocal, n o s. Ejemplos: *ja–bón*, *ci–prés*. Sin embargo, cuando la palabra aguda termina en s precedida por otra consonante, no lleva tilde. Ejemplo: *ro–bots*. Las palabras agudas terminadas en y no llevan tilde. Ejemplo: *vi–rrey*.

b) Graves o llanas: la penúltima sílaba es tónica. Llevan tilde cuando terminan en consonante que no sea n o s. Ejemplo: *Cé*–sar. No obstante, cuando la palabra grave termina en s precedida de consonante sí lleva tilde. Ejemplo: *bí–ceps*. Las palabras graves terminadas en y deben llevar tilde. Ejemplo: *pó–ney*.

c) Esdrújulas: la antepenúltima sílaba es tónica. Siempre llevan tilde. Ejemplo: *e–léc–tri–co*.

d) Sobresdrújulas: la sílaba antes de la antepenúltima es tónica. Siempre llevan tilde. Ejemplo: *có–me–te–lo*.

Reactivos de La sílaba. Clasificación de las palabras
Soluciones: véase la página 283. Desarrollos: véase la página 440

1. Relaciona las columnas según la clase de palabra que corresponda (se han suprimido las tildes de la primera columna).

1. Dieciseis	a. Esdrújula
2. Restamelo	b. Grave
3. Marmol	c. Aguda
4. Espiritu	d. Sobresdrújula
5. Arbol	

A. 1a, 2b, 3d, 4c, 5b
B. 1b, 2c, 3a, 4d, 5c
C. 1c, 2a, 3b, 4a, 5c
D. 1d, 2c, 3b, 4b, 5a
E. 1c, 2d, 3b, 4a, 5b

2. Selecciona el inciso que contenga las palabras escritas correctamente.

A. Huida, tráquea, búho, Beatriz, léemelo.
B. Huída, traquea, búho, Beatríz, leemelo.
C. Huida, tráquea, buho, Beatriz, lémelo.
D. Huída, tráquea, buho, Beatríz, lemelo.
E. Huida, traquea, búho, Beatriz, léemelo.

3. Relaciona las columnas según la veracidad de las oraciones.

65. El acento prosódico es la mayor intensidad con la que se pronuncia una sílaba dentro de una palabra aislada o un monosílabo dentro de su contexto fónico. Por ello también se llama acento de intensidad.

66. Tilde. Símbolo colocado sobre la vocal de la sílaba tónica de la palabra, según las reglas de acentuación.

1. Llevan tilde en la última sílaba cuando terminan en vocal, n o s.
2. Siempre llevan tilde en la antepenúltima sílaba.
3. La penúltima sílaba es tónica.
4. Siempre llevan tilde una sílaba antes de la antepenúltima.
5. Llevan tilde en la penúltima sílaba cuando terminan en consonante que no sea n o s.

a. Esdrújulas
b. Graves
c. Agudas
d. Sobresdrújulas

A. 1c, 2a, 3b, 4d, 5b
B. 1a, 2b, 3d, 4c, 5b
C. 1b, 2c, 3a, 4d, 5c
D. 1c, 2a, 3b, 4a, 5c
E. 1d, 2c, 3b, 4b, 5a

4. Selecciona la oración verdadera.

A. Las palabras esdrújulas llevan tilde, excepto cuando terminan en vocal, n o s.
B. Las palabras agudas llevan tilde cuando terminan en consonante que no sea n o s.
C. El español siempre emplea tilde para señalar la sílaba tónica.
D. En una palabra el acento prosódico recae sobre la sílaba tónica.
E. Cuando las palabras graves terminan en s precedidas de consonante no llevan tilde.

5. Selecciona el inciso que contenga únicamente palabras agudas.

A. Héctor, está, jamás, portal, título.
B. Reloj, París, telón, consomé, catedral.
C. Huerto, además, planta, botella, anillo.
D. Examen, portón, estación, libro, montón.
E. Banco, librero, silicón, también, botón.

4.2.3 Diptongos e hiatos

Se llama diptongo a dos vocales contiguas que se pronuncian en una misma sílaba. Para que haya diptongo en preciso:

a) Que estén juntas una vocal abierta (fuerte)[67] y una cerrada (débil),[68] o viceversa, siempre que la cerrada sea átona.[69] Son diptongos con estas características: ai, au, ei, eu, oi, ia, ie, io, ua, ue, uo.

b) Que se combinen dos vocales cerradas distintas. Son diptongos con estas características: ui, iu.

Palabras con diptongo	*División silábica*	*Diptongos*
causa	cau-sa	au
ruido	rui-do	ui
ahijado	ahi-ja-do[70]	ai

Colocación de tilde[71] en los diptongos:

a) Cuando lo exigen las reglas generales de acentuación.[72]

67. Las vocales abiertas o fuertes son a, e, o.
68. Las vocales cerradas o débiles son i, u.
69. Una sílaba átona es la que no es tónica. Para revisar el concepto de sílaba tónica en las palabras, ver la sección La sílaba. Clasificación de las palabras.
70. La h intercalada entre dos vocales no impide que éstas formen diptongo.
71. La definición de tilde se explica en la sección La sílaba. Clasificación de las palabras.
72. Para revisar las reglas generales de acentuación, ver la sección La sílaba. Clasificación de las palabras.

b) Cuando se tiene una vocal abierta tónica[73] + vocal cerrada átona o viceversa; la tilde se coloca siempre en la vocal abierta.

c) Cuando se tiene una combinación de vocales cerradas la tilde se coloca sobre la segunda vocal.

Palabras con diptongo que llevan tilde	*División silábica*	*Diptongos*
bonsái	bon-sái	ái
adiós	a-diós	ió
cuídate	cuí-da-te	uí

Se denomina hiato a la secuencia de dos vocales que se pronuncian en sílabas separadas.
Existen tres tipos de hiatos:

a) Combinación de dos vocales iguales.

b) Vocal abierta + vocal abierta distintas.

c) Vocal abierta átona + vocal cerrada tónica o viceversa.

Colocación de tilde en hiatos:

a) Los hiatos formados por dos vocales iguales, o por vocal abierta + vocal abierta distintas, siguen las reglas generales de acentuación.

b) Los hiatos formados por vocal abierta átona + vocal cerrada tónica, o por vocal cerrada tónica + vocal abierta átona, siempre llevan tilde, independientemente de las reglas de acentuación.

La h intercalada entre dos vocales no impide que éstas formen hiato. Tampoco impide que el hiato con h intercalada lleve tilde si es preciso.

Palabras con hiatos	*División silábica*	*Hiatos*
veo	ve-o	e-o
Saavedra	Sa-a-ve-dra	a-a
caen	ca-en	a-e
día	dí-a	í-a
león	le-ón	e-ó
río	rí-o	í-o
vehículo	ve-hí-cu-lo	e-hí
caído	ca-í-do	a-í

Reactivos de Diptongos e hiatos

Soluciones: véase la página 283. Desarrollos: véase la página 441

1. Selecciona la oración verdadera.

   A. Un hiato es la secuencia de dos vocales contiguas que forman parte de la misma sílaba.
   B. Un hiato es la secuencia de dos vocales únicamente abiertas que forman parte de la misma sílaba.
   C. Un hiato es la secuencia de tres vocales cerradas que forman parte de sílabas consecutivas.

73. Es la de mayor intensidad.

D. Un hiato es la secuencia de dos vocales contiguas que forman parte de sílabas consecutivas.
E. Un hiato es la combinación exclusivamente de dos vocales iguales que forman parte de la misma sílaba.

2. Selecciona el inciso que contenga todas las palabras con diptongo.

A. Ciego, ahumar, fuerte, después, recién.
B. Náutico, teatro, lingüístico, ahogo, vienen.
C. Aéreo, héroe, cambié, interviú, huésped.
D. Buey, viaje, cuota, fluir, caímos.
E. Quiosco, héroe, Paraguay, reís, reúnen.

3. Relaciona las columnas con base en la separación silábica.

1. Diurético	a. hiato
2. Coartada	b. diptongo
3. Púa	
4. Oiga	
5. Búho	

A. 1b, 2a, 3b, 4b, 5a
B. 1b, 2a, 3a, 4b, 5a
C. 1a, 2b, 3a, 4b, 5a
D. 1b, 2a, 3b, 4b, 5b
E. 1a, 2b, 3a, 4a, 5b

4. Selecciona el inciso que contenga las palabras escritas correctamente.

A. Ahinco, mio, suave, zoólogo, sonríe.
B. Ahínco, mío, suave, zoólogo, sonríe.
C. Ahínco, mio, suáve, zólogo, sonríe.
D. Ahinco, mío, suave, zologo, sonrie.
E. Ahínco, mío, suave, zoologo, sonrie.

5. Selecciona el inciso que contenga todas las palabras con hiato.

A. Traerán, línea, turbohélice, murciélago, limpiáis.
B. Jesuita, aúllan, meollo, país, prohíben.
C. Ahúman, dúo, toalla, aldea, acreedor.
D. Día, rehúso, arbóreo, Cáucaso, bacalao.
E. Ataúd, heroína, oír, jesuítico, reía.

4.2.4 Acentuación diacrítica

Tilde diacrítica

Es aquella que permite distinguir palabras que se escriben de idéntica forma, pero que pertenecen a diferentes categorías gramaticales.

Tilde diacrítica en monosílabos

Los monosílabos son las palabras que tienen una sílaba, por regla general no llevan tilde, excepto cuando existen monosílabos escritos de manera idéntica que pertenecen a categorías gramaticales diferentes, en este caso es admisible la tilde.

Monosílabo	*Categoría gramatical*	*Ejemplo*
El	Artículo[74] masculino	*El doctor cambió su diagnóstico repentinamente.*
Él	Pronombre personal[75]	*Me lo trajo él.*
Tu	Adjetivo posesivo[76]	*¿Cuándo compraste tu reloj?*
Tú	Pronombre personal	*Tú siempre pones un pretexto para no ir.*
Mi	Adjetivo posesivo	*Te presto mi guitarra.*
Mi	Sustantivo[77] (con significado de nota musical)	*El mi sonó desafinado.*
Mí	Pronombre personal	*¿Tienes correspondencia para mí?*
Te	Pronombre personal	*Te he inscrito a la escuela.*
Té	Sustantivo (con significado de bebida, planta u hoja)	*Es recomendable tomar una taza de té antes del desayuno.*
Mas	Conjunción adversativa[78]	*Quiso correr, mas estaba lloviendo.*
Más	Adverbio[79]	*Cobró más de lo que trabajó.*
Si	Conjunción[80]	*No sé si te acompañaré.*
Si	Sustantivo (con significado de nota musical)	*Compuso la melodía en si mayor.*
Sí	Adverbio de afirmación	*Sí estoy enojada.*
Sí	Pronombre personal	*Sólo piensa en sí misma.*
De	Preposición[81]	*El abrigo es de algodón.*
Dé	Forma del verbo dar	*Merece que le dé las gracias*
Se	Pronombre personal	*Se comió la sopa.*
Sé	Forma del verbo saber o ser	*No sé de qué hablas.*
Ve	Forma del verbo ver	*Ya no ve nada.*
Vé	Forma del verbo ir	*Vé a comprar la fruta, por favor.*

74. Artículo. Parte de la oración que sirve para distinguir los géneros de los nombres. Ejemplos: el y los identifican a los masculinos; la y las a los femeninos.

75. Pronombre personal. Designa personas, animales o cosas mediante cualquiera de las tres personas gramaticales.

76. Adjetivo posesivo. Indica la posesión, propiedad o pertenencia a una o varias personas o cosas de lo significado por el sustantivo a que se refiere.

77. Con el sustantivo designamos objetos materiales, ya sean personas, animales o cosas, de las que se puede decir algo.

78. Conjunción adversativa. Partícula invariable que relaciona palabras y oraciones para indicar oposición o contrariedad entre los elementos que unen.

79. Adverbio. Palabra invariable cuya función consiste en complementar la significación del verbo, adjetivo u otro adverbio.

80. Conjunción. Partícula invariable que relaciona palabras y oraciones.

81. Preposición. Palabra invariable que sirve para relacionar vocablos.

Tilde diacrítica en demostrativos

Los demostrativos éste, ése, aquél, con sus femeninos y plurales, llevan tilde cuando funcionan como pronombres, pero no llevan tilde si determinan a un nombre.

Ésta es mi libreta.	Esta libreta es mía.
Ésos son tus regalos.	Esos regalos son tuyos.
Aquéllas son tus fotografías.	Aquellas fotografías son tuyas.

Las formas neutras (en singular) de los pronombres demostrativos[82] se escribirán siempre sin tilde.

Tilde diacrítica en interrogativos y exclamativos

Llevan tilde las palabras que introducen oraciones interrogativas o exclamativas directas o indirectas.

¿Qué pasa?	¡Qué buena idea!
¿Cuánto cuesta?	¡Cuántos problemas!
Le preguntaron qué había comido	Le explicó cuántas deudas tenía

Otros casos de tilde diacrítica

Solo/sólo. Puede funcionar como adjetivo o adverbio.

Iré solo esta tarde (en soledad, sin compañía) Iré sólo esta tarde (solamente, únicamente)

Aún/aun.

Llevará tilde cuando se utiliza con el significado de todavía.

Aún es temprano

Cuando equivale a hasta, también, incluso (o siquiera, con negación), se escribirá sin tilde.

Aun los que no pagaron irán.

Reactivos de Acentuación diacrítica

Soluciones: véase la página 283. Desarrollos: véase la página 443

1. Relaciona las columnas según la categoría gramatical a la que pertenezcan.

1. Él	a. Posesivo
2. Tu	b. Sustantivo
3. Mas	c. Pronombre personal
4. De	d. Preposición
5. Té	e. Conjunción adversativa

A. 1d, 2a, 3c, 4b, 5e
B. 1c, 2a, 3e, 4d, 5b
C. 1a, 2c, 3b, 4e, 5d
D. 1b, 2a, 3d, 4c, 5e
E. 1e, 2d, 3a, 4b, 5c

82. Esto, eso y aquello.

2. Elige la oración escrita correctamente.
   A. Té debes cuidar, más no exagerar, solo recuérdalo.
   B. Te debes cuidar, más no exagerar, sólo recuerdalo.
   C. Té debes cuidar, mas no exagerar, solo recuérdalo.
   D. Te debes cuidar, más no exagerar, sólo recuérdalo.
   E. Te debes cuidar, mas no exagerar, sólo recuérdalo.
3. Selecciona la oración verdadera.
   A. La tilde diacrítica permite distinguir palabras con las mismas letras que pertenecen a diferentes categorías gramaticales.
   B. Los monosílabos son palabras de más de una sílaba que siempre llevan tilde, sin ninguna excepción.
   C. La tilde diacrítica permite distinguir palabras homófonas que pertenecen a la misma categoría gramatical.
   D. Los demostrativos este, ese, aquel, con sus femeninos y plurales, llevan tilde si determinan a un nombre.
   E. Cuando la palabra aún equivale a hasta, también, incluso o siquiera, se debe escribir siempre con tilde.
4. Selecciona la oración escrita correctamente.
   A. Ésta situación me indigna, ¿como la soportaré? Solo sé que no tolero la injusticia.
   B. Esta situación me indigna, ¿cómo la soportaré? Solo se que no tolero la injusticia.
   C. Esta situación me indigna, ¿cómo la soportaré? Sólo sé que no tolero la injusticia.
   D. Ésta situación me indigna, ¿como la soportaré? Sólo sé que no tolero la injusticia.
   E. Esta situación me indigna, ¿cómo la soportaré? Sólo se que no tolero la injusticia.
5. Relaciona las columnas según la categoría gramatical a la que pertenezcan.

1. Éste	a. Exclamativo
2. Qué	b. Adverbio de afirmación
3. El	c. Posesivo
4. Tu	d. Pronombre
5. Sí	e. Artículo

   A. 1e, 2a, 3c, 4b, 5d
   B. 1a, 2b, 3d, 4c, 5e
   C. 1c, 2e, 3b, 4a, 5d
   D. 1d, 2a, 3e, 4c, 5b
   E. 1b, 2c, 3a, 4e, 5d

4.3 Semántica del texto

4.3.1 Análisis del discurso

Las frases se unen y forman enunciados,[83] éstos cuando se unen forman unidades mayores que se llaman textos o discursos. Los discursos tienen una estructura propia, diferente a la estructura de las frases o de los enunciados. Las conversaciones, los artículos científicos, las novelas, los libros de texto, etc. son discursos.

83. Consulta la sección Oración y frase si tienes duda acerca de las nociones frase y enunciado.

En los discursos aparecen personas, objetos, acontecimientos y actividades. La deixis[84] permite localizar los elementos que forman parte de un discurso. De esta manera se puede pensar en la existencia de deixis de persona, de tiempo, de lugar y lingüística. Ejemplos:

> *¿Ya viste*[85] *esto?*
>
> *Me lo preguntaste antes, pero yo no estuve aquí ayer*.

Deixis lingüística[86]

En los discursos, la interpretación de un enunciado sólo se completa con la información de los otros. Esto se logra mediante los elementos deícticos. La vinculación entre los enunciados de un discurso se denomina cohesión.
Otra característica de los discursos es la coherencia. Ésta se refiere a la estabilidad del significado de los discursos, en otras palabras: "que los discursos hablen de lo mismo". Un discurso coherente activa nuestros conocimientos del contexto físico y el que compartimos con el autor.
Los discursos cuya característica es la cohesión y coherencia se leen, y comprenden, con mayor facilidad.

Reactivos de Análisis del discurso

Soluciones: véase la página 283. Desarrollos: véase la página 444

1. En el siguiente texto, los enunciados están desordenados. Ordénalos con base en el número que los antecede:
    1. Todos los adultos mayores interesados en oxigenar sus cerebros y mantener una mejor atención.
    2. Podrían considerar esta prescripción gratuita: caminar cada dos o tres días, sin sudar, pero haciendo esfuerzo.
    3. La duración de cada caminata debe tener un mínimo de 10 minutos y un máximo de 45.
    4. ¿Cuántas veces le han dicho que caminar es un magnífico ejercicio, además de barato?

    A. 4. 3. 2. 1.
    B. 1. 3. 2. 4.
    C. 4. 1. 2. 3.
    D. 2. 1. 4. 3.
    E. 4. 2. 1. 3.

2. La expresión: "caminar dos o tres días" se halla vinculada cohesivamente con la frase:
    (Texto anterior).

    A. La duración de cada caminata.
    B. Mantener una mejor atención.
    C. Sin sudar pero haciendo esfuerzo.
    D. Esta prescripción gratuita.
    E. Magnífico ejercicio.

3. Indica cuál de las siguientes es una deixis lingüística.
    (Texto anterior).

---

84. La deixis es una función que conecta al discurso con el contexto físico y con los datos que las personas tienen acerca del contexto así como la información que del contexto comparten el autor y el lector.

85. El morfema te equivale a la segunda persona del singular, es una deixis de persona.

86. Observa que en la deixis lingüística lo y esto se refieren a la información del contexto que comparten las personas de la conversación. Es decir, si supiéramos que María compró un aguacate, podríamos decir: María lo compró. Esto es "compartir el contexto".

A. le

B. mejor

C. haciendo esfuerzo

D. ejercicio

E. magnífico

4.3.2 Coherencia y cohesión

Observa el siguiente discurso:

> En la estimulación con comida, los voluntarios vieron, olieron y degustaron sus platillos favoritos. Se analizó la capacidad en dos grupos de personas cuya ceguera era resultado de enfermedades o daños oculares, pero no de lesiones en el cerebro. A medida que se ha incrementado el conocimiento de la estructura del genoma de los seres vivos, ha sido posible confirmar diferentes hipótesis sobre su evolución. Cuando las paredes de un vaso sanguíneo se debilitan y se eleva la presión arterial, el diámetro de un segmento del vaso sanguíneo aumenta y se forma una especie de globo, que corre el riesgo de reventarse.

Resulta difícil comprenderlo.

El problema no se halla en la lengua que se emplea. Es español. Tampoco radica en la sintaxis, los enunciados obedecen a las reglas sintácticas de nuestra lengua.

La dificultad consiste en que carece de coherencia, es decir, mezcla varios asuntos, sin relación entre ellos.

Otro factor importante para producir discursos eficaces es la cohesión.[87] En este fragmento hemos marcado los elementos cohesivos en color y con números los vínculos con los referentes, éstos aparecen después del texto:

> Intentó echarse (1) hacia atrás para mirarle (2) a los ojos, pero él (2) se los (3) cerró a besos y luego le (2) rozó los labios y ella (1) sintió que se (1) ahogaba y que un fluido tibio la (1) envolvía, que la piel comenzaba a arder, la sangre iba a brotarle (1) por los poros mientras él (2) le (1) besaba las mejillas,. . .

(1) Ella
(2) Él
(3) Ojos

La presencia de ambos elementos produce un discurso coherente.

Reactivos de Coherencia y cohesión

Soluciones: véase la página 284. Desarrollos: véase la página 445

1. Lee el texto y observa las palabras escritas con color.

87. Es un mecanismo propio de las lenguas oral y escrita, que consiste en la relación de un par de elementos. A uno se denomina cohesivo, y a otro referente. Podemos afirmar que la cohesión es el vínculo que se establece, en los discursos orales o escritos, entre un cohesivo y su referente. Los cohesivos más frecuentes en la lengua española son los pronombres.

Marea roja
Con frecuencia escuchamos en las noticias que las autoridades sanitarias alertan a la población sobre la presencia de "marea roja" en alguna parte de nuestras costas y se nos indica también que evitemos comer peces y mariscos provenientes de esos litorales.
Se desconoce quiénes y por qué eligieron ese nombre, ya que cuando ésta infesta el mar, el agua se tiñe más bien de un tono amarillo verdoso.
El fenómeno lo provoca un alga llamada *Karenia brevis*, que libera 13 diferentes toxinas. Algunas de ellas, al disolverse en el agua, matan a los peces, tortugas, manatíes y delfines. Si bien no se afectan los moluscos, como los ostiones y los mejillones, los compuestos dañinos sí se concentran en ellos y perjudican a quienes los comen, lo cual provoca vómito y diarrea.
Las toxinas que afectan la vida marina se conocen desde hace tiempo; empero, estudios recientes muestran que otras de ellas se liberan en el aire.
Cuando hay marea roja, los patógenos ocasionan daños respiratorios en las personas que se encuentran en la playa o que trabajan en barcos pesqueros o en los muelles.
Las toxinas que se liberan en el ambiente no permiten la eliminación normal de la mucosidad en las vías respiratorias, que es la forma en que el cuerpo expulsa las partículas contaminantes que entran con el aire. Además, las toxinas entorpecen la actividad de los macrófagos, las células del sistema inmunitario que destruyen a gérmenes y cuerpos extraños.
Aunque estos síntomas se podían observar, no se sabía qué los causaba. Cuando éstos se presentan en individuos sanos, desaparecen al retirarse la marea roja.
Sin embargo, en quienes tienen problemas respiratorios, como asma o afecciones pulmonares, las complicaciones pueden ser muy graves.

Con base en las palabras escritas con color, indica cuál es la combinación que relaciona correctamente las dos columnas:

1. nos	a. compuestos dañinos
2. ésta	b. las toxinas
3. lo	c. fenómeno
4. los	d. marea roja
5. otras de ellas	e. primera persona plural

A. 1d, 2c, 3a, 4b, 5e

B. 1c, 2a, 3b, 4e, 5d

C. 1e, 2d, 3c, 4a, 5b

D. 1a, 2b, 3e, 4d, 5c

E. 1e, 2d, 3c, 4a, 5b

2. Las relaciones que se establecen en los textos o discursos, como las del reactivo anterior, permiten:

A. La división de las oraciones.

B. El desarrollo de las frases.

C. La coherencia de un texto.

D. La cohesión de un texto.

E. La lectura de un texto.

3. En el siguiente discurso aparece el cohesivo "estos productos", identifica el referente.

> La situación política mundial ha hecho que las economías que dependen del petróleo sean cada vez más vulnerables ya que, además de los combustibles que se obtienen de él, hay una extensa variedad de productos sintéticos que usan materia prima proveniente de la petroquímica. Es por esa razón por la que los químicos se han enfocado en hallar nuevas fuentes de estos productos.
> En la fruta, el jarabe de maíz y la miel se encuentra un azúcar llamado fructosa. Al romper por calentamiento esta molécula se obtiene una sustancia llamada 5-hidroximetil furfural, hmf para simplificar.
> Ésta sirve de base para fabricar dos sustancias de gran demanda en la actualidad: poliéster y diesel. Sin embargo, las reacciones químicas conocidas hasta hoy para adquirirla tienen un rendimiento muy bajo y consumen mucha energía.
> Un grupo de químicos ha descubierto un método en el cual se consigue purificar el hmf con mayor rendimiento y a un costo menor.
> Obtener poliéster y diésel de recursos renovables, y con procesos sostenibles, es importante para la ecología y la economía.

El referente del cohesivo "estos productos" es:

A. Combustibles.
B. Jarabe de maíz y miel.
C. Productos sintéticos.
D. Poliéster y diesel.
E. Dos sustancias.

4.4 Sintaxis del texto

4.4.1 Oración y frase

Frase

Es la unión de palabras que carecen de verbo. Ejemplo: *Las tunas verdes del mercado de Azcapotzalco.*

Oración

Es una construcción que tiene por núcleo un verbo o perífrasis verbal.[88] El núcleo puede constituir, sin intervención del sujeto, una oración ya que, morfológicamente, puede descomponerse en dos partes: el radical o raíz y la terminación o desinencia. El morfema raíz es la parte que se mantiene fija y porta el significado, y el morfema flexivo es la parte que sufre variaciones e indica los accidentes morfológicos (persona, número, tiempo y modo). Por ejemplo:

Pint–o

Morfema raíz　　Morfema flexivo

Cuando en la oración, además de sujeto y verbo, aparecen modificadores,[89] debe existir concordancia entre las unidades que la forman, tiene que existir igualdad de número y persona entre sujeto y verbo, y de género y número entre sustantivo y adjetivo. Esto es:

88. Las perífrasis verbales se integran por dos a cuatro palabras que tienen un solo significado. Se forman con dos o más verbos que en ocasiones pueden unirse mediante una preposición. El primer verbo se conjuga y funciona como auxiliar, el segundo se encuentra en infinitivo, gerundio o participio, aunque ocasionalmente puede estar conjugado; ejemplos: *estaba cansado, acaba de irse, vamos a tener tocada*.

89. Los modificadores son artículos, nombres, adjetivos, pronombres y adverbios.

Oración

Sujeto Predicado

Ejemplo de concordancia de persona y número:

La chamarra | *está sucia*

Sujeto
Tercera persona
del singular

Predicado
Tercera persona
del singular

Ejemplo de concordancia entre género y número:

Los duraznos | *están maduros*

Sujeto
Masculino
plural

Predicado
Masculino
plural

Reactivos de Oración y frase

Soluciones: véase la página 284. Desarrollos: véase la página 446

1. Selecciona la oración en la cual exista coordinación entre sus elementos.

   A. El prólogo, o prefacio, son un texto en el que se menciona la importancia de la publicación de una obra, de sus ventajas y bondades.

   B. El prólogo, o prefacio, es un texto en el que se menciona la importancia de la publicación de una obra, de sus ventajas y bondades.

   C. El prólogo, o prefacio, es un texto en el que se mencionan la importancia de la publicación de una obra, de sus ventajas y bondades.

   D. El prólogo, o prefacio, es un texto en el que se mencionaba la importancia de la publicación de una obra, de sus ventajas y bondades.

   E. El prólogo, o prefacio, es un texto en el que se mencionan la importancia de la publicación de unas obra, de sus ventajas y bondades.

2. Selecciona la opción que representa una oración.

   A. Aquel verano.

   B. Medidas económico-políticas.

   C. La selección nacional de beisbol.

   D. Leyeron.

   E. Programa prepagado.

3. Selecciona la opción que representa una frase.

   A. Este acontecimiento.

B. Cerraron.
C. Fueron construidas.
D. Lo recibieron con asombro y alegría.
E. Frases sueltas no llevan punto.

4. Selecciona el predicado de la oración: los alumnos tienen que asistir a asesorías.

A. Tienen que asistir a asesorías.
B. Tienen.
C. Tienen que asistir.
D. Asistir a asesorías.
E. Asistir.

5. Selecciona la oración que esté escrita en masculino de la tercera persona del singular.

A. Emitieron un decreto prohibiendo la vida nocturna.
B. Él se fue a las 10 de la noche.
C. La presidenta escribió los estatutos con base en los acuerdos establecidos.
D. Estaban consternados con los resultados de las encuestas.
E. Los adverbios no tienen flexiones, es decir, no tienen género.

4.4.2 Sujeto y predicado

Sujeto

El sujeto es la palabra o grupo de palabras cuyo núcleo puede ser un sustantivo (*asesor*), nombre propio (*Adela*), gentilicio (*italiano*) o un pronombre. Concuerda con el verbo en persona y número. Puede aparecer en cualquier posición dentro de la oración.
El sujeto puede ser clasificado según su significado, composición, o el elemento que lo constituye.

	Categoría	*Descripción*	*Ejemplo*
Según el significado	Agente	El sujeto es quien protagoniza la acción.	*Mientras estudiaba, ella vigilaba a sus hermanos.*
	Paciente	El sujeto recibe la acción; aparece siempre en oraciones pasivas;[90] éstas requieren a veces de la preposición por.	*Apenas terminado el coloquio, los artículos fueron retirados por los ponentes.*
Según su composición	Simple	Formado por una palabra.	*Él se retiró inmediatamente al terminar la marcha.*
	Complejo	Formado por una combinación de palabras o sintagma nominal.[91]	*La colecta de alimentos, ropa y medicinas beneficiará a los damnificados.*
	Tácito	El sujeto no está expreso.	*Preguntaron.*

90. Las oraciones pasivas son las formadas por voz pasiva. La voz pasiva se construye con el verbo ser, conjugado en el tiempo que corresponda, más el participio del verbo conjugado. Ejemplos: *fue comprado, fue firmado, serán planeadas*.
En la voz pasiva alguien o algo recibe la acción pasivamente, es decir, esta forma de verbo indica que alguien o algo recibe el resultado de la acción que ejecuta otro. Así, el sujeto es el paciente, es quien recibe la acción. Ejemplo: *los exámenes fueron calificados por el profesor.*

91. Un sintagma es una unidad constituida por una palabra que es la más importante y funciona como núcleo, el cual puede acompañarse de complementos o modificadores. Un sintagma nominal tiene como núcleo un nombre, pronombre o palabra sustantivada, ejemplo: *la casa antigua*. El núcleo de los sintagmas nominales puede tener adjetivos o artículos que desempeñan un papel de modificadores directos, y concuerdan en género y número con el núcleo, ejemplo: *editoriales serias y confiables*.

Según el elemento que lo constituye	Nominal	Su núcleo es un nombre.	*El asesor comenzó la clase presentando sus objetivos.*
	Pronominal	Su núcleo es un pronombre.	*Ella se mostró convencida de su elección.*

Los siguientes elementos pueden funcionar como sujetos:

	Ejemplos
Una persona	*Héctor trabaja en la vulcanizadora.*
Una cosa	*El radiador fue cambiado sin importar su costo.*
Una cualidad	*La bondad de tus actos merece una recompensa.*
Una acción	*La llegada de autobuses será según lo estipulado en el reglamento.*

Predicado

- Predicado nominal. Es el predicado gramatical en donde lo que se afirma del sujeto está fundamentalmente contenido en un nombre o un adjetivo, haciendo el verbo sólo el papel de nexo. Por ejemplo: *la nube es blanca*. *Verónica es admirable*.
- Predicado verbal. Es el predicado gramatical en donde lo que se afirma del sujeto está fundamentalmente contenido en el verbo. Por ejemplo: *los invitados llegaron*. *El enfermo despertó*.

El predicado puede ser determinado según el significado o su composición.

	Categoría	*Descripción*	*Ejemplo*
Según el significado	Agente	El predicado es quien protagoniza la acción.	*El director de la compañía reelaboró los objetivos.*
	Paciente	El predicado recibe la acción; aparece siempre en oraciones pasivas; a veces éstas requieren de la presencia de la preposición por.	*Los negativos y la impresión fueron cuidados por el editor.*
Según su composición	Simple	Formado por una palabra.	*Organizó*
	Complejo	Formado por una combinación de palabras o complementos.	*Las mayúsculas acentuadas llevarán tilde sin excepción alguna.*
	Perifrástico	El núcleo del predicado está formado por una perífrasis verbal, es decir, por la unión de dos o más verbos, con o sin preposición entre ellos.	*Los puntos suspensivos no necesitan ir acompañados ni de paréntesis, ni de corchetes.*

Reactivos de Sujeto y predicado

Soluciones: véase la página 284. Desarrollos: véase la página 447

1. Selecciona la oración cuyo significado sea correcto.
   A. El núcleo del sujeto debe concordar únicamente en persona con el verbo.
   B. El núcleo del sujeto no debe concordar ni en persona, ni en número con el verbo.
   C. El núcleo del sujeto debe concordar únicamente en número con el verbo.
   D. El núcleo del sujeto generalmente no concuerda ni en persona, ni en número con el verbo.
   E. El núcleo del sujeto siempre debe concordar en persona y número con el verbo.
2. Selecciona el sujeto de la oración: "Los diputados, senadores y gobernadores fueron destituidos de sus cargos".
   A. Los diputados, senadores y gobernadores.
   B. Los diputados.
   C. Los diputados fueron.
   D. Los diputados, senadores.
   E. Los.
3. Selecciona el predicado de la oración: "Las elecciones fueron reprogramadas para el sábado siguiente".
   A. Fueron reprogramadas.
   B. Las elecciones fueron.
   C. Reprogramadas para el sábado siguiente.
   D. Fueron reprogramadas para el sábado siguiente.
   E. Para el sábado siguiente.
4. Relaciona las columnas según el tipo de sujeto.

1. Nosotros fuimos los culpables de la demora.	a. Paciente
2. Los actores escenificaron la puesta en escena con gran talento.	b. Simple
3. Proyectaron las cintas ganadoras.	c. Agente
4. Pedro publicó los resultados de los exámenes.	d. Tácito
5. Los donativos fueron recibidos por las instituciones.	e. Nominal

   A. 1a, 2d, 3a, 4b, 5c
   B. 1c, 2d, 3e, 4a, 5b
   C. 1d, 2a, 3c, 4b, 5e
   D. 1e, 2c, 3b, 4d, 5a
   E. 1c, 2e, 3d, 4b, 5a
5. Selecciona la oración escrita en voz pasiva.
   A. Los estados afectados serán reprogramados para brindarles ayuda.
   B. La letra cursiva se utiliza para marcar énfasis en un término.
   C. El té se hizo con prisa.
   D. Los números de pie de página suelen ser independientes de cada capítulo.
   E. La crema fue recetada por el dermatólogo.

4.5 Puntuación

4.5.1 Los signos de puntuación

Los signos de puntuación son signos ortográficos cuya función es delimitar unidades del discurso. Entre ellos están:

El punto (.)	La raya (—)
La coma (,)	Las comillas (“ ”)
El punto y coma (;)	Los signos de interrogación (¿?)
Los dos puntos (:)	Los signos de exclamación (¡!)
Los paréntesis ( )	Los puntos suspensivos (. . .)
Los corchetes ([ ])	

La puntuación de los textos escritos constituye una parte básica dentro de la ortografía de cualquier idioma; refleja orden, estructura y jerarquías. La apropiada puntuación permite evitar ambigüedad en los textos escritos (aunque ello, también, lo evita el contexto). Del uso adecuado de los signos de puntuación, en los discursos escritos, depende la correcta comprensión de lo que el escritor pretende decir. Si bien el uso de los signos depende en gran medida de la intención y estilo de quien redacta, existen reglas básicas que ayudan a determinar qué signos y cuándo usarlos.[92] Así, las mismas palabras, acomodadas en el mismo orden, pueden tener significados diferentes según los signos de puntuación que se empleen.

Ejemplos:

Oración	*Interpretación*
Llegaste retrasado.	Al carecer de signos de puntuación, la oración indica que el sujeto llegó tarde, es decir, se expresa cómo llegó.
Llegaste, retrasado.	El signo de puntuación (coma) en esta oración indica que se le está dando un calificativo (peyorativo) al sujeto, es decir, no se expresa cómo llegó, sino quién llegó.
Se le cayó su cartera, y su vecino la tomó, y se la llevó.	La última coma sirve para aclarar que el vecino tomó la cartera y se la regresó a quien se le había caído.
Se le cayó su cartera, y su vecino la tomó y se la llevó.	La ausencia de coma entre el verbo y la conjunción indica que el vecino tomó la cartera y se la quedó.

Puntuar adecuadamente facilita la correcta interpretación de los textos. He aquí algunas reglas básicas.

Punto

Indica una pausa completa en la redacción.

92. Las reglas básicas del uso de los signos de puntuación se explican a continuación.

Se usa punto	*Ejemplo*
Al final de una oración.	*Queremos emplear adecuadamente los signos de puntuación.*
Como signo de abreviatura.	*Etc., Sra., op. cit.*
En las cifras numéricas para separar decimales.[93]	*1 852.20*

No se usa punto	*Ejemplo*
En los símbolos correspondientes a magnitudes, formados por letras de las palabras respectivas.	*12 km*
Al final de títulos y subtítulos.	*Números primos*

Coma

Se usa coma	*Ejemplo*
Cuando se realiza alguna enumeración.	*Compré plátanos, sandías, piñas y mangos.*
Cuando se omite el verbo.	*La niña es tímida; el niño, travieso.*
En construcciones del tipo, no sólo, sino, tanto, como, desde, hasta,	*Limpia, no sólo las ventanas, sino también los pisos.*
Antes de la conjunción y cuando existe un cambio de asunto o tema.	*Fui a tu casa, y no estabas.*
Antes de conjunciones que se reiteran.	*No iré ni al desayuno, ni a la comida.*
El vocativo,[94] cuando se presenta en medio de la frase, debe llevar coma antes y después, y cuando aparece al inicio de la frase debe llevar la coma después del mismo.	*La cartera, mamá, está en la mesa.* *Pedro, no olvides despedirte.*
Para dividir varios miembros independientes en una cláusula.	*Ellos corrían, aquellos jugaban, todos se divertían.*
Cuando una oración se interrumpe para intercalar un inciso, para delimitarlo.	*María, nuestra vecina, también asistió.*
Entre la mención del lugar de procedencia y la fecha que se colocan en determinados escritos.	*México, DF, 13 de mayo de 2013.*
Para separar los apellidos de los nombres de personas en bibliografía.	*Zavala Ruiz, Roberto.*

93. En otros países como Argentina, España, Francia..., se usa coma (,).

94. Palabra que sirve para invocar, llamar o nombrar, con más o menos énfasis, a una persona o cosa personificada.

No se usa coma	*Ejemplo*
Para separar sujeto de predicado, salvo que entre ellos haya inciso.	*Los integrantes del comité decidieron organizar una subasta.*
En oraciones especificativas.[95]	*La hipótesis planteada por el abogado es correcta.*

Coma opcional
El uso de la coma puede depender del gusto o la intención de quien escribe. Debe optarse por un empleo racional y equilibrado, evitando tanto el exceso como el defecto.

Punto y coma

Se usa punto y coma	*Ejemplo*
Para separar oraciones yuxtapuestas.	*En cuanto lo supieron, salieron a verlo; aún vivía.*
Para separar oraciones complejas que presentan comas.	*Una de ellas, joven, vestía de negro; la otra, algo mayor, reía.*

Dos puntos

Se usan dos puntos	*Ejemplo*
Para introducir ejemplos, enumeraciones, listados, etcétera.	*Las palabras agudas tienen la sílaba tónica en la última sílaba, por ejemplo: intención, precaución, calcetín.*
Antes de un enunciado que es consecuencia de lo anterior.	*Él estudia mucho: sacará buenas calificaciones.*
Para introducir palabras textuales.	*Ferdinand de Saussure llegó a la conclusión siguiente: "La unidad lingüística es una cosa doble, hecha con la unión de dos términos".*

Puntos suspensivos

Se usan puntos suspensivos	*Ejemplo*
En citas textuales, cuando se omite un fragmento que se considera innecesario transcribir.	*Juana Inés de Asbaje y Ramírez . . . fue la mayor figura de las letras hispanoamericanas del siglo XVI.*
Cuando se deja sin terminar una frase.	*Niña prodigio, aprendió a leer y escribir a los tres años, a los ocho escribió su primera loa. . .*

Reactivos de Los signos de puntuación

Soluciones: véase la página 284. Desarrollos: véase la página 448

1. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados de manera adecuada.

95. Estas oraciones especifican o restringen el sentido del sustantivo que las antecede.

A. Se escriben con b, las palabras que contienen el elemento compositivo bio (vida). Ejemplos *biosfera, biografía, microbio, anaerobio.*

B. Se escriben con b las palabras que contienen el elemento compositivo bio (vida). Ejemplos: *biosfera, biografía, microbio, anaerobio.*

C. Se escriben con b las palabras, que contienen el elemento compositivo bio (vida). Ejemplos, *biosfera, biografía, microbio, anaerobio.*

D. Se escriben con b las palabras que contienen el elemento compositivo bio (vida). Ejemplos: *biosfera; biografía; microbio; anaerobio.*

E. Se escriben, con b las palabras que contienen el elemento compositivo bio (vida), Ejemplos; *biosfera, biografía, microbio, anaerobio.*

2. En el espacio señalado, selecciona la oración que requiera de coma (,).

A. Brasil, Canadá, Belice, México, Suiza y Ucrania _ son algunos de los estados miembros de las Naciones Unidas.

B. Brasil, Canadá, Belice, México, Suiza y_ Ucrania son algunos de los estados miembros de las Naciones Unidas.

C. Brasil, Canadá, Belice, México, Suiza y Ucrania son algunos de los estados_ miembros de las Naciones Unidas.

D. Brasil, Canadá, Belice, México, Suiza y Ucrania son algunos de los estados miembros de_ las Naciones Unidas.

E. Brasil_ Canadá, Belice, México, Suiza y Ucrania son algunos de los estados miembros de las Naciones Unidas.

3. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados correctamente.

A. Asistieron a la reunión padres, tíos, hermanos, sobrinos y amigos.

B. Asistieron, a la reunión padres, tíos, hermanos, sobrinos y amigos.

C. Asistieron a la reunión: padres, tíos, hermanos, sobrinos y amigos.

D. Asistieron a la reunión, padres, tíos, hermanos, sobrinos y amigos.

E. Asistieron a la reunión. Padres, tíos, hermanos, sobrinos y, amigos.

4. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados correctamente.

A. El presidente municipal y, los ciudadanos involucrados en el conflicto acudieron a la reunión de conciliación.

B. El presidente municipal y los ciudadanos involucrados en el conflicto, acudieron a la reunión de conciliación.

C. El presidente municipal y los ciudadanos involucrados en el conflicto acudieron a la reunión de conciliación.

D. El presidente municipal; y los ciudadanos involucrados, en el conflicto acudieron a la reunión de conciliación.

E. El presidente municipal y los ciudadanos: involucrados en el conflicto, acudieron a la reunión de conciliación.

5. Relaciona las columnas según los signos de puntuación que correspondan a los espacios señalados.

1. Antes de entregar el trabajo revisa_ redacción, ortografía y sintaxis.	a. Puntos suspensivos (. . .)
2. La película fue aburrida_ la obra de teatro, dinámica.	b. Dos puntos (:)
3. Él está sin trabajo_ ella necesita un ayudante.	c. Punto (.)
4. El ensayo fue tedioso, agotador, prolongado, etc_	d. Coma (,)
5. Cría cuervos y_	e. Punto y coma (;)

A. 1b, 2e, 3d, 4c, 5a
B. 1a, 2d, 3e, 4b, 5c
C. 1c, 2d, 3e, 4a, 5b
D. 1d, 2a, 3c, 4b, 5e
E. 1e, 2c, 3b, 4d, 5a

6. Selecciona la oración que requiera coma (,) en el espacio señalado.

A. La señal de la televisión es baja_ la del celular buena.
B. La señal de la televisión_ es baja la del celular, buena.
C. La señal de la televisión es baja; la del celular_ buena.
D. La señal_ de la televisión es baja; la del celular buena.
E. La señal de la televisión es baja la_ del celular, buena.

7. Selecciona la oración que requiera punto (.) en los espacios señalados.

A. No terminé el reporte. ¡Mañana continuaré!_ Tendré que dedicarle más tiempo.
B. No terminé_ el reporte ¡Mañana continuaré! Tendré que dedicarle más tiempo.
C. No terminé el reporte_ ¡Mañana continuaré! Tendré que dedicarle más tiempo.
D. No terminé el reporte ¡Mañana continuaré!_ Tendré que dedicarle más tiempo_
E. No terminé el reporte_ ¡Mañana continuaré!_ Tendré que dedicarle más tiempo.

8. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados correctamente.

A. Es común que la gente, separe los millares, millones, etc. mediante una coma, pero la norma internacional establece que se debe prescindir de ella y usar un pequeño espacio en blanco.
B. Es común que la gente separe los millares, millones, etc, mediante una coma pero la norma internacional establece que se debe prescindir de ella y usar un pequeño espacio en blanco.
C. Es común, que la gente separe los millares, millones, etc., mediante una coma, pero la norma internacional, establece que se debe prescindir de ella y usar un pequeño espacio en blanco.
D. Es común que la gente separe los millares, millones, etc. mediante una coma pero la norma internacional establece, que se debe prescindir de ella y usar un pequeño espacio en blanco.
E. Es común que la gente separe los millares, millones, etc. mediante una coma, pero la norma internacional establece que se debe prescindir de ella, y usar un pequeño espacio en blanco.

9. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados correctamente.

A. Las palabras que se escriben con k, son las procedentes de otras lenguas que han respetado su ortografía original, Ejemplos: *kiwi, kermés, kurdo,* etcétera.

B. Las palabras que se escriben con k son las procedentes de otras lenguas que han respetado su ortografía original. Ejemplos: *kiwi, kermés, kurdo,* etcétera.

C. Las palabras, que se escriben, con k son las procedentes de otras lenguas que han respetado su ortografía original. Ejemplos, *kiwi, kermés, kurdo,* etcétera.

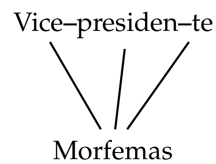
D. Las palabras, que se escriben con k son las procedentes de otras lenguas que han respetado su ortografía original. Ejemplos, *kiwi, kermés, kurdo,* etcétera.

E. Las palabras que se escriben con k; son las procedentes de otras lenguas que han respetado su ortografía original. Ejemplos, *kiwi, kermés, kurdo,* etcétera.

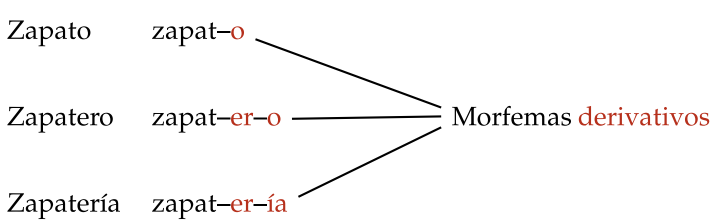
4.6 Manejo de vocabulario

4.6.1 Morfología flexiva y derivativa

Las palabras están constituidas por uno o más morfemas.
Por ejemplo: *vicepresidente*[96] tiene 3 morfemas.



La morfología de una lengua permite hacer mucho con poco:



Se llaman morfemas derivativos porque permiten obtener derivados de las palabras.

Los verbos en español (morfemas flexivos) se pueden conjugar (flexionar). Observa:

Conjugación en presente:

Morfemas flexivos

Habl–ar	Com–er	Viv–ir
hablo	como	vivo
hablas	comes	vives
habla	come	vive
hablamos	comemos	vivimos
hablan	comen	viven

96. Pudo haber sido vicepresidenta, género femenino.

Conjugación de los verbos en pretérito:[97]

Habl–ar	Com–er	Viv–ir
hablé	comí	viví
hablaste	comiste	viviste
habló	comió	vivió
hablamos	comimos	vivimos
hablaron	comieron	vivieron

Nuestra lengua aprovecha la morfología flexiva y la derivativa[98] para producir muchas palabras.
La conjugación en presente y en pretérito de los verbos de las tres conjugaciones[99] nos muestra que unos morfemas no cambian: habl–, com– y viv–. Se llaman morfemas raíz.
Los morfemas que posibilitan que las palabras se deriven pueden ir antes o después del morfema raíz: extra–ordinario, frut–ería.

Reactivos de Morfología flexiva y derivativa
Soluciones: véase la página 284. Desarrollos: véase la página 449

1. Señala las palabras que se modificaron por el empleo de la morfología derivativa

   a. Compramos
   b. Compro
   c. Compraría
   d. Frutero
   e. Frutería

   A. a, d
   B. a, e
   C. d, e
   D. c, d
   E. c, e

2. Indica cuáles son los morfemas raíz de las palabras de las “opciones de respuesta” del enunciado anterior.

   A. –ero, –o
   B. –ero, –ería
   C. –amos, –aría
   D. –ería, –aría
   E. compr–, frut–

97. Pretérito y presente son tiempos de los verbos en español.
98. Aunque no todas las lenguas (hay cerca de **6 800**) funcionan igual que el español, todas tienen procedimientos muy económicos: hacen mucho con poco.
99. Primera conjugación: verbos cuyo infinitivo es el morfema –ar. Segunda, los que forman su infinitivo con el morfema –er. Tercera, –ir.

3. Relaciona las columnas siguientes:

1. Morfología flexiva	a. lava
2. Morfología derivativa	b. –dero, –bo, –ndera
3. Morfema raíz	c. –o, –as, –amos, –an
4. Morfemas derivativos	d. Permite conjugar los verbos
5. Morfemas flexivos	e. Posibilita crear antónimos
	f. Procedimiento para producir palabras

A. 1d, 2f, 3a, 4b, 5c
B. 1c, 2f, 3d, 4b, 5e
C. 1d, 2f, 3d, 4c, 5b
D. 1c, 2f, 3b, 4d, 5e
E. 1d, 2f, 3a, 4c, 5b

4.6.2 Sinónimos y antónimos

Los sinónimos son palabras que tienen una misma o muy parecida significación[100] y pertenecen a la misma categoría gramatical[101]. Ejemplos:

Erudito, *sabio,* *culto,* *instruido.*

Son sinónimos.

Significan lo mismo y tienen la misma categoría gramatical: son sustantivos.

Los sinónimos suelen sustituir a otras palabras en frases o enunciados sin alterar notablemente el significado.[102]

Ejemplos:

1. *Compró la medicina.*
2. *Compró el medicamento.*
3. *El pesimismo es una actitud que debiera superarse.*
4. *El derrotismo es una actitud que debiera superarse .*

100. Por significación se entiene el sentido que tiene una palabra u oración.
101. Por categoría gramatical se entiende, tradicionalmente, cada una de las distintas clases de palabras que tienen en la oración diferente oficio. Por ejemplo: *sustantivo, artículo, verbo,* etcétera.
102. El significado corresponde a la significación o sentido de una palabra o de una frase.

Como puedes observar en las oraciones 1.–4., una palabra sustituye a otra, sin alterar notablemente el significado de las mismas. Asimismo podrás notar que el significado entre las oraciones no es exacto. Ello se explica porque en las lenguas no hay sinónimos perfectos.

Los antónimos son opuestos a los sinónimos. Significan lo contrario. De igual modo que con los sinónimos, deben pertenecer a la misma categoría gramatical.

Ejemplos:

Presumido, *modesto.*

Son *antónimos*

Significan lo opuesto y tienen la misma categoría gramatical: son sustantivos.

Si en una frase o enunciado se cambia una palabra por su antónimo correspondiente, se modifica su significado.

Ejemplos

Capturaron al asaltante *Soltaron al asaltante*

Son antónimos

Tienen la misma categoría gramatical: son verbos.

Nuestros seguidores *Nuestros adversarios*

Son antónimos

Tienen la misma categoría gramatical: son sustantivos.

Reactivos de Sinónimos y antónimos

Soluciones: véase la página 284. Desarrollos: véase la página 450

1. Identifica los sinónimos. Relaciona las columnas.

1. Ruborizar	a. Hablar
2. Cuesta	b. Pendiente
3. Presagio	c. Desintegrar
4. Casero	d. Arrendador
5. Comentar	e. Vaticinio
	f. Avergonzar

A. 1c, 2b, 3e, 4d, 5f
B. 1a, 2b, 3e, 4d, 5a
C. 1f, 2b, 3e, 4d, 5a
D. 1c, 2e, 3d, 4d, 5f
E. 1f, 2b, 3d, 4e, 5f

2. Identifica los antónimos. Relaciona las columnas.

1. Obligado	a. Perfeccionar
2. Exigencia	b. Debilidad
3. Destruir	c. Pulcro
4. Desaliñado	d. Caótico
5. Ordenado	e. Crear
	f. Optativo

A. 1c, 2b, 3e, 4d, 5f
B. 1a, 2b, 3e, 4d, 5a
C. 1c, 2e, 3d, 4d, 5f
D. 1f, 2b, 3e, 4c, 5d
E. 1f, 2b, 3d, 4e, 5d

5. Razonamiento matemático

5.1 Sucesiones numéricas

Una sucesión numérica es un conjunto de números ordenados por medio de los números naturales. Es frecuente que la sucesión esté definida usando una expresión.
Por *ejemplo*, la expresión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, donde n es un número natural, define la siguiente sucesión:

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, \ldots$$

Si escribimos la sucesión anterior ordenada:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots \end{array}$$

En donde $\dfrac{1}{2}$ es el primer elemento de la sucesión, $\dfrac{2}{3}$ es el segundo elemento, etcétera.
Decimos que la expresión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ es la regla que define a la sucesión o bien que es el algoritmo que define a la sucesión.

Sucesiones aritméticas

La regla que define estas sucesiones es:

$$a_n = a + (n-1)d.$$

En estas sucesiones se comienza con un número a; luego se va sumando una cantidad fija d al último elemento de la sucesión. Esto es, para $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$a_1 = a + (1-1)d = a; \quad a_2 = a + (2-1)d = a + d; \quad a_3 = a + 2d; \quad a_4 = a + 3d; \cdots$$

Por *ejemplo*:

$$a_n = 5 + (n-1) * 3,$$

define la siguiente sucesión:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 5 + 0 * 3 = 5, & a_2 = 5 + 1 * 3 = 8, & a_3 = 5 + 2 * 3 = 11, & a_4 = 5 + 3 * 3 = 14, \cdots \\ a_1 = 5, & a_2 = 5 + 3 = 8, & a_3 = 8 + 3 = 11, & a_4 = 11 + 3 = 14, \cdots \end{array}$$

Sucesiones geométricas

La regla que define estas sucesiones es:

$$a_n = a * d^{n-1}.$$

En estas sucesiones se comienza con un número a; luego se multiplica una cantidad fija d al último elemento de la sucesión. Esto es, para $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$a_1 = ad^{1-1} = ad^0 = a; \quad a_2 = ad^{2-1} = ad; \quad a_3 = ad(d) = ad^2; \quad a_4 = ad^3; \quad a_5 = ad^4; \cdots$$

Por *ejemplo*:

$$a_n = 5 * 3^{n-1},$$

define la siguiente sucesión

$$\begin{array}{llll} a_1 = 5 * 3^0 = 5 * 1 = 5, & a_2 = 5 * 3^1 = 15, & a_3 = 5 * 3^2 = 45, & a_4 = 5 * 3^3 = 5 * 27 = 135, \cdots \\ a_1 = 5, & a_2 = 5(3) = 15, & a_3 = 15(3) = 45, & a_4 = 45(3) = 135, \cdots \end{array}$$

Sucesiones definidas recursivamente

La regla que define a_n en estas sucesiones depende de alguno de los elementos anteriores en la sucesión. Por *ejemplo*:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

define la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2, \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3, \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Reactivos de Sucesiones numéricas

Soluciones: véase la página 284. Desarrollos: véase la página 451

1. Proporciona el siguiente elemento de la sucesión:

$$5, \quad 9, \quad 13, \quad 17, \quad ?, \quad \cdots$$

A. 19
B. 23
C. 21
D. 20
E. 22

2. Proporciona el siguiente elemento de la sucesión:

$$-1, \quad -2, \quad -4, \quad -8, \quad ?, \quad \cdots$$

A. -16
B. -12
C. -10
D. -14
E. -32

3. Proporciona los siguientes dos elementos de la sucesión:

$$5, \quad -2 \quad 9, \quad -4 \quad 13, \quad -8 \quad 17, \quad ?, \quad ? \quad \cdots$$

A. -16 21
B. -18 21

C. -16 23
D. -21 16
E. -18 23

4. Calcular el quinto elemento de la sucesión definida recusivamente de la siguiente manera:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 3, \quad a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2}; \text{ si } n \geq 3.$$

A. $\dfrac{27}{8}$
B. $\dfrac{9}{16}$
C. $\dfrac{27}{16}$
D. $\dfrac{3}{4}$
E. $\dfrac{7}{16}$

5.2 Razonamiento aritmético

Es común que, en un problema que se desea resolver, aparezcan cantidades ya conocidas y otras desconocidas. Generalmente las relaciones entre dichas cantidades están explicitadas mediante palabras, frases u oraciones.

Para resolver un problema de este tipo, conviene leerlo cuidadosamente para, primero, precisar lo que se desea en él; luego expresar en términos matemáticos la información dada en el problema.

Aquí se proponen problemas que pueden resolverse mediante razonamientos que involucran solamente números; es decir, donde no son necesarios procedimientos algebraicos.

Reactivos de Razonamiento aritmético
Soluciones: véase la página 285. Desarrollos: véase la página 452

1. Actualmente, la suma de las edades de 4 estudiantes es de 105. ¿Cuánto sumaban sus edades hace cinco años?: ________.

A. 100
B. 85
C. 80
D. 95
E. 90

2. Pedro y Juan compraron una bolsa con 60 caramelos. Pedro aportó \$9 y Juan \$6. Si deciden repartirse los caramelos en función de la cantidad que cada uno aportó, ¿qué cantidad de caramelos obtiene Juan?: ________.

A. 36 caramelos
B. 45% de los 60 caramelos
C. 20 caramelos
D. 35% de los 60 caramelos
E. 24 caramelos

3. Un vendedor compra una caja de 100 discos compactos a un precio de \$300. ¿A qué precio tiene que vender cada decena de discos para tener una gananacia total del 25%?: ________.

   A. \$75
   B. \$37.50
   C. \$3.50
   D. \$35.0
   E. \$3.75

4. El 60% de estudiantes de un grupo aprobó el curso. El 75% de los aprobados obtuvo una calificación mayor o igual que 7. Si el grupo estuvo conformado por 60 estudiantes, ¿cuántos obtuvieron una calificación menor que 7?: ________.

   A. 27 estudiantes
   B. 33 estudiantes
   C. El 50%
   D. Sólo los reprobados
   E. El 45%

5. Hace 3 años la edad de un padre era 4 veces la edad de su hija. Si actualmente el padre tiene 51 años, ¿cuál es la edad actual de la hija?: ________.

   A. 12 años
   B. 15 años
   C. 13 años
   D. 12 años y medio
   E. 14 años

6. Con 25 mosaicos cuadrados se cubre un metro cuadrado (m^2). ¿Cuántos centímetros (cm) mide el lado de cada mosaico?: ________.

   A. 25 cm
   B. 20 cm
   C. 40 cm
   D. 22 cm
   E. 27 cm

7. Tres listones miden, respectivamente, $2\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{5}$, $3\frac{1}{2}$ cm. Si éstos se colocan uno a continuación del otro, ¿Cuánto miden los tres listones?: ________.

   A. 10 cm
   B. $10\frac{30}{13}$ cm
   C. 13 cm
   D. $13\frac{10}{30}$ cm
   E. $10\frac{13}{30}$ cm

8. Al sumar dos números se obtienen $16\frac{4}{5}$. Si uno de los números es 9.36, ¿cuál es el otro número?: ________.

   A. $\frac{744}{1\,000}$

B. $7\dfrac{11}{25}$

C. $7\dfrac{100}{44}$

D. $7\dfrac{25}{11}$

E. 7.4

9. De un lote de 20 frascos con miel, cada uno pesa 6.35 kg. Si cada frasco vacío pesa 650 g y el kilo de miel tiene un valor de \$45, ¿cuánto cuesta el total de la miel del lote?: ________.

   A. \$5 715

   B. \$5 130

   C. \$51 300

   D. \$5 000

   E. \$5 500

10. Un barco en el que se encuentran 30 personas lleva provisiones para 45 días. Si el número de personas aumenta en 6, ¿cuántos días durarán las provisiones?: ________.

    A. 35

    B. 37

    C. 36

    D. 40

    E. 38

5.3 Razonamiento algebraico

En un problema que se desea resolver aparecen cantidades, unas conocidas y otras desconocidas, así como relaciones entre ellas.

En algunos problemas, las cantidades desconocidas pueden ser expresadas en términos de una de ellas. Estos problemas son modelados y resueltos mediante una ecuación de una sola incógnita.

Así también, hay otros problemas en los que se necesita más de una incógnita para expresar todas las cantidades desconocidas. Estos problemas deben ser modelados y resueltos mediante un sistema de ecuaciones.

Entendemos por modelar un problema, expresarlo matemáticamente mediante una o más ecuaciones y, por resolver un problema, entendemos obtener o determinar los valores de las cantidades desconocidas que permiten el cumplimiento de todas las afirmaciones hechas en el problema mismo.

Para modelar y resolver un problema, se requiere llevar a cabo los pasos siguientes:

1. Leer cuidadosamente el problema para identificar lo que se pide en él. Esto es, debemos precisar qué es lo que se quiere en el problema.

2. Identificar las cantidades conocidas y sobre todo cuáles son las cantidades desconocidas o incógnitas.

3. Una vez identificadas las incógnitas del problema, debemos elegir una de ellas y representarla mediante una letra; esto con la finalidad de expresar a las otras cantidades desconocidas en términos de la letra o incógnita elegida.

4. Para representar a todas las cantidades desconocidas en términos de la incógnita elegida, se deben precisar los datos que indican las relaciones que guardan dichas cantidades.

5. Se obtiene así una ecuación (o más de una ecuación) para modelar el problema.
6. Se resuelve la ecuación o el sistema de ecuaciones.
7. Finalmente, debemos verificar que la solución obtenida permita el cumplimiento de todas las afirmaciones hechas en el problema.

Reactivos de Razonamiento algebraico

Soluciones: véase la página 285. Desarrollos: véase la página 457

1. Pepe tiene 52 años y su hermano Jorge 48. ¿Cuántos años hace que la edad de Jorge era $\frac{9}{10}$ de la de Pepe?: ______.
   A. 10
   B. 12
   C. 14
   D. 8
   E. 16
2. La suma de las edades de 3 personas es 155 años. La mayor tiene 24 años más que la menor y la mediana 7 años menos que la mayor. ¿Cuál es la edad de la persona mayor?: ______.
   A. 46
   B. 65
   C. 60
   D. 55
   E. 62
3. Ana tiene \$4 700 en billetes de \$200 y de \$50. Si ella tiene 40 billetes en total, ¿Cuántos billetes de \$50 tiene?: ______.
   A. 18
   B. 20
   C. 26
   D. 22
   E. 24
4. María pidió un préstamo de \$100 000 por un año, una parte a un banco con una tasa de interés de 30% anual y el resto a un amigo con una tasa de 15% anual. Al final del año, María pagó \$21 000 de intereses. ¿Qué cantidad pidió prestada a su amigo?: ______.
   A. \$40 000
   B. \$55 000
   C. \$50 000
   D. \$70 000
   E. \$60 000
5. Norma invirtió la mitad de su dinero con un interés de 8% y una cuarta parte con interés de 6%. Si al final del año recibió \$3 300 de intereses, ¿qué cantidad invirtió con interés de 8%?: ______.
   A. \$30 000
   B. \$60 000

C. \$ 25 000
D. \$40 000
E. \$32 000

6. Un terreno rectangular tiene de largo 4 m menos que el triple de su ancho. Si el área del terreno es de 160 m^2 ¿cuántos metros mide de largo el terreno?: ________.

A. 17 m
B. 20 m
C. 14 m
D. 23 m
E. 16 m

7. Rafael compró cierto número de libros y pagó \$2 000 y cierto número de plumas por las que pagó \$2 000. Cada libro costó \$50 más que cada pluma y el número de plumas excedió al de libros en 2. ¿Cuántos libros compró?: ________.

A. 8
B. 10
C. 7
D. 9
E. 11

8. Luis compró 20 litros (ℓ) de jugos, de naranja y de mandarina. Cada litro de jugo de naranja cuesta \$14 y el de mandarina \$18. Si por los 20 ℓ pagó \$312 ¿Cuántos litros de jugo de mandarina compró?: ________.

A. 12
B. 9
C. 8
D. 11
E. 7

9. Ana le dice a Juan: si me das la mitad del dinero que tienes y 60 pesos más, tendré 4 veces lo que tu tendrás, y Juan le contesta: mejor dame 80 pesos y tendré 310 pesos más que tú. ¿Cuánto dinero tiene Juan?: ________.

A. \$150
B. \$ 250
C. \$200
D. \$300
E. \$220

10. Tenemos 60 ℓ de una solución que contiene 20% de cierto ácido. ¿Cuántos litros de agua deben agregarse a esta solución para reducir la concentración del ácido al 15%?: ________.

A. 18
B. 22
C. 19
D. 20
E. 21

11. Tenemos 80 ℓ de una solución que contiene 10% de cierta tintura. ¿Cuántos litros de tintura deben agregarse a esta solución para aumentar la concentración de la tintura al 25%?: ________.

   A. 17
   B. 20
   C. 19
   D. 18
   E. 16

12. En un tanque hay 250 ℓ de solución con un 15% de alcohol y en otro tanque hay otra solución, pero con un 60% de alcohol.

   ¿Cuántos litros de la solución más concentrada de alcohol se deben agregar al otro tanque para que la concentración aumente hasta 40%?: ________.

   A. 312.5
   B. 300
   C. 250
   D. 275.5
   E. 290

13. Pedro puede pintar una casa en 10 días y Pablo puede hacerlo en 15 días. Si Pedro y Pablo pintaran juntos la casa, ¿cuántos días tardarían?: ________.

   A. 6
   B. 5
   C. 6.5
   D. 7
   E. 7.5

14. Juan y José, si trabajasen juntos, tardarían 6 días en terminar de pintar una casa. Si Juan trabaja solo, tardará 15 días en pintarla, ¿cuántos días tardaría José en pintar él solo la casa?: ________.

   A. 10
   B. 9
   C. 8
   D. 11
   E. 9.5

15. Rubén puede pintar una casa en el triple de tiempo que le tomaría a Eduardo hacerlo. Trabajando juntos pueden pintar la casa en 9 días. ¿Cuántos días le tomaría a Eduardo?: ________.

   A. 12
   B. 10
   C. 11
   D. 10.5
   E. 11.5

5.4 Razonamiento geométrico

En matemática hay problemas en los que aparecen conceptos geométricos.
Aparecen, además, relaciones de estos conceptos, así como sus propiedades.
En esta sección, trataremos dichos problemas. Para resolverlos necesitas saber calcular lo siguiente: perímetro y área de figuras planas, área y volumen de cuerpos, entre otros.

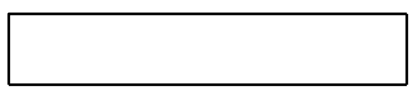
Reactivos de Razonamiento geométrico

Soluciones: véase la página 285. Desarrollos: véase la página 469

1. La figura siguiente corresponde a un rectángulo; si su perímetro es $P = 28$ cm, su área (A) es: ______.

   A. 48 cm^2
   B. 24 cm^2
   C. 144 cm^2
   D. 192 cm^2
   E. 96 cm^2

2. La figura siguiente corresponde a un rectángulo. Si su área es $A = 60$ cm^2, su perímetro (P) es: ______.



   A. 38 cm
   B. 12 cm
   C. 19 cm
   D. 57 cm
   E. 114 cm

3. Un cuadrado tiene un área de 36 cm^2. La longitud de su diagonal es: ______.

   A. 12 cm
   B. 18 cm
   C. $9\sqrt{2}$ cm
   D. 6 cm
   E. $6\sqrt{2}$ cm

4. Si el volumen de un cubo es 8 m^3, entonces la longitud de cualquiera de sus diagonales es: ______.

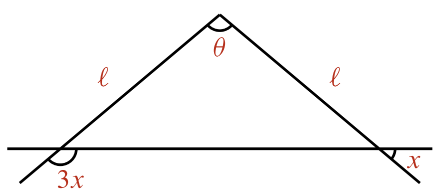
   A. $2\sqrt{3}$ m
   B. $2\sqrt{2}$ m

C. $5\sqrt{3}$ m
D. $3\sqrt{3}$ m
E. $3\sqrt{2}$ m

5. Si la longitud de la diagonal de un cubo es 6 m, entonces el área de la superficie de dicho cubo es: ________.

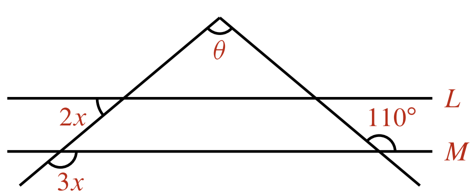
A. 48 m^2
B. 216 m^2
C. 144 m^2
D. 72 m^2
E. 36 m^2

6. En la figura siguiente, el valor del ángulo θ es: ________.



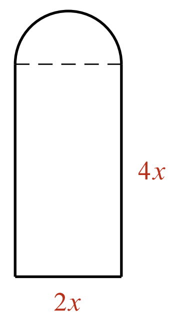
A. 75°
B. 60°
C. 90°
D. 30°
E. 45°

7. En la siguiente figura, las rectas L, M son paralelas; por lo tanto la medida del ángulo θ es: ________.



A. 70°
B. 72°
C. 38°
D. 36°
E. 74°

8. La figura siguiente corresponde a una ventana rectangular coronada con un semicírculo. Si el perímetro de esta ventana es $P = 2(10 + \pi)$ m, entonces el área de la misma es: ______.



A. $2(10 + \pi)\left(\dfrac{10 + \pi}{12 + \pi}\right)^2$ m^2

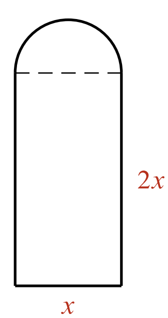
B. $4(8 + \pi)$ m^2

C. $2(16 + \pi)$ m^2

D. $2(10 + \pi)\left(\dfrac{10 + \pi}{12 + \pi}\right)^2$ m^2

E. $\dfrac{1}{2}(16 + \pi)\left(\dfrac{10 + \pi}{6 + \pi}\right)^2$ m^2

9. La figura siguiente corresponde a una ventana rectangular coronada con un semicírculo. Si el área de esta ventana es $A = 2(16 + \pi)$ m^2, entonces el perímetro de la misma es: ______.



A. $2(12 + \pi)$ m

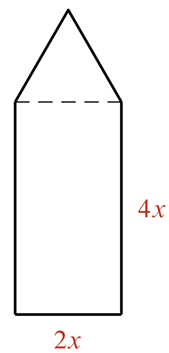
B. $\dfrac{10}{3}$ m

C. $2(10 + \pi)$ m

D. $4(6 + \pi)$ m

E. $4(5 + \pi)$ m

10. La figura siguiente corresponde a una ventana rectangular coronada con un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana es $P = 28$ m, entonces el área de la misma es: ______.

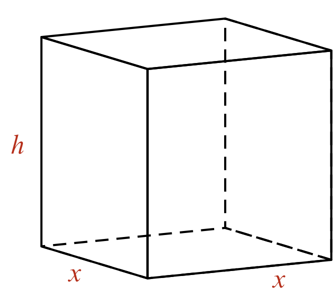


A. $8(4+\sqrt{3})$ m^2
B. $4(5+\sqrt{3})$ m^2
C. $4(8+\sqrt{3})$ m^2
D. 48 m^2
E. 32 m^2

11. Un alambre de ℓ cm de longitud se divide en 2 pedazos, de manera que el pedazo más largo mide el triple que el más corto. Con el más largo se construye un triángulo equilátero y con el más corto un cuadrado. Si el área del cuadrado es de 100 cm^2, entonces el área del triángulo es: ______.

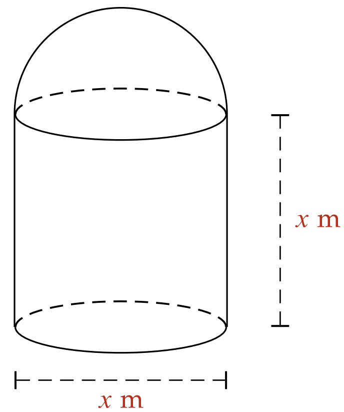
A. $800\sqrt{3}$ cm^2
B. $100\sqrt{3}$ cm^2
C. $400\sqrt{3}$ cm^2
D. $350\sqrt{3}$ cm^2
E. $500\sqrt{3}$ cm^2

12. La siguiente figura corresponde a una caja con base y tapa cuadradas y caras laterales rectangulares. La longitud de la altura es igual al perímetro de la base. Si el volumen de la caja es de 32 m^3, entonces el área de la superficie total de la caja es: ______.



A. 68 m^2
B. 40 m^2
C. 72 m^2
D. $264\ m^2$
E. 256 m^2

13. La siguiente figura corresponde a un tanque de almacenamiento formado por un cilindro circular recto coronado con una semiesfera. La altura y el diámetro del cilindro tienen longitudes iguales. Si el área lateral del cilindro es de 400π m^2, entonces el volumen total del tanque es: ______.



A. $\dfrac{4\,000}{3}\pi$ m^3

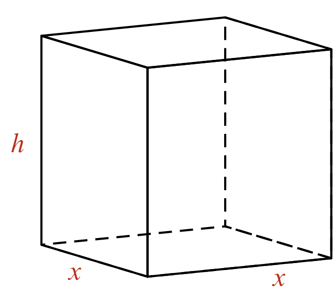
B. $\dfrac{10\,000}{3}\pi$ m^3

C. $\dfrac{8\,000}{3}\pi$ m^3

D. $4\,200\pi$ m^3

E. 420π m^3

14. La siguiente figura corresponde a una caja con base y tapa cuadradas y caras laterales rectangulares. Si la longitud de la altura es igual al perímetro de la tapa y el área total de la superficie de la caja es 72 m^2, entonces el volumen de la caja es: ______.



A. 16 m^3

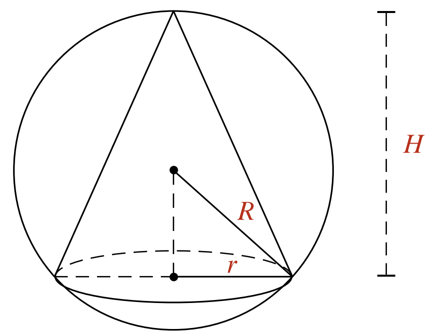
B. $96\sqrt{3}$ m^3

C. 32 m^3

D. $\dfrac{564}{5\sqrt{5}}$ m^3

E. $64\sqrt{2}$ m^3

15. Se tiene la esfera de radio R, e inscrito en ella un cono recto circular de altura $H = \dfrac{4}{3}R$. Si el radio de la esfera es 3, entonces el volumen de la esfera que esta fuera del cono es: ________ .



A. 24π
B. 12π
C. $\dfrac{76}{3}\pi$
D. $\dfrac{32}{3}\pi$
E. $\dfrac{76}{9}\pi$

Sección II

Soluciones de los reactivos

6. Soluciones

Matemática

Aritmética

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor
Reactivos: véase la página 4

1. D.
2. C.
3. D.
4. A.

Operaciónes con fracciones numéricas
Reactivos: véase la página 7

1. C.
2. E.
3. C.
4. E.
5. C.
6. E.
7. A.
8. B.
9. C.
10. E.

Álgebra

Valor numérico de expresiones algebraicas
Reactivos: véase la página 10

1. D.
2. C.
3. A.
4. C.

Reducción de términos semejantes
Reactivos: véase la página 11

1. A.
2. A.
3. D.
4. A.

Símbolos de agrupación
Reactivos: véase la página 13

1. C.
2. A.

Leyes de los exponentes y radicales
Reactivos: véase la página 14

1. E.
2. E.
3. E.
4. A.
5. C.
6. C.
7. E.
8. E.
9. D.
10. C.

Operaciones con polinomios
Reactivos: véase la página 18

1. B.
2. C.
3. E.
4. A.
5. C.
6. A.
7. C.
8. E.

Productos notables
Reactivos: véase la página 21

1. E.
2. B.
3. C.
4. E.
5. D.
6. E.

Factorización
Reactivos: véase la página 25

1. D.
2. D.
3. A.
4. E.
5. B.
6. B.
7. D.
8. E.
9. B.
10. C.
11. A.
12. D.
13. D.
14. C.
15. C.
16. A.

Operaciones con fracciones algebraicas
Reactivos: véase la página 29

1. D.
2. B.
3. E.
4. D.
5. C.
6. D.
7. B.
8. B.
9. C.
10. E.

Racionalización
Reactivos: véase la página 33

1. D.
2. C.
3. B.
4. A.
5. E.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita
Reactivos: véase la página 35

1. E.
2. C.
3. E.
4. A.

Sistemas de ecuaciones lineales 2×2
Reactivos: véase la página 39

1. E.
2. B.
3. D.
4. C.
5. D.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita
Reactivos: véase la página 42

1. D.
2. B.
3. C.
4. D.
5. B.

Sistemas de ecuaciones 2×2 con al menos una cuadrática
Reactivos: véase la página 44

1. B.
2. E.
3. D.
4. B.

Geometría euclideana

Ángulos complementarios y suplementarios
Reactivos: véase la página 45

1. B.
2. A.
3. C.
4. D.

Ángulos formados al cortar dos rectas paralelas con una transversal
Reactivos: véase la página 47

1. D.
2. D.
3. D.
4. C.
5. D.

Propiedades de paralelogramos y triángulos
Reactivos: véase la página 51

1. A.
2. D.
3. A.
4. E.
5. D.

Triángulos congruentes y semejantes
Reactivos: véase la página 56

1. C.
2. C.
3. C.
4. A.
5. B.

Teorema de Pitágoras
Reactivos: véase la página 60

1. B.
2. E.
3. A.
4. B.

Perímetro y área de polígonos y del círculo
Reactivos: véase la página 65

1. C.
2. E.
3. D.
4. C.
5. A.
6. E.
7. C.
8. B.
9. E.
10. A.
11. A.
12. A.
13. A.
14. D.
15. D.
16. C.
17. A.
18. A.
19. C.
20. B.
21. C.
22. A.

Área y volumen de paralelepípedos, cilindros, conos y esferas
Reactivos: véase la página 72

1. E.
2. A.
3. C.
4. C.
5. A.

Trigonometría plana

Medida de ángulos en grados y radianes
Reactivos: véase la página 74

1. A.
2. D.

Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo
Reactivos: véase la página 76

1. D.
2. E.
3. E.
4. A.

Funciones trigonométricas de ángulos notables ($30°$, $45°$, $60°$)
Reactivos: véase la página 78

1. C.
2. A.
3. A.
4. A.

Identidades trigonométricas básicas
Reactivos: véase la página 81

1. D.
2. A.
3. D.
4. A.

Resolución de triángulos rectángulos
Reactivos: véase la página 82

1. C.
2. C.
3. C.
4. C.

Identidades para la adición de ángulos y sustracción de ángulos
Reactivos: véase la página 84

1. D.
2. A.

Leyes de los senos y de los cosenos
Reactivos: véase la página 85

1. E.
2. B.

Resolución de triángulos oblicuángulos
Reactivos: véase la página 86

1. E.
2. B.

Geometría analítica

Distancia entre dos puntos
Reactivos: véase la página 88

1. A.
2. D.
3. B.
4. E.
5. C.
6. E.

División de un segmento en una razón dada. Punto medio
Reactivos: véase la página 92

1. C.
2. A.
3. D.
4. D.

Ángulo de inclinación y pendiente de una recta
Reactivos: véase la página 94

1. B.
2. D.
3. C.
4. C.

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad
Reactivos: véase la página 95

1. D.
2. A.
3. C.
4. E.

Ecuaciones de la recta en todas sus formas
Reactivos: véase la página 99

1. E.
2. B.
3. E.
4. E.
5. A.
6. B.

Intersección de rectas
Reactivos: véase la página 101

1. D.
2. D.
3. C.
4. D.
5. B.
6. A.

Ecuación y elementos principales de la circunferencia
Reactivos: véase la página 103

1. A.
2. A.
3. B.
4. C.
5. C.
6. B.

Ecuación y elementos principales de la parábola
Reactivos: véase la página 106

1. A.
2. E.
3. D.
4. A.
5. A.
6. E.

Ecuación y elementos principales de la elipse
Reactivos: véase la página 109

1. A.
2. B.
3. E.
4. E.

Ecuación y elementos principales de la hipérbola
Reactivos: véase la página 112

1. B.
2. A.
3. E.
4. E.

Cálculo diferencial e integral

Derivadas de sumas, productos, cocientes y potencias de funciones
Reactivos: véase la página 115

1. B.
2. C.
3. B.
4. B.
5. E.

Integrales inmediatas
Reactivos: véase la página 117

1. E.
2. C.
3. B.
4. D.
5. A.

Física

Análisis dimensional

Sistema internacional de unidades (SI)
Reactivos: véase la página 120

1. E.
2. C.

Magnitudes físicas. Escalares y vectoriales. Fundamentales y derivadas
Reactivos: véase la página 124

1. C.
2. E.

Notación científica
Reactivos: véase la página 125

1. C.
2. D.

Conversión de unidades
Reactivos: véase la página 126

1. C.
2. A.
3. D.

Cinemática

Conceptos de desplazamiento
Reactivos: véase la página 128

1. E.
2. E.
3. D.
4. E.

Movimiento rectilíneo: uniforme y acelerado
Reactivos: véase la página 130

1. A.
2. A.
3. D.
4. E.

Movimiento bidimensional: circular y tiro parabólico
Reactivos: véase la página 133

1. B.
2. E.
3. A.
4. C.

Dinámica

Conceptos de inercia y fuerza. Leyes de Newton
Reactivos: véase la página 136

1. C.
2. C.
3. B.
4. B.
5. C.
6. A.
7. D.

Conceptos de energía cinética, energía potencial, trabajo y potencia
Reactivos: véase la página 139

1. D.
2. E.
3. D.
4. B.
5. E.

Estática

Diagrama de cuerpo libre
Reactivos: véase la página 142

1. A.
2. E.
3. E.
4. B.
5. C.
6. E.

Equilibrio, momento de una fuerza y centro de gravedad
Reactivos: véase la página 149

1. D.
2. A.
3. E.
4. A.
5. E.
6. E.

Hidrostática

Principio de Pascal
Reactivos: véase la página 152

1. A.

Densidad
Reactivos: véase la página 152

1. B.
2. E.

Electrostática

Carga eléctrica
Reactivos: véase la página 153

1. E.
2. C.
3. C.
4. A.
5. D.
6. B.

Leyes de Coulomb
Reactivos: véase la página 156

1. A.
2. A.
3. A.
4. C.
5. A.
6. A.

Química

Conceptos introductorios

La materia y los átomos
Reactivos: véase la página 159

1. D.
2. C.

Propiedades de la materia
Reactivos: véase la página 160

1. B.
2. E.

Estados de agregación
Reactivos: véase la página 162

1. D.
2. C.

Sustancias puras (elementos y compuestos)
Reactivos: véase la página 163

1. E.
2. C.

Mezclas homogéneas y heterogéneas
Reactivos: véase la página 164

1. C.
2. A.

Estructura del átomo

Partículas subatómicas y fundamentales (protones, neutrones y electrones)
Reactivos: véase la página 165

1. D.
2. B.
3. B.

Número atómico, número de masa e isótopos
Reactivos: véase la página 166

1. E.
2. C.
3. D.

Moléculas e iones
Reactivos: véase la página 167

1. B.
2. E.

Cantidad de sustancia (mol) y masa molar
Reactivos: véase la página 168

1. B.
2. D.

Tabla periódica

Símbolos y fórmulas químicas
Reactivos: véase la página 170

1. D.
2. A.

Grupos o familias, periodos y bloques
Reactivos: véase la página 172

1. A.
2. D.

Propiedades periódicas
Reactivos: véase la página 174

1. B.
2. C.

Enlace químico

Principios del enlace químico
Reactivos: véase la página 178

1. A.
2. E.

Enlace iónico o electrovalente
Reactivos: véase la página 179

1. E.
2. D.

Enlace covalente
Reactivos: véase la página 181

1. E.
2. E.
3. C.

Enlace metálico
Reactivos: véase la página 183

1. D.
2. D.
3. B.

Interacciones por puente de hidrógeno
Reactivos: véase la página 184

1. A.
2. A.

Nomenclatura

Iones mono y poliatómicos
Reactivos: véase la página 189

1. A.
2. A.

Óxidos metálicos y no metálicos
Reactivos: véase la página 191

1. D.
2. E.

Hidruros
Reactivos: véase la página 193

1. B.
2. B.

Hidrácidos
Reactivos: véase la página 195

1. D.

Oxiácidos
Reactivos: véase la página 197

1. B.
2. A.

Hidróxidos
Reactivos: véase la página 198

1. D.
2. D.

Sales
Reactivos: véase la página 202

1. C.

Hidrocarburos (alcanos, alquenos y alquinos)
Reactivos: véase la página 206

1. D.
2. D.

Reacciones químicas

Tipos de reacciones químicas (síntesis, decomposición y desplazamiento)
Reactivos: véase la página 207

1. C.
2. C.

Reacciones ácido–base
Reactivos: véase la página 209

1. A.
2. A.

Reacciones de combustión
Reactivos: véase la página 211

1. D.
2. A.

Reacciones óxido–redución
Reactivos: véase la página 213

1. E.
2. C.

Balanceo de ecuaciones por tanteo y por el método redox
Reactivos: véase la página 217

1. C.
2. C.

Cálculos estequiométricos
Reactivos: véase la página 220

1. D.
2. C.

Lingüística del texto

Comprensión textual

Análisis y síntesis de textos
Reactivos: véase la página 221

1. E.
2. E.
3. E.
4. B.
5. E.

Identificación de la información y argumentos de un texto
Reactivos: véase la página 225

1. C.
2. C.
3. B.
4. B.
5. E.

Ortografía

Grafemas y fonemas
Reactivos: véase la página 228

1. A.
2. B.
3. C.
4. A.
5. A.

La sílaba. Clasificación de las palabras
Reactivos: véase la página 229

1. E.
2. A.
3. A.
4. D.
5. B.

Diptongos e hiatos
Reactivos: véase la página 231

1. D.
2. A.
3. B.
4. B.
5. C.

Acentuación diacrítica
Reactivos: véase la página 234

1. B.
2. E.
3. A.
4. C.
5. D.

Semántica del texto

Análisis del discurso
Reactivos: véase la página 236

1. C.
2. D.
3. A.

Coherencia y cohesión
Reactivos: véase la página 237

1. C.
2. D.
3. C.

Sintaxis del texto

Oración y frase
Reactivos: véase la página 240

1. B.
2. D.
3. A.
4. A.
5. B.

Sujeto y predicado
Reactivos: véase la página 243

1. E.
2. A.
3. D.
4. E.
5. E.

Puntuación

Los signos de puntuación
Reactivos: véase la página 246

1. B.
2. E.
3. C.
4. C.
5. A.
6. C.
7. C.
8. E.
9. B.

Manejo de vocabulario

Morfología flexiva y derivativa
Reactivos: véase la página 250

1. C.
2. E.
3. A.

Sinónimos y antónimos
Reactivos: véase la página 252

1. C.
2. D.

Razonamiento matemático

Sucesiones numéricas
Reactivos: véase la página 256

1. C.
2. A.
3. A.
4. C.

Razonamiento aritmético
Reactivos: véase la página 257

1. B.
2. E.
3. B.
4. B.
5. B.
6. B.
7. E.
8. B.
9. B.
10. B.

Razonamiento algebraico
Reactivos: véase la página 260

1. B.
2. E.
3. D.
4. E.
5. A.
6. B.
7. A.
8. C.
9. D.
10. D.
11. E.
12. A.
13. A.
14. A.
15. A.

Razonamiento geométrico
Reactivos: véase la página 263

1. A.
2. A.
3. E.
4. A.
5. D.
6. C.
7. C.
8. C.
9. C.
10. C.
11. C.
12. C.
13. C.
14. C.
15. C.

Sección III

Desarrollos de los reactivos

7. Desarrollos

1. Matemática

1.1 Aritmética

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

Reactivos: véase la página 4

1. Sean los números $n = 12$, $m = 90$. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de ambos. Elige la opción correspondiente ______.

▼ La respuesta es D.

Calculamos la factorización en números primos de $n = 12$ y de $m = 90$.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

De lo anterior se tiene que $n = 12 = 2^2 \cdot 3$; $m = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Entonces:

Para el máximo común divisor consideramos los primos comunes con mínima potencia y efectuamos el producto:

$$\text{mcd}(12, 90) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Para el mínimo común múltiplo consideramos todos los primos con su máxima potencia y obtenemos el producto:

$$\text{mcm}(12, 90) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180.$$

□

2. Sean los números $n = 10$, $m = 21$. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de ambos. Elige la opción correspondiente ______.

▼ La respuesta es C.

Calculamos la factorización en números primos de $n = 10$ y de $m = 21$.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

De lo anterior se tiene que $n = 10 = 2 \cdot 5$; $m = 21 = 3 \cdot 7$. Entonces:

Para el máximo común divisor consideramos los primos comunes con mínima potencia:

$$\text{mcd}(10, 21) = 1, \text{ ya que no tienen primos comunes.}$$

Para el mínimo común múltiplo consideramos todos los primos con su máxima potencia y obtenemos el producto:

$$\text{mcm}(10, 21) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$$

□

3. Sean los números $n = 30$, $m = 140$ & $r = 75$. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los tres. Indica la opción ________.

▼ La respuesta es D.

Calculamos la factorización en números primos de $n = 30$, $m = 140$, $r = 75$.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

De lo anterior se tiene que $n = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $m = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, $r = 3 \cdot 5^2$. Entonces:

Para el máximo común divisor consideramos los primos comunes con mínima potencia:

$$\text{mcd}(30, 140, 75) = 5.$$

Para el mínimo común múltiplo consideramos todos los primos con su máxima potencia y obtenemos el producto:

$$\text{mcm}(30, 140, 75) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2\,100.$$

□

4. Sean los números $n = 15$, $m = 14$ & $r = 22$. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los tres. Escribe cuál es la opción correcta ________.

▼ La respuesta es A.

Calculamos la factorización en números primos de $n = 15$, $m = 14$, $r = 22$.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

De lo anterior se tiene que $n = 3 \cdot 5$, $m = 2 \cdot 7$, $r = 2 \cdot 11$. Entonces:

Para el máximo común divisor consideramos los primos comunes con mínima potencia:

$$\text{mcd}(15, 14, 22) = 1. \text{ Ya que no hay primos comunes.}$$

Para el mínimo común múltiplo consideramos todos los primos con su máxima potencia:

$$\text{mcm}(15, 14, 22) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2\,310.$$

□

Operaciones con fracciones numéricas

Reactivos véase la página 7

1. Elegir una opción al calcular:
$$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\rule{2cm}{0.4pt}.$$

▼ La respuesta es C.

Fracciones con el mismo denominador:
$$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4.$$
□

2. Elegir una opción al calcular:
$$\frac{5}{2}-\frac{2}{3}=\rule{2cm}{0.4pt}.$$

▼ La respuesta es E.

Se usa el producto de los denominadores:
$$\frac{5}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{5\cdot 3-2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{15-4}{6}=\frac{11}{6}.$$
□

3. Elegir una opción al calcular:
$$\frac{5}{4}-\frac{1}{12}=\rule{2cm}{0.4pt}.$$

▼ La respuesta es C.

Se usa el mínimo común múltiplo de los denominadores. Éste es $\operatorname{mcm}(4,12)=12$:
$$\frac{5}{4}-\frac{1}{12}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{3}-\frac{1}{12}=\frac{5\cdot 3-1\cdot 1}{12}=\frac{15-1}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}.$$
□

4. Elegir una opción al calcular:
$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\rule{2cm}{0.4pt}.$$

▼ La respuesta es E.
$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}.$$
□

5. Calcular:
$$3\cdot\frac{7}{5}=\rule{2cm}{0.4pt}.$$

(Elige la opción correspondiente).

▼ La respuesta es C.
$$3\cdot\frac{7}{5}=\frac{3}{1}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{1\cdot 5}=\frac{21}{5}.$$
□

6. Calcular:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(Elige la opción correspondiente).

▼ La respuesta es E.

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{16}{15}.$$

□

7. Calcular:

$$\frac{\frac{2}{5}}{3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(Elige la opción correspondiente).

▼ La respuesta es A.

$$\frac{\frac{2}{5}}{3} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{1}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}.$$

□

8. Calcular:

$$\frac{7}{\frac{9}{5}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

¿Qué opción es la correcta?

▼ La respuesta es B.

$$\frac{7}{\frac{9}{5}} = \frac{\frac{7}{1}}{\frac{9}{5}} = \frac{7}{1} \cdot \frac{5}{9} = \frac{7 \cdot 5}{1 \cdot 9} = \frac{35}{9}.$$

□

9. Elige qué opción es la respuesta al calcular:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{5}}{\frac{1}{7} + \frac{3}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

▼ La respuesta es C.

Numerador:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{15} = \frac{10 + 9}{15} = \frac{19}{15}.$$

Denominador

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{2} = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{7} = \frac{2 + 7 \cdot 3}{14} = \frac{23}{14}.$$

Entonces sustituimos lo anterior:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{5}}{\frac{1}{7} + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{19}{15}}{\frac{23}{14}} = \frac{19}{15} \cdot \frac{14}{23} = \frac{266}{345}.$$

□

10. Indica cuál opción corresponde al calcular:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

▼ La respuesta es E.

Numerador:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{2\cdot 4+1\cdot 6-1\cdot 3}{12}=\frac{8+6-3}{12}=\frac{11}{12}.$$

Denominador:

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{15}=\frac{3\cdot 6-1\cdot 10+1\cdot 15}{30}=\frac{18-10+15}{30}=\frac{23}{30}.$$

Y ahora usamos lo anterior:

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{23}{30}}=\frac{11}{12}\cdot\frac{30}{23}=\frac{330}{276}=\frac{55}{46}.$$

□

1.2 Álgebra

Valor numérico de expresiones algebraicas

Reactivos: véase la página 10

1. Al evaluar la expresión:

$$\frac{a^2b-ab^2}{a-b},$$

con $a=5$ y con $b=3$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es D.

$$\frac{a^2b-ab^2}{a-b}=\frac{5^2\cdot 3-5\cdot 3^2}{5-3}=\frac{25\cdot 3-5\cdot 9}{2}=\frac{75-45}{2}=\frac{30}{2}=15.$$

□

2. Al evaluar la expresión:

$$\frac{a^{-2}b+ab^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}},$$

con $a=5$ y con $b=3$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es C.

$$\frac{a^{-2}b+ab^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}=\frac{(5^{-2})(3)+(5)(3^{-2})}{(5^{-1})-(3^{-1})}=\frac{\frac{1}{5^2}\cdot 3+5\cdot\frac{1}{3^2}}{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{25}+\frac{5}{9}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}. \qquad (*)$$

Se realiza la operación del numerador:

$$\frac{3}{25}+\frac{5}{9}=\frac{3}{25}\cdot\frac{9}{9}+\frac{5}{9}\cdot\frac{25}{25}=\frac{3\cdot 9+5\cdot 25}{225}=\frac{27+125}{225}=\frac{152}{225}.$$

Ahora en el denominador:

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{5}=\frac{3-5}{15}=\frac{-2}{15}.$$

Utilizamos estos resultados en (*):

$$\frac{\frac{3}{25}+\frac{5}{9}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{152}{225}}{\frac{-2}{15}}=\frac{152}{225}\cdot\frac{15}{-2}=-\frac{76}{15}.$$

□

3. Al evaluar la expresión:

$$\frac{a+b^2}{a^2-b},$$

con $a=\dfrac{1}{5}$ y con $b=\dfrac{1}{3}$, hallamos: ________.

▼ La respuesta es A.

$$\frac{a+b^2}{a^2-b}=\frac{\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{25}-\frac{1}{3}}. \tag{**}$$

Se realiza la operación del numerador:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{5}=\frac{9+5}{45}=\frac{14}{45}.$$

Ahora en el denominador:

$$\frac{1}{25}\cdot\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{25}{25}=\frac{3-25}{75}=\frac{-22}{75}.$$

Aplicando estos resultados en (**):

$$\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{25}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{14}{45}}{-\frac{22}{75}}=\frac{14}{45}\left(-\frac{75}{22}\right)=-\frac{105}{99}.$$

□

4. Al evaluar la expresión:

$$\frac{a^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-1}},$$

con $a=\dfrac{1}{5}$ y con $b=\dfrac{1}{3}$, hallamos: ________.

▼ La respuesta es C.

$$\frac{a^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-1}}=\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}=\frac{5+3^2}{5^2-3}=\frac{5+9}{25-3}=\frac{14}{22}=\frac{7}{11}.$$

□

Reducción de términos semejantes

Reactivos: véase la página 11

1. Al reducir la expresión:

$$5x^2+2x+3-3x^2+7x-9,$$

se obtiene: ________.

▼ La respuesta es A.

- Los términos $5x^2$ & $-3x^2$ son semejantes.
- Son semejantes $2x$ & $7x$.
- Los términos 3 & -9 son semejantes.

Agrupamos y operamos estos términos.

$$5x^2+2x+3-3x^2+7x-9=(5x^2-3x^2)+(2x+7x)+(3-9)=(5-3)x^2+(2+7)x-6=2x^2+9x-6.$$

□

2. Reducir la expresión:
$$3x^2y + 9xy^2 - 2x^2y - 11xy^2.$$
Elige la opción que corresponda ______.

▼ La respuesta es A.

- $3x^2y$ & $-2x^2y$ son semejantes.
- Son semejantes $9xy^2$ & $-11xy^2$.

Agrupamos y operamos estos términos.
$$3x^2y+9xy^2-2x^2y-11xy^2 = (3x^2y-2x^2y)+(9xy^2-11xy^2) = (3-2)x^2y+(9-11)xy^2 = x^2y-2xy^2.$$
□

3. Sumar los polinomios:
$$3x^3 + 2x - 7 \quad \& \quad -x^3 + 3x^2 + 3.$$
Elige la opción correspondiente ______.

▼ La respuesta es D.

Agrupamos y operamos los términos semejantes de ambos polinomios: $3x^3$ & $-x^3$. De igual manera las constantes -7 y 3.
$$(3x^3 + 2x - 7) + (-x^3 + 3x^2 + 3) = (3x^3 - x^3) + 3x^2 + 2x + (-7 + 3) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4.$$
□

4. Reducir la expresión:
$$2m^3n - mn^2 + 7m^2n - 5m^3n + 3mn^2 - 7mn.$$
Escribir la opción correspondiente ______.

▼ La respuesta es A.

Primero analizamos la expresión para poder agrupar los términos semejantes y operar con ellos:
$$\begin{aligned}2m^3n - mn^2 + 7m^2n - 5m^3n + 3mn^2 - 7mn &= (2m^3n - 5m^3n) + (-mn^2 + 3mn^2) + 7m^2n - 7mn =\\ &= -3m^3n + 2mn^2 + 7m^2n - 7mn.\end{aligned}$$
□

Símbolos de agrupación

Reactivos: véase la página 13

1. Reducir la expresión:
$$-[(5 + 3) - 9] + [-(7 - 9) + 3].$$
Elegir la opción correspondiente ______.

▼ La respuesta es C.
$$-[(5 + 3) - 9] + [-(7 - 9) + 3],$$
primero operamos los símbolos internos de agrupación $(5 + 3) = 8$ y $(7 - 9) = -2$,
$$-[8 - 9] + [-(-2) + 3].$$
Como $-(-2) = 2$:
$$-[-1] + [2 + 3] = 1 + 5 = 6.$$
□

2. Reducir la expresión:

$$-\{-[(5-7)+3]+[-(9-5)-8]\}\,.$$

Elegir la opción ________.

▼ La respuesta es A.

$$-\{-[(5-7)+3]+[-(9-5)-8]\}\,;$$

operamos primero los símbolos de agrupación internos $(5-7)=(-2)=-2$ y $-(9-5)=-(4)=-4$:

$$-\{-[-2+3]+[-4-8]\}\,;$$

operamos ahora los símbolos restantes, $-[-2+3]=-[1]=-1$ y $[-4-8]=[-12]=-12$:

$$-\{-1-12\}\,;$$

finalmente se opera el último símbolo de agrupación:

$$-\{-13\}=13.$$

□

Leyes de los exponentes y radicales

Reactivos: véase la página 14

1. Al simplificar $(a^2b^3)^5$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es E.

$$(a^2b^3)^5=(a^2)^5(b^3)^5=a^{2\cdot 5}b^{3\cdot 5}=a^{10}b^{15}.$$

□

2. Al simplificar $\dfrac{a^5}{a^3}$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es E.

$$\frac{a^5}{a^3}=a^5\cdot a^{-3}=a^{5-3}=a^2.$$

□

3. Al simplificar $(ab)^7(ab^2)^{-1}$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es E.

$$(ab)^7(ab^2)^{-1}=a^7b^7\cdot a^{-1}(b^2)^{-1}=a^7b^7\cdot a^{-1}b^{-2}=a^{7-1}\cdot b^{7-2}=a^6b^5.$$

□

4. Al simplificar $\sqrt[3]{a^{-7}b^5}$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es A.

$$\sqrt[3]{a^{-7}b^5}=\left(a^{-7}b^5\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{-7}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(b^5\right)^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{7}{3}}\cdot b^{\frac{5}{3}}=\frac{b^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{7}{3}}}.$$

□

5. Simplificar $\dfrac{(a^3b^2)^5}{(a^2b^3)^4}$ y elegir la opción correspondiente ________.

▼ La respuesta es C.

$$\frac{(a^3b^2)^5}{(a^2b^3)^4} = \frac{(a^3)^5(b^2)^5}{(a^2)^4(b^3)^4} = \frac{a^{15}b^{10}}{a^8b^{12}} = \frac{a^{15-8}}{b^{12-10}} = \frac{a^7}{b^2}.$$

□

6. Simplificar $\left(\dfrac{a^2b^3}{a^4b^2}\right)^4$ y escribir qué opción corresponde ________.

▼ La respuesta es C.

$$\left(\frac{a^2b^3}{a^4b^2}\right)^4 = \left(\frac{b^{3-2}}{a^{4-2}}\right)^4 = \left(\frac{b}{a^2}\right)^4 = \frac{(b)^4}{(a^2)^4} = \frac{b^4}{a^8}.$$

□

7. Simplificar $\dfrac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt[3]{a^2b^5}}$ y escribir la opción correspondiente ________.

▼ La respuesta es E.

$$\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt[3]{a^2b^5}} = \frac{(a^3b)^{\frac{1}{2}}}{(a^2b^5)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(a^3)^{\frac{1}{2}}(b)^{\frac{1}{2}}}{(a^2)^{\frac{1}{3}}(b^5)^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{5}{3}}} = \frac{a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}}{b^{\frac{5}{3}-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{5}{6}}}{b^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[6]{\frac{a^5}{b^7}}.$$

□

8. Simplificar $\dfrac{c^{\frac{1}{3}}}{(c+c^2)^{-1}}$; indicar la opción ________.

▼ La respuesta es E.

$$\frac{c^{\frac{1}{3}}}{(c+c^2)^{-1}} = c^{\frac{1}{3}}(c+c^2) = c^{\frac{1}{3}}\cdot c + c^{\frac{1}{3}}\cdot c^2) = c^{\frac{1}{3}+1} + c^{\frac{1}{3}+2} = c^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{7}{3}}.$$

□

9. Simplificar $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}(b+b^2)}{b^{\frac{1}{3}}}$; escribir qué opción es correcta ________.

▼ La respuesta es D.

$$\frac{b^{\frac{1}{2}}(b+b^2)}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}\cdot b + b^{\frac{1}{2}}\cdot b^2}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{b^{\frac{1}{2}+1} + b^{\frac{1}{2}+2}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{5}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= (b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{5}{2}})b^{-\frac{1}{3}} = b^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{3}} + b^{\frac{5}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{3}} = b^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} + b^{\frac{5}{2}-\frac{1}{3}} = b^{\frac{7}{6}} + b^{\frac{13}{6}}.$$

□

10. Simplificar $\dfrac{x^{\frac{1}{n}}(x^n + x^{-\frac{1}{n}})}{x^n(x^{\frac{1}{n}} + x^{-n})}$ e indicar qué opción es correcta ________.

▼ La respuesta es C.

$$\frac{x^{\frac{1}{n}}(x^n + x^{-\frac{1}{n}})}{x^n(x^{\frac{1}{n}} + x^{-n})} = \frac{x^{\frac{1}{n}}\cdot x^n + x^{\frac{1}{n}}\cdot x^{-\frac{1}{n}}}{x^n\cdot x^{\frac{1}{n}} + x^n\cdot x^{-n}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{n}+n} + x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}}{x^{n+\frac{1}{n}} + x^{n-n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}+n} + x^0}{x^{n+\frac{1}{n}} + x^0} = \frac{x^{\frac{1}{n}+n} + 1}{x^{n+\frac{1}{n}} + 1} = 1.$$

□

Operaciones con polinomios

Reactivos: véase la página 18

1. Al sumar el polinomio $(6x^2y^3 - 5x^3y^2 - 4x + 3y)$ y el polinomio $(3x^3y^2 + y - x - 2x^2y^3)$, se obtiene: ________ .

▼ La respuesta es B.

- Una manera es la siguiente:

$$\begin{aligned}
&(6x^2y^3 - 5x^3y^2 - 4x + 3y) + (3x^3y^2 + y - x - 2x^2y^3) = \\
&= 6x^2y^3 - 5x^3y^2 - 4x + 3y + 3x^3y^2 + y - x - 2x^2y^3 = \\
&= (6-2)x^2y^3 + (-5+3)x^3y^2 + (-4-1)x + (3+1)y = \\
&= 4x^2y^3 - 2x^3y^2 - 5x + 4y.
\end{aligned}$$

- Otra manera es:

$$\begin{array}{rl}
6x^2y^3 - 5x^3y^2 - 4x + \ 3y & \\
-\,2x^2y^3 + 3x^3y^2 - \ \ x + \ \ y & + \\
\hline
4x^2y^3 - 2x^3y^2 - 5x + 4y. &
\end{array}$$

□

2. Al restar el polinomio $(5x^2y + 6xy^2 - 4xy - 2)$ del polinomio $(2xy^2 - 4xy - 6x^2y + 8)$, se obtiene: ________ .

▼ La respuesta es C.

- Una manera de obtener la diferencia es:

$$\begin{aligned}
&(2xy^2 - 4xy - 6x^2y + 8) - (5x^2y + 6xy^2 - 4xy - 2) = \\
&= 2xy^2 - 4xy - 6x^2y + 8 - 5x^2y - 6xy^2 + 4xy + 2 = \\
&= (2-6)xy^2 + (-4+4)xy + (-6-5)x^2y + (8+2) = \\
&= -4xy^2 + 0xy - 11x^2y + 10 = \\
&= 10 - 4xy^2 - 11x^2y.
\end{aligned}$$

- Otra manera de efectuar la resta es:

$$\begin{array}{rl}
2xy^2 - 4xy - \ 6x^2y + \ \ 8 & \\
-\,6xy^2 + 4xy - \ 5x^2y + \ \ 2 & + \\
\hline
-\,4xy^2 + 0xy - 11x^2y + 10. &
\end{array}$$

□

3. Al restar del polinomio $(3x^2 + 4xy - 5y^2)$ la suma de los polinomios $(5xy - x^2 - 2y^2)$ y $(3y^2 - 2xy + 8x^2)$, se obtiene: ________ .

▼ La respuesta es E.

- Una manera es la siguiente (utilizando signos de agrupación):

$$\begin{aligned}
&(3x^2 + 4xy - 5y^2) - [(5xy - x^2 - 2y^2) + (3y^2 - 2xy + 8x^2)] = \\
&= (3x^2 + 4xy - 5y^2) - (5xy - x^2 - 2y^2) - (3y^2 - 2xy + 8x^2) = \\
&= 3x^2 + 4xy - 5y^2 - 5xy + x^2 + 2y^2 - 3y^2 + 2xy - 8x^2 = \\
&= (3+1-8)x^2 + (4-5+2)xy + (-5+2-3)y^2 = \\
&= -4x^2 + 1xy - 6y^2 = -4x^2 + xy - 6y^2.
\end{aligned}$$

- Otra manera es acomodando en columnas

$$\begin{array}{rrrl}
3x^2 & +4xy & -\ 5y^2 & \\
x^2 & -5xy & +\ 2y^2 & + \\
-\,8x^2 & +2xy & -\ 3y^2 & \\
\hline
-\,4x^2 & +\ \ xy & -6y^2. &
\end{array}$$

□

4. ¿Cuál es el resultado de realizar la operación siguiente?:

$$\left(-\frac{3}{2}x^2y^3\right)\left(-2x^3y^2+\frac{4}{3}x^2y-6x\right)=\underline{\hspace{2cm}}.$$

▼ La respuesta es A.

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{3}{2}x^2y^3\right)\left(-2x^3y^2+\frac{4}{3}x^2y-6x\right)=\\
&=\left(-\frac{3}{2}x^2y^3\right)(-2x^3y^2)+\left(-\frac{3}{2}x^2y^3\right)\left(\frac{4}{3}x^2y\right)+\left(-\frac{3}{2}x^2y^3\right)(-6x)=\\
&=\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)\,x^2x^3y^3y^2+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)x^2x^2y^3y+\left(-\frac{3}{2}\right)(-6)\,x^2xy^3=\\
&=\frac{6}{2}x^{2+3}y^{3+2}-\frac{12}{6}x^{2+2}y^{3+1}+\frac{18}{2}x^{2+1}y^3=3x^5y^5-2x^4y^4+9x^3y^3.
\end{aligned}$$

□

5. Indica el resultado de efectuar la operación siguiente:

$$(3a^2-4ab+2b^2)(a^2-5ab-3b^2)=\underline{\hspace{2cm}}.$$

▼ La respuesta es C.

$$\begin{aligned}
&(3a^2-4ab+2b^2)(a^2-5ab-3b^2)=\\
&=3a^2(a^2-5ab-3b^2)-4ab(a^2-5ab-3b^2)+2b^2(a^2-5ab-3b^2)=\\
&=3a^4-15a^3b-9a^2b^2-4a^3b+20a^2b^2+12ab^3+2a^2b^2-10ab^3-6b^4=\\
&=3a^4+(-15-4)a^3b+(-9+20+2)a^2b^2+(12-10)ab^3-6b^4=\\
&=3a^4+(-19)a^3b+(13)a^2b^2+(2)ab^3-6b^4=\\
&=3a^4-19a^3b+13a^2b^2+2ab^3-6b^4.
\end{aligned}$$

□

6. Indica el resultado de efectuar la operación siguiente:

$$\left(x^{n-1}-x^n\right)\left(x^{n+1}-x^{n+2}\right)=\underline{\hspace{2cm}}.$$

▼ La respuesta es A.

$$
\begin{aligned}
&\left(x^{n-1}-x^{n}\right)\left(x^{n+1}-x^{n+2}\right)=\\
&=x^{n-1}\left(x^{n+1}-x^{n+2}\right)-x^{n}\left(x^{n+1}-x^{n+2}\right)=\\
&=x^{n-1}x^{n+1}-x^{n-1}x^{n+2}-x^{n}x^{n+1}+x^{n}x^{n+2}=\\
&=x^{n-1+n+1}-x^{n-1+n+2}-x^{n+n+1}+x^{n+n+2}=\\
&=x^{2n}-x^{2n+1}-x^{2n+1}+x^{2n+2}=\\
&=x^{2n}-2x^{2n+1}+x^{2n+2}.
\end{aligned}
$$

□

7. Al dividir el polinomio $(3x^4 + 5x^3 - 13x^2 + x - 3)$ entre el polinomio $(x^2 + 2x - 3)$, se obtiene el cociente: ________.

▼ La respuesta es C.

La división se efectúa de la manera siguiente

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 - x - 2 \\
\cline{2-2}
x^2 + 2x - 3 & 3x^4 + 5x^3 - 13x^2 + x - 3 \\
 & -3x^4 - 6x^3 + 9x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad - x^3 - 4x^2 + x - 3 \\
 & \quad + x^3 + 2x^2 - 3x \\
\cline{2-2}
 & \qquad - 2x^2 - 2x - 3 \\
 & \qquad + 2x^2 + 4x - 6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2x - 9.
\end{array}
$$

Por lo tanto, el cociente es:

$$3x^2 - x - 2.$$

□

8. Al efectuar la división $\dfrac{8x^3 + 27}{2x + 3}$, se obtiene el cociente: ________.

▼ La respuesta es E.

Aquí se divide al polinomio $(8x^3 + 27)$ entre el polinomio $(2x + 3)$ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 6x + 9 \\
\cline{2-2}
2x + 3 & 8x^3 + 27 \\
 & -8x^3 - 12x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad -12x^2 + 27 \\
 & \quad +12x^2 + 18x \\
\cline{2-2}
 & \qquad +18x + 27 \\
 & \qquad -18x - 27 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Por lo tanto, el cociente es:

$$4x^2 - 6x + 9.$$

□

Productos notables

Reactivos: véase la página 21

1. El resultado de la multiplicación de los binomios $(a^2-4)(a^2-9)$ es: ________.

▼ La respuesta es E.

Aquí se tienen binomios con un término común, que es a^2. Por un producto notable obtenemos:

$$(a^2-4)(a^2-9) = \left(a^2\right)^2 + (-4-9)a^2 + (-4)(-9) = a^4 + (-13)a^2 + 36 = a^4 - 13a^2 + 36.$$

□

2. Al desarrollar $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}\right)^2$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es B.

Aquí se tiene el cuadrado de un binomio.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{2}{3}x^2\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}x^2\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{2^2}{3^2}\left(x^2\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^2 + \frac{3^2}{2^2} = \frac{4}{9}x^4 - 2x^2 + \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

□

3. Al multiplicar el binomio $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}\right)$ por su conjugado, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es C.

El conjugado del binomio $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}\right)$ es $\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}\right)$; por lo que su producto es:

$$\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}x^2\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2}(x^2)^2 - \frac{2^2}{3^2} = \frac{9}{4}x^4 - \frac{4}{9}.$$

□

4. Al desarrollar $\left(x^3 - \frac{2}{3}\right)^3$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es E.

Aquí se tiene el cubo de un binomio. Aplicando un producto notable:

$$\begin{aligned}\left(x^3 - \frac{2}{3}\right)^3 &= \left(x^3\right)^3 - 3\left(x^3\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) + 3(x^3)\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \\ &= x^9 - 3\left(\frac{2}{3}\right)x^6 + 3\left(\frac{4}{9}\right)x^3 - \frac{8}{27} = x^9 - 2x^6 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{27}.\end{aligned}$$

□

5. El resultado de la multiplicación de los binomios $(u^4-5)(3+u^4)$ es: ________.

▼ La respuesta es D.

Aquí se tiene un par de binomios con un término común, que es u^4. Aplicando un producto notable:

$$\begin{aligned}(u^4-5)(3+u^4) &= (u^4-5)(u^4+3) = \left(u^4\right)^2 + (-5+3)u^4 + (-5)(3) = \\ &= u^8 + (-2)u^4 + (-15) = u^8 - 2u^4 - 15.\end{aligned}$$

□

6. El resultado de la multiplicación $(a+b+c)(a+b-c)$ es: ______ .

▼ La respuesta es E.

Reescribiendo los polinomios dados:

$$a+b+c=(a+b)+c \qquad \& \qquad a+b-c=(a+b)-c.$$

Se puede decir que se tiene el producto de una suma por una diferencia (producto de binomios conjugados), por lo cual:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+b-c) &= [(a+b)+c][(a+b)-c] = (a+b)^2-c^2 = \\ &= (a^2+2ab+b^2)-c^2 = a^2+b^2-c^2+2ab.\end{aligned}$$

□

Factorización

Reactivos: véase la página 25

1. Al factorizar la expresión algebraica $-18a^5b^3-24a^4b^4+6a^3b^2$, uno de sus factores es: ______ .

▼ La respuesta es D.

Podemos considerar como factor común a $(6a^3b^2)$ así como también a $(-6a^3b^2)$.

Tomando $(-6a^3b^2)$:

$$\begin{aligned}-18a^5b^3-24a^4b^4+6a^3b^2 &= (-6a^3b^2)\left(\frac{-18a^5b^3}{-6a^3b^2}-\frac{24a^4b^4}{-6a^3b^2}+\frac{6a^3b^2}{-6a^3b^2}\right) = \\ &= (-6a^3b^2)(3a^2b+4ab^2-1).\end{aligned}$$

Por lo tanto, uno de los factores es:

$$(-6a^3b^2) \quad \text{y el otro es:} \quad (3a^2b+4ab^2-1).$$

□

2. Al factorizar la expresión algebraica $ax-6+3x-2a$, uno de sus factores es: ______ .

▼ La respuesta es D.

$$\begin{aligned}ax-6+3x-2a &= && \text{(reordenamos términos)}\\ &= ax+3x-2a-6 = && [\text{agrupamos, notar que } -2a-6=-(2a+6)]\\ &= (ax+3x)-(2a+6) = && (\text{factorizamos los factores comunes } x \text{ y } 2)\\ &= x(a+3)-2(a+3) = && [\text{factorizamos } (a+3)]\\ &= (a+3)(x-2).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a+3)$ es un factor y el otro es $(x-2)$.

□

3. Al factorizar la expresión algebraica $x^2-9x+18$, se obtiene que uno de sus factores es: ______ .

▼ La respuesta es A.

Buscamos dos números m & n tales que

$$x^2-9x+18=(x+m)(x+n).$$

Estos números deben cumplir con las igualdades:

$$mn=18 \qquad \& \qquad m+n=-9.$$

Tales números son: $m = -6$ & $n = -3$, ya que:

$$mn = (-6)(-3) = 18 \qquad \& \qquad m + n = (-6) + (-3) = -6 - 3 = -9.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x^2 - 9x + 18 &= [x + (-6)][x + (-3)] = \\ &= (x - 6)(x - 3). \end{aligned}$$

Por lo tanto, uno de los factores es $(x - 6)$ y el otro es $(x - 3)$.

□

4. Al factorizar la expresión algebraica $x^2 - 8$, se obtiene que uno de sus factores es: ________ .

▼ La respuesta es E.

Este binomio puede ser expresado como una diferencia de cuadrados, ya que:

$$x^2 - 8 = x^2 - (\sqrt{8})^2.$$

Por lo tanto, se puede expresar como el producto de binomios conjugados

$$x^2 - 8 = x^2 - (\sqrt{8})^2 = (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}).$$

Luego, uno de los factores es $(x - \sqrt{8})$ y el otro es $(x + \sqrt{8}) = x + 2\sqrt{2}$.

□

5. Al factorizar la expresión algebraica $x^2 + x - 12$, uno de sus factores es: ________ .

▼ La respuesta es B.

Buscamos un par de números m & n tales que

$$x^2 + x - 12 = (x + m)(x + n).$$

Estos números deben cumplir que:

$$mn = -12 \qquad \& \qquad m + n = 1.$$

Dichos números son $m = 4$ & $n = -3$, ya que:

$$mn = (4)(-3) = -12 \qquad \& \qquad m + n = 4 + (-3) = 4 - 3 = 1.$$

Entonces

$$x^2 + x - 12 = [x + 4][x + (-3)] = (x + 4)(x - 3).$$

Por lo tanto, uno de los factores es $(x + 4)$ y el otro es $(x - 3)$.

□

6. Al factorizar el polinomio $6x^2 - 5x - 6$, uno de sus factores es: ________ .

▼ La respuesta es B.

Aplicamos el procedimiento para casos particulares.

$$
\begin{aligned}
&6x^2 - 5x - 6 = && \text{(multiplicamos y dividimos por 6)}\\
&= \frac{6^2x^2 - 6(5x) - 6^2}{6} = && \text{(cambiamos de orden los factores 6 y 5 del término intermedio)}\\
&= \frac{(6x)^2 - 5(6x) - 36}{6} = && \text{(realizamos el cambio: } 6x = u)\\
&= \frac{u^2 - 5u - 36}{6} = && [\text{factorizamos } u^2 - 5u - 36 = (u+m)(u+n)]\\
&= \frac{(u+m)(u+n)}{6} = && (m = -9, n = 4 \text{ cumplen con } mn = -36, m + n = -5)\\
&= \frac{(u-9)(u+4)}{6} = && (\text{retornamos a } u = 6x)\\
&= \frac{(6x-9)(6x+4)}{6} = && [\text{donde } 6x - 9 = 3(2x-3) \text{ y donde } 6x + 4 = 2(3x+2)]\\
&= \frac{3(2x-3)2(3x+2)}{6} = && \\
&= \frac{6(2x-3)(3x+2)}{6} = && \text{(al simplificar queda}\\
&= (2x-3)(3x+2). &&
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, uno de los factores es $3x + 2$. □

7. Al factorizar el binomio $x^3 - 125$, uno de sus factores es: ________.

▼ La respuesta es D.

Este binomio puede ser expresado como una diferencia de cubos, ya que

$$x^3 - 125 = x^3 - 5^3.$$

Aplicando la factorización correspondiente se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x^3 - 125 = x^3 - 5^3 &= \\
&= (x-5)(x^2 + 5x + 5^2) = \\
&= (x-5)(x^2 + 5x + 25).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, uno de los factores es $(x - 5)$ y el otro factor es $(x^2 + 5x + 25)$. □

8. Al factorizar el polinomio $x^3 - x^2 + 4x - 4$, uno de sus factores es: ________.

▼ La respuesta es E.

Aquí aplicamos factorización por agrupación,

$$
\begin{aligned}
x^3 - x^2 + 4x - 4 = & && \text{(agrupamos términos)}\\
&= (x^3 - x^2) + (4x - 4) = && \text{(factorizamos factores comunes)}\\
&= x^2(x-1) + 4(x-1) = && [\text{factorizamos } (x-1)]\\
&= (x-1)(x^2+4). &&
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, uno de los factores es $(x - 1)$ y el otro es $(x^2 + 4)$. □

9. Al factorizar el trinomio $4x^2 - 19x + 12$, uno de sus factores es: ________.

▼ La respuesta es B.

Aplicamos factorización para casos particulares

$$
\begin{aligned}
&4x^2 - 19x + 12 = && \text{(multiplicamos y dividimos por 4)}\\
&= \frac{4^2x^2 - 4(19) + 4(12)}{4} = && \text{(cambiamos el orden de los factores 4 y 19)}\\
&= \frac{(4x)^2 - 19(4x) + 48}{4} = && \text{(aplicamos el cambio } 4x = u\text{)}\\
&= \frac{u^2 - 19 + 48}{4} = && [\text{factorizamos } u^2 - 19 + 48 = (u+m)(u+n)]\\
&= \frac{(u+m)(u+n)}{4} = && (m = -16, n = -3 \text{ cumplen con } mn = 48, m+n = -19)\\
&= \frac{(u-16)(u-3)}{4} = && \text{(recobramos } u = 4x\text{)}\\
&= \frac{(4x-16)(4x-3)}{4} = && [\text{factorizamos } 4x - 16 = 4(x-4) \text{ y simplificamos}]\\
&= \frac{4(x-4)(4x-3)}{4} = &&\\
&= (x-4)(4x-3). &&
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, uno de los factores es $x - 4$ y el otro es $4x - 3$.

□

10. Al factorizar el binomio $1 + a^3$, uno de sus factores es: ________.

▼ La respuesta es C.

Aplicamos la factorización de una suma de cubos, ya que $1 + a^3 = 1^3 + a^3$. A saber,

$$
\begin{aligned}
1 + a^3 &= 1^3 + a^3 =\\
&= (1+a)(1^2 - 1 \cdot a + a^2) =\\
&= (1+a)(1 - a + a^2).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, uno de los factores es $(1 + a)$ y el otro factor es $(1 - a + a^2)$ o bien $(a^2 - a + 1)$.

□

11. Al factorizar el polinomio $x^2 + 4x - 1$, uno de sus factores es: ________.

▼ La respuesta es A.

Aquí aplicamos el método general, esto es, completamos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 4x - 1 = && \left[\text{sumamos y restamos } \left(\tfrac{4}{2}\right)^2\right]\\
&= x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 1 = && \text{(agrupamos términos)}\\
&= (x^2 + 4x + 2^2) - 2^2 - 1 = && \text{(aplicamos un producto notable)}\\
&= (x+2)^2 - 5 = && \text{(vemos una diferencia de cuadrados)}\\
&= (x+2)^2 - (\sqrt{5})^2 = && \text{(factorizamos)}\\
&= [(x+2) + \sqrt{5}][(x+2) - \sqrt{5}] = &&\\
&= (x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5}). &&
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, un factor es $(x + 2 + \sqrt{5})$ y el otro es $(x + 2 - \sqrt{5})$.

□

12. Al factorizar el trinomio $x^3 - x^2 - 12x$, uno de sus factores es: ________.

▼ La respuesta es D.

Primero observamos que hay un factor común, que es x.

$$
\begin{aligned}
&x^3 - x^2 - 12x = && \text{(factorizamos } x\text{)}\\
&= x(x^2 - x - 12) = && \text{(ahora factorizamos } x^2 - x - 12\text{)}\\
&= x(x+m)(x+n) = && \text{(donde } mn = -12 \text{ y donde } m+n = -1\text{)}\\
&= x[x+(-4)][x+3] = && [\text{ya que } (-4)(3) = -12; -4+3 = -1]\\
&= x(x-4)(x+3).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, los factores son (x), $(x-4)$ y $(x+3)$.

□

13. Al factorizar el trinomio $8x^2 - 10x - 3$, uno de sus factores es: ________.

▼ La respuesta es D.

Aplicamos el procedimiento para casos particulares.

$$
\begin{aligned}
&8x^2 - 10x - 3 = && \text{(multiplicamos y dividimos por 8)}\\
&= \frac{8^2x^2 - 8(10x) - 8(3)}{8} = && \text{(cambiamos el orden de los factores 8 y 10)}\\
&= \frac{(8x)^2 - 10(8x) - 24}{8} = && \text{(realizamos el cambio } 8x = u\text{)}\\
&= \frac{u^2 - 10u - 24}{8} = && [\text{factorizamos } u^2 - 10u - 24 = (u+m)(u+n)]\\
&= \frac{(u+m)(u+n)}{8} = && (m = -12; n = 2, \text{ cumplen con } mn = -24 \text{ y con } m+n = -10)\\
&= \frac{(u-12)(u+2)}{8} = && \text{(recobramos } u = 8x\text{)}\\
&= \frac{(8x-12)(8x+2)}{8} = && [\text{factorizamos } (8x-12) \text{ y } (8x+2), \text{ y simplificamos}]\\
&= \frac{4(2x-3)2(4x+1)}{8} =\\
&= \frac{8(2x-3)(4x+1)}{8} =\\
&= (2x-3)(4x+1).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, uno de los factores es $2x - 3$ y el otro es $4x + 1$.

□

14. Al factorizar el polinomio $x^2 - 2x + 2$, uno de sus factores es: ________.

▼ La respuesta es C.

Aplicamos el método general, completando un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 2x + 2 = && \text{(sumamos y restamos } \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 = 1^2\text{)}\\
&= x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 2 = && \text{(agrupamos términos)}\\
&= (x^2 - 2x + 1^2) - 1 + 2 = && \text{(usamos un producto notable)}\\
&= (x-1)^2 + 1 = && \text{(que es una suma de cuadrados)}\\
&= (x-1)^2 + 1^2. && \text{(que no se puede factorizar en los reales)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el polinomio $x^2 - 2x + 2$ no puede ser factorizado mediante factores en los reales.

□

15. Al factorizar el binomio $x^4 - 16$, uno de sus factores es: ______ .

▼ La respuesta es C.

Podemos considerar al binomio $x^4 - 16$ como una diferencia de cuadrados.

$$
\begin{aligned}
& x^4 - 16 = && [\text{como } x^4 = (x^2)^2 \text{ y como } 16 = 4^2] \\
& = (x^2)^2 - (4)^2 = && (\text{se factoriza esta diferencia de cuadrados}) \\
& = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = && (\text{de nuevo vemos una diferencia de cuadrados}) \\
& = (x^2 + 4)(x^2 - 2^2) = && (\text{se factoriza de nuevo}) \\
& = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2). && (\text{donde } x^2 + 4 = x^2 + 2^2 \text{ no se puede factorizar en los reales})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tienen tres factores que son:

$$(x^2 + 4),\ (x + 2) \text{ y } (x - 2).$$

□

16. Al factorizar el polinomio $2x^2 - 6x + 1$, uno de sus factores es: ______ .

▼ La respuesta es A.

Completamos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
& 2x^2 - 6x + 1 = && (\text{factorizamos el número 2}) \\
& = 2\left(x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right) = && \left[\text{sumamos y restamos } \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right] \\
& = 2\left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = && (\text{aplicamos un producto notable}) \\
& = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{9}{4}\right] = && (\text{simplificamos fracciones}) \\
& = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right] = && (\text{vemos una diferencia de cuadrados}) \\
& = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right] = && (\text{factorizamos la diferencia de cuadrados}) \\
& = 2\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) = && (\text{efectuamos el primer producto}) \\
& = (2x - 3 + \sqrt{7})\left(x - \frac{3 + \sqrt{7}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, uno de los factores es $(2x - 3 + \sqrt{7})$.

□

Operaciones con fracciones algebraicas

Reactivos: véase la página 29

1. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{x - 1}{x + 1} - \frac{x - 2}{x + 2} = \underline{\qquad\quad}.$$

▼ La respuesta es D.

El mínimo común denominador es $(x+1)(x+2)$. Entonces:

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{(x+2)(x-1)-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x^2+x-2)-(x^2-x-2)}{(x+1)(x+2)}=$$
$$=\frac{x^2+x-2-x^2+x+2}{(x+1)(x+2)}=\frac{2x}{(x+1)(x+2)}=\frac{2x}{x^2+3x+2}.$$

□

2. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{x^2+5}{x^2}-\frac{x-2}{x}=\underline{\hspace{2cm}}.$$

▼ La respuesta es B.

El mínimo común denominador es x^2. Entonces,

$$\frac{x^2+5}{x^2}-\frac{x-2}{x}=\frac{1(x^2+5)-x(x-2)}{x^2}=\frac{x^2+5-x^2+2x}{x^2}=\frac{2x+5}{x^2}.$$

□

3. Efectuar las operaciones siguientes y simplificar.

$$\frac{1}{x(x-1)}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{(x-1)^2}=\underline{\hspace{2cm}}.$$

▼ La respuesta es E.

El mínimo común denominador es $x^2(x-1)^2$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{x(x-1)}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{x(x-1)-3(x-1)^2+2x^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{x^2-x-3(x^2-2x+1)+2x^2}{x^2(x-1)^2}=$$
$$=\frac{x^2-x-3x^2+6x-3+2x^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{5x-3}{x^2(x-1)^2}.$$

□

4. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{2}{x(x-2)}-\frac{1}{x-2}=\underline{\hspace{2cm}}.$$

▼ La respuesta es D.

El común denominador mínimo es $x(x-2)$. Por lo tanto,

$$\frac{2}{x(x-2)}-\frac{1}{x-2}=\frac{2-x}{x(x-2)}=\frac{-1(x-2)}{x(x-2)}=\frac{-1}{x}=-\frac{1}{x}.$$

□

5. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{8}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = \underline{\qquad\qquad}.$$

▼ La respuesta es C.

El mínimo común denominador es $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Entonces,

$$\frac{8}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = \frac{8}{(x+2)(x-2)} - \frac{2}{x-2} = \frac{8-2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{8-2x-4}{(x+2)(x-2)} =$$
$$= \frac{4-2x}{(x+2)(x-2)} = \frac{2(2-x)}{(x+2)(x-2)} = \frac{-2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{2}{x+2}.$$

□

6. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \underline{\qquad\qquad}.$$

▼ La respuesta es D.

El mínimo común denominador es $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Entonces,

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1(x^2+x+1)-3}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$
$$= \frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

□

7. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} + \frac{4x^2}{x^2-9} = \underline{\qquad\qquad}.$$

▼ La respuesta es B.

El mínimo común denominador es $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$. Entonces,

$$\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} + \frac{4x^2}{x^2-9} = \frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} + \frac{4x^2}{(x-3)(x+3)} =$$
$$= \frac{(x-3)(x-3)-(x+3)(x+3)+4x^2}{(x+3)(x-3)} =$$
$$= \frac{(x^2-6x+9)-(x^2+6x+9)+4x^2}{(x+3)(x-3)} =$$
$$= \frac{x^2-6x+9-x^2-6x-9+4x^2}{(x+3)(x-3)} =$$
$$= \frac{4x^2-12x}{(x+3)(x-3)} = \frac{4x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{4x}{x+3}.$$

□

8. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-8}\right)\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9}\right) = \underline{\qquad\qquad}.$$

▼ La respuesta es B.

Se factorizan los trinomios cuadráticos, se efectúa la multiplicación y se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-8}\right)\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9}\right) &= \frac{(x+1)(x-3)}{(x+4)(x-2)}\,\frac{(x-2)^2}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{(x+1)(x-3)(x-2)(x-2)}{(x+4)(x-2)(x-3)(x-3)} = \\ &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x+4)(x-3)} = \frac{x^2-x-2}{x^2+x-12}.\end{aligned}$$

□

9. Efectuar la operación siguiente y simplificar.

$$\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2-5x-2}\right) \div \left(\frac{2x^2+3x-2}{3x^2-2x-1}\right) = \underline{\qquad\qquad}.$$

▼ La respuesta es C.

Se efectúa la división, se factorizan los trinomios cuadráticos y se simplifican los factores que son comunes al numerador y al denominador.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2-5x-2}\right) \div \left(\frac{2x^2+3x-2}{3x^2-2x-1}\right) &= \left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2-5x-2}\right)\left(\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+3x-2}\right) = \\ &= \frac{(2x-1)(x+1)}{(3x+1)(x-2)}\,\frac{(3x+1)(x-1)}{(2x-1)(x+2)} = \\ &= \frac{(2x-1)(x+1)(3x+1)(x-1)}{(3x+1)(x-2)(2x-1)(x+2)} = \\ &= \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-1}{x^2-4}.\end{aligned}$$

□

10. Efectuar las operaciones siguientes y simplificar.

$$\frac{1+\frac{2}{x-2}}{1+\frac{4}{x^2-4}} = \underline{\qquad\qquad}.$$

▼ La respuesta es E.

Se realizan las operaciones en el numerador y denominador, se simplifican, luego se efectúa la división y se simplifica de nuevo.

$$\begin{aligned}\frac{1+\frac{2}{x-2}}{1+\frac{4}{x^2-4}} &= \frac{\frac{x-2+2}{x-2}}{\frac{x^2-4+4}{x^2-4}} = \frac{\frac{x}{x-2}}{\frac{x^2}{x^2-4}} = \left(\frac{x}{x-2}\right)\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right) = \\ &= \frac{x(x^2-4)}{(x-2)x^2} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x^2(x-2)} = \frac{x+2}{x}.\end{aligned}$$

□

Racionalización

Reactivos: véase la página 33

1. Al racionalizar el numerador de la fracción:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2},$$

y luego simplificar, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es D.

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}$ que es el conjugado del numerador $\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}$, luego desarrollamos y simplificamos:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2} &= \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{6-x}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \frac{(x+2)-(6-x)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \\ &= \frac{x+2-6+x}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \frac{2x-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \\ &= \frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}.\end{aligned}$$

□

2. Al racionalizar el denominador de la fracción:

$$\frac{4-x}{\sqrt{x}-2},$$

y luego simplificar, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es C.

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x}+2$ que es el conjugado del denominador, luego desarrollamos y simplificamos:

$$\begin{aligned}\frac{4-x}{\sqrt{x}-2} &= \frac{(4-x)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{(4-x)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-(2)^2} = \\ &= \frac{(4-x)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4} = \frac{-(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)} = -1\left(\sqrt{x}+2\right) = -\sqrt{x}-2.\end{aligned}$$

□

3. Al racionalizar el numerador y el denominador de la fracción:

$$\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}},$$

y luego simplificar, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es B.

Multiplicamos numerador y denominador por sus conjugados. Luego desarrollamos y simplificamos:

$$\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\cdot\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}} =$$
$$= \frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt{5-x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} = \frac{(3)^2-\left(\sqrt{5+x}\right)^2}{(1)^2-\left(\sqrt{5-x}\right)^2}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} =$$
$$= \frac{9-(5+x)}{1-(5-x)}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} = \frac{9-5-x}{1-5+x}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} = \frac{4-x}{-4+x}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} =$$
$$= \frac{(4-x)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{-(4-x)\left(3+\sqrt{5+x}\right)} = -\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}.$$

□

4. Al racionalizar la expresión algebraica:

$$x-\sqrt{x^2-2x},$$

y luego simplificar, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es A.

La expresión $x-\sqrt{x^2-2x}$ puede escribirse como fracción si se considera el denominador 1.

$$x-\sqrt{x^2-2x} = \frac{x-\sqrt{x^2-2x}}{1} = \frac{\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}{1\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)} =$$
$$= \frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x^2-(x^2-2x)}{x+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x^2-x^2+2x}{x+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{2x}{x+\sqrt{x^2-2x}}.$$

□

5. Al racionalizar la fracción algebraica:

$$\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x},$$

y luego simplificar, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es E.

Para generar la diferencia de cubos a^3-b^2 se multiplica la diferencia $a-b$ por a^2+ab+b^2.

$$\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)+1^2\right]}{x\left[\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)+1^2\right]} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1^3}{x\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right]} = \frac{x+1-1}{x\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right]} =$$
$$= \frac{x}{x\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right]} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}.$$

□

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Reactivos: véase la página 35

1. Al resolver la ecuación

$$4 - 3x = 2x + 9,$$

hallamos que: ______.

▼ La respuesta es E.

Resolver la ecuación $4 - 3x = 2x + 9$ consiste en encontrar el valor de la incógnita x que permita que la igualdad se cumpla. Para esto se aisla x en un lado (miembro) de la igualdad (se despeja x) utilizando las propiedades de la igualdad.

<table>
<tr><th colspan="2">$4 - 3x = 2x + 9$</th></tr>
<tr><td>Se aplica la propiedad aditiva, restando $2x$ en ambos lados.
$$\begin{aligned}4 - 3x - 2x &= 2x + 9 - 2x;\\ 4 - 5x &= 9.\end{aligned}$$</td><td>También se suele decir: $2x$ que está sumando en el lado derecho, pasa restando al lado izquierdo.
$$\begin{aligned}4 - 3x &= 2x + 9;\\ 4 - 3x - 2x &= 9;\\ 4 - 5x &= 9.\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>Se aplica la propiedad aditiva, restando 4 en ambos lados.
$$\begin{aligned}4 - 5x &= 9;\\ 4 - 5x - 4 &= 9 - 4;\\ -5x &= 5.\end{aligned}$$</td><td>También se suele decir: 4 que tiene signo + en el lado izquierdo, pasa al lado derecho con signo −.
$$\begin{aligned}+4 - 5x &= 9;\\ -5x &= 9 - 4;\\ -5x &= 5.\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>Se aplica la propiedad multiplicativa, multiplicando ambos lados por $\left(-\frac{1}{5}\right)$.
$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{5}\right)(-5x) &= \left(-\frac{1}{5}\right)(5);\\ x &= -1.\end{aligned}$$
Este paso también se puede expresar: se dividen ambos lados entre (-5).</td><td>También se suele decir: (-5) que multiplica a todo el lado izquierdo, pasa dividiendo a todo el lado derecho.
$$\begin{aligned}(-5)x &= 5;\\ x &= \frac{5}{(-5)};\\ x &= -1.\end{aligned}$$</td></tr>
</table>

De esta manera se ha despejado x, es decir, se la ha aislado en un lado de la ecuación.

Se concluye que si $x = -1$, entonces la igualdad se cumple.

Por lo que la solución de la ecuación $4 - 3x = 2x + 9$ es $x = -1$.

□

2. El valor de x que resuelve la ecuación $2x + 2 - 3x = -2 - 4x + 3$ es: ______.

▼ La respuesta es C.

En ecuaciones de primer grado con una incógnita, como la de este ejercicio, conviene reducir los términos semejantes en cada lado primeramente. Esto es:

$$2x + 2 - 3x = -2 - 4x + 3 \;\Rightarrow\; 2 - x = 1 - 4x.$$

A continuación se procede a despejar x, aplicando las propiedades de la igualdad.

Se aplica la propiedad aditiva sumando $4x$ en cada lado:

$$2 - x = 1 - 4x \;\Rightarrow\; 2 - x + 4x = 1 - 4x + 4x \;\Rightarrow\; 2 + 3x = 1.$$

Se aplica la propiedad aditiva restando 2 en cada lado

$$2 + 3x = 1 \;\Rightarrow\; 2 + 3x - 2 = 1 - 2 \;\Rightarrow\; 3x = -1.$$

Por último, se aplica la propiedad multiplicativa, multiplicando por $\left(\frac{1}{3}\right)$ cada lado de la ecuación. En este caso, es común expresar: dividiendo cada lado entre 3.

$$3x = -1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)3x = \left(\frac{1}{3}\right)(-1) \;\Rightarrow\; \frac{3x}{3} = \frac{-1}{3} \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{3}.$$

Se concluye que la solución de la ecuación original es $x = -\frac{1}{3}$. □

3. La solución de la ecuación $3(5a + 2) = \dfrac{3 - 6a}{2}$ es: ________ .

▼ La respuesta es E.

Primero se aplica la propiedad multiplicativa, multiplicando ambos lados de la ecuación por 2, esto es:

$$\begin{aligned} 3(5a + 2) = \frac{3 - 6a}{2} \;&\Rightarrow\; (2)\cdot 3(5a + 2) = (2)\cdot\frac{3 - 6a}{2} \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow\; 6(5a + 2) = 3 - 6a \;\Rightarrow\; 30a + 12 = 3 - 6a. \end{aligned}$$

Se aplica la propiedad aditiva sumando $6a$ en ambos lados y restando 12 también en ambos lados.

$$30a + 12 + 6a - 12 = 3 - 6a + 6a - 12 \;\Rightarrow\; 36a = -9.$$

Por último se multiplica la igualdad por $\left(\frac{1}{36}\right)$

$$\begin{aligned} 36a = -9 \;&\Rightarrow\; \left(\frac{1}{36}\right)36a = \left(\frac{1}{36}\right)(-9) \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow\; a = \frac{-9}{36} \;\Rightarrow\; a = \frac{-1}{4} \;\Rightarrow\; a = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Se concluye que la solución de la ecuación es:

$$a = -\frac{1}{4}.$$

□

4. El valor de la incógnita x que resuelve la ecuación $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}}{3}$ es: ________ .

▼ La respuesta es A.

Primero se multiplica cada lado de la ecuación por 3:

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}{3} \;\Rightarrow\; 3\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)=(3)\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}{3}\right) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{3x}{2}+1=\frac{1}{2}-\frac{x}{3}.$$

Se suma $\dfrac{x}{3}$ y se resta 1 en cada miembro de la ecuación

$$\frac{3x}{2}+1+\frac{x}{3}-1=\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{3}-1 \;\Rightarrow\; \frac{3x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{1}{2}-1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{9x+2x}{6}=\frac{1-2}{2} \;\Rightarrow\; \frac{11x}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Por último se aplica la propiedad multiplicativa, multiplicando la ecuación por $\left(\dfrac{6}{11}\right)$

$$\frac{11x}{6}=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{6}{11}\right)\left(\frac{11x}{6}\right)=\left(\frac{6}{11}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x=\frac{-6}{22} \;\Rightarrow\; x=-\frac{3}{11}.$$

Se concluye que el valor de la incógnita x que resuelve la ecuación original es $-\dfrac{3}{11}$.

□

Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Reactivos: véase la página 39

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales e indicar la respuesta: ______.

$$12y=7x-14;$$
$$7x+14=-8y.$$

▼ La respuesta es E.

Primeramente se resolverá el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

Se despeja una variable de cualquiera de las ecuaciones. En este caso se despeja y de la primera ecuación, esto es:

$$12y=7x-14 \;\Rightarrow\; y=\frac{7x-14}{12}.$$

La expresión encontrada para y se usa en la segunda ecuación:

$$7x+14=-8y \;\Rightarrow\; 7x+14=-8\left(\frac{7x-14}{12}\right), \qquad (*)$$

que es una ecuación con una incógnita.

Se resuelve la ecuación (*)

$$7x+14=-8\left(\frac{7x-14}{12}\right) \;\Rightarrow\; 12(7x+14)=-8(7x-14) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 84x+168=-56x+112 \;\Rightarrow\; 84x+56x=112-168 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 140x=-56 \;\Rightarrow\; x=\frac{-56}{140} \;\Rightarrow\; x=\frac{-8}{20} \;\Rightarrow\; x=-\frac{2}{5}.$$

El valor encontrado para x se utiliza en la expresión que se tiene para la incógnita y.

$$\begin{aligned} y = \frac{7x-14}{12} \quad \& \quad x = -\frac{2}{5} \;\Rightarrow & \\ &\Rightarrow\; y = \frac{7\left(-\frac{2}{5}\right)-14}{12} = \frac{-\frac{14}{5}-14}{12} = \frac{\frac{-14-70}{5}}{12} = \frac{-\frac{84}{5}}{12} \;\Rightarrow \\ &= -\frac{84}{60} = -\frac{7}{5} \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; y = -\frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Se concluye que la solución del sistema de ecuaciones lineales 2×2 es:

$$x = -\frac{2}{5} \qquad \& \qquad y = -\frac{7}{5}.$$

A continuación se resolverá el sistema por el método de suma o resta.

Observar que para este sistema, no es necesario multiplicar por algún número ninguna de las ecuaciones. Sólo es necesario reescribirlas para, posteriormente, realizar la suma de las ecuaciones con facilidad.

Esto es:

$$\begin{cases} 12y = 7x - 14 \\ 7x + 14 = -8y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12y - 7x + 14 = 0 \\ 8y + 7x + 14 = 0\,. \end{cases}$$

Se suman ambas ecuaciones

$$\begin{array}{rl} 12y - 7x + 14 = 0 & \\ 8y + 7x + 14 = 0 & + \\ \hline 20y \qquad + 28 = 0. & \end{array}$$

De esta manera se ha obtenido una ecuación con una incógnita:

$$20y + 28 = 0.$$

Resolvemos la ecuación

$$20y + 28 = 0 \;\Rightarrow\; 20y = -28 \;\Rightarrow\; y = -\frac{28}{20} \;\Rightarrow\; y = -\frac{7}{5}.$$

Finalmente,

$y = -\frac{7}{5}$ se utiliza en cualquiera de las ecuaciones del sistema para encontrar el valor de x. Si y se usa en la segunda ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} 7x + 14 = -8y \;\Rightarrow\; 7x = -8\left(-\frac{7}{5}\right) - 14 \;\Rightarrow\; 7x = \frac{56-70}{5} \;\Rightarrow & \\ &\Rightarrow\; 7x = \frac{-14}{5} \;\Rightarrow\; x = \frac{-14}{5(7)} \;\Rightarrow\; x = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

La solución del sistema es, entonces:

$$x = -\frac{2}{5} \quad \& \quad y = -\frac{7}{5}.$$

□

2. Determinar el valor de las incógnitas x & y que satisfacen las siguientes ecuaciones.
Escribir la respuesta: ________.

$$2y = \frac{2x}{3} + 2;$$
$$y + 3 = 4x.$$

▼ La respuesta es B.

Se resolverá el sistema por el método suma o resta.

Se reescriben las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 2y = \dfrac{2x}{3} + 2 \\ y + 3 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - \dfrac{2}{3}x - 2 = 0 \\ y - 4x + 3 = 0 \,. \end{cases}$$

Se multiplica por (-2) la segunda ecuación, esto es:

$$\begin{cases} 2y - \dfrac{2}{3}x - 2 = 0 \\ y - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - \dfrac{2}{3}x - 2 = 0 \\ -2y + 8x - 6 = 0 \,. \end{cases}$$

Se suman las últimas ecuaciones para obtener una ecuación de una sola incógnita

$$\begin{array}{rl} 2y - \frac{2}{3}x - 2 = 0 & \\ -2y + 8x - 6 = 0 & + \\ \hline \frac{22}{3}x - 8 = 0 \,. & \end{array}$$

Se resuelve la ecuación obtenida

$$\frac{22x}{3} - 8 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{22x}{3} = 8 \;\Rightarrow\; x = \frac{24}{22} \;\Rightarrow\; x = \frac{12}{11}.$$

Este valor de x se usa en cualquiera de las ecuaciones del sistema para determinar el valor de y. Utilizando la segunda ecuación:

$$y + 3 = 4x \;\Rightarrow\; y = 4x - 3 \;\Rightarrow\; y = 4\left(\frac{12}{11}\right) - 3 = \frac{48}{11} - 3 = \frac{48 - 33}{11} \;\Rightarrow$$
$$y = \frac{15}{11}.$$

Se concluye que $x = \dfrac{12}{11}$ & $y = \dfrac{15}{11}$ satisfacen las ecuaciones del sistema.

□

3. Resolver el sistema de ecuaciones lineales. Escribir la respuesta: ________.

$$5a + 6b = -1;$$
$$3a - 2b = 5.$$

▼ La respuesta es D.

En este ejercicio se aplicará el método de sustitución para resolver el sistema.

Se despeja de la primera ecuación la variable a:

$$5a + 6b = -1 \Rightarrow 5a = -1 - 6b \Rightarrow a = \frac{-1-6b}{5}.$$

Esta expresión de a se usa en la segunda ecuación:

$$3a - 2b = 5 \Rightarrow 3\left(\frac{-1-6b}{5}\right) - 2b = 5.$$

De esta manera se ha obtenido una ecuación con una incógnita.

De esta ecuación se despeja la incógnita b:

$$3\left(\frac{-1-6b}{5}\right) - 2b = 5 \Rightarrow 3\left(\frac{-1-6b}{5}\right) = 5 + 2b \Rightarrow 3(-1-6b) = 5(5+2b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3 - 18b = 25 + 10b \Rightarrow -18b - 10b = 25 + 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -28b = 28 \Rightarrow b = \frac{28}{-28} \Rightarrow b = -1.$$

El valor $b = -1$ se utiliza en la expresión $a = \dfrac{-1-6b}{5}$ y se obtiene:

$$a = \frac{-1-6(-1)}{5} = \frac{-1+6}{5} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow a = 1.$$

Se concluye que la solución del sistema de ecuaciones lineales 2×2 es:

$$a = 1 \qquad \& \qquad b = -1.$$

□

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Escribir la respuesta: ________.

$$y = 3x + 6;$$
$$y = -\frac{x}{3} - 4.$$

▼ La respuesta es C.

Observar que en cada una de las ecuaciones la variable y está despejada. Podemos optar aquí por igualar las dos expresiones que se tienen para la misma incógnita y. Esto es, conviene utilizar el método de igualación y así lo haremos.

$$3x + 6 = -\frac{x}{3} - 4 \Rightarrow 3x + \frac{x}{3} = -4 - 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{10}{3}x = -10 \Rightarrow x = \frac{3}{10}(-10) \Rightarrow x = -3.$$

Luego se usará $x = -3$ en cualquiera de las ecuaciones del sistema para así encontrar el valor correspondiente a y.

Si se emplea la primera ecuación del sistema, hallamos:

$$y = 3x + 6 \Rightarrow y = 3(-3) + 6 = -9 + 6 = -3.$$

Se concluye que la solución del sistema de ecuaciones lineales es:

$$x = -3 \quad \& \quad y = -3.$$

□

5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Escribir la respuesta: ______.

$$\begin{aligned} -5x + 2y &= 16; \\ 4x + 3y &= \ \ 1. \end{aligned}$$

▼ La respuesta es D.

Resolveremos aplicando el método de igualación. Despejaremos la incógnita y de ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} -5x + 2y = 16 \ &\Rightarrow \ 2y = 16 + 5x \ \Rightarrow \ y = \frac{16+5x}{2}; \\ 4x + 3y = 1 \ &\Rightarrow \ 3y = 1 - 4x \ \Rightarrow \ y = \frac{1-4x}{3}. \end{aligned}$$

Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{16+5x}{2} = \frac{1-4x}{3} \ &\Rightarrow \ 3(16+5x) = 2(1-4x) \ \Rightarrow \ 48 + 15x = 2 - 8x \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ 15x + 8x = 2 - 48 \ \Rightarrow \ 23x = -46 \ \Rightarrow \ x = \frac{-46}{23} \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ x = -2. \end{aligned}$$

Consideramos $x = -2$ en la igualdad $y = \dfrac{16+5x}{2}$:

$$y = \frac{16+5(-2)}{2} = \frac{16-10}{2} = \frac{6}{2} = 3 \ \Rightarrow \ y = 3.$$

Concluimos que la solución del sistema dado es:

$$x = -2 \quad \& \quad y = 3.$$

□

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Reactivos: véase la página 42

1. Al resolver la ecuación $x^2 - 4x = 21$, se obtiene: ______.

▼ La respuesta es D.

Reescribimos la ecuación en la forma $x^2 - 4x = 21$ como $x^2 - 4x - 21 = 0$. Pensando en factorización, buscamos dos números m, n tales que $x^2 - 4x - 21 = (x+m)(x+n)$. Dichos números son $m = 3$ & $n = -7$, ya que $mn = (3)(-7) = -21$ & $m + n = 3 + (-7) = -4$. Luego,

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 21 = 0 \ &\Rightarrow \ (x+3)(x-7) = 0 \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ x + 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad x - 7 = 0 \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ x = -3 \quad \text{o bien} \quad x = 7. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se encontramos dos soluciones reales diferentes que son: $x = -3$ & $x = 7$.

□

2. Al resolver la ecuación $x^2 = 9$, se obtiene: ______.

▼ La respuesta es B.

Una manera de resolver esta ecuación es:

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Rightarrow x = \begin{cases} +3 \\ -3. \end{cases}$$

Entonces, existen dos soluciones reales diferentes que son: $x = 3$; $x = -3$.

Otra manera de resolver esta ecuación es factorizando la diferencia de cuadrados $x^2 - 3^2$.

$$\begin{aligned} x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 3^2 = 0 &\Rightarrow (x+3)(x-3) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + 3 = 0 \text{ o bien } x - 3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = -3 \text{ o bien } x = 3. \end{aligned}$$

De nuevo, las soluciones son:

$$x = -3; \qquad x = 3.$$

□

3. Al resolver la ecuación $6x^2 + 5x - 6 = 0$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es C.

Observar que la ecuación que buscamos resolver está expresada en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, por lo que de $6x^2 + 5x - 6 = 0$ se tiene que $a = 6$, $b = 5$, $c = -6$.

Usando los valores anteriores en la fórmula general:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(6)(-6)}}{2(6)} = \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{-5+13}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}; \\ x_2 &= \frac{-5-13}{12} = \frac{-18}{12} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Se concluye que las soluciones de $6x^2 + 5x - 6 = 0$ son:

$$x = \frac{2}{3}; \qquad x = -\frac{3}{2}.$$

□

4. Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 4x = 0$ son: ________.

▼ La respuesta es D.

Resolvemos la ecuación factorizando al factor común x.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x = 0 &\Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 0 \quad \text{o bien} \quad 3x - 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 0 \quad \text{o bien} \quad 3x = 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 0 \quad \text{o bien} \quad x = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Se concluye que la ecuación tiene dos soluciones reales, que son:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = \frac{4}{3}.$$

□

5. Las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 1 = 0$ son: ________.

▼ La respuesta es B.

Aplicamos la fórmula general considerando que: $a = 1, b = -4, c = 1$.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{4(3)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}\sqrt{3}}{2} = \\
&= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{2} \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} = \\
&= 2 \pm \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}; \qquad x_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

□

Sistemas de ecuaciones 2×2 con al menos una cuadrática

Reactivos: véase la página 44

1. Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 25; \\
x - y + 1 &= 0,
\end{aligned}$$

son: ________.

▼ La respuesta es B.

Despejamos la incógnita y de la ecuación lineal:

$$x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1.$$

Sustituimos en la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 = 25 &\Rightarrow x^2 + (x + 1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 25 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0.
\end{aligned}$$

Resolvemos por factorización esta ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}
x^2 + x - 12 = 0 &\Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow x + 4 = 0 \quad \text{o bien} \quad x - 3 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow x = -4 \quad \text{o bien} \quad x = 3.
\end{aligned}$$

Se calculan los valores de la incógnita y correspondientes a estos valores de x. Para esto se usará $y = x + 1$.

$$\begin{aligned}
&x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1 = -4 + 1 = -3 \Rightarrow x_1 = -4 \quad \& \quad y_1 = -3; \\
&x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = x_2 + 1 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow x_2 = 3 \quad \& \quad y_2 = 4.
\end{aligned}$$

Se concluye que las soluciones del sistema son:

$$x_1 = -4 \quad \& \quad y_1 = -3; \qquad x_2 = 3 \quad \& \quad y_2 = 4.$$

□

2. Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - y + 1 &= 0; \\ x + y - 7 &= 0, \end{aligned}$$

son: ________ .

▼ La respuesta es E.

Notamos que en ambas ecuaciones se tiene la variable y con exponente 1. Por esto procedemos a despejar y de ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - y + 1 = 0 &\Rightarrow y = x^2 - 2x + 1; \\ x + y - 7 = 0 &\Rightarrow y = 7 - x. \end{aligned}$$

Igualamos estas expresiones y simplificamos:

$$x^2 - 2x + 1 = 7 - x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 7 + x = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0.$$

Resolvemos esta ecuación cuadrática factorizando:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 = 0 &\Rightarrow (x + 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + 2 = 0 \quad \text{o bien} \quad x - 3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = -2 \quad \text{o bien} \quad x = 3. \end{aligned}$$

Calculamos los valores de la incógnita y correspondientes a estos valores de x. Para esto usamos $y = 7 - x$:

$$\begin{aligned} &x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = 7 - x_1 = 7 - (-2) = 9 \Rightarrow x_1 = -2 \quad \& \quad y_1 = 9; \\ &x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 7 - x_2 = 7 - 3 = 4 \Rightarrow x_2 = 3 \quad \& \quad y_2 = 4. \end{aligned}$$

Se concluye que las soluciones del sistema son:

$$x_1 = -2 \quad \& \quad y_1 = 9; \qquad x_2 = 3 \quad \& \quad y_2 = 4.$$

□

3. Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2; \\ x^2 - y &= 0, \end{aligned}$$

son: ________ .

▼ La respuesta es D.

Notamos que en ambas ecuaciones se tiene el mismo término x^2. Por esto procedemos a restar la segunda ecuación de la primera

$$\begin{array}{rl} \cancel{x}^2 + y^2 = & 2 \\ - \cancel{x}^2 + y = & 0 \\ \hline y^2 + y = & 2. \end{array} \; +$$

Se tiene que $y^2 + y - 2 = 0$. Resolvemos esta ecuación cuadrática por factorización

$$\begin{aligned} y^2 + y - 2 = 0 &\Rightarrow (y + 2)(y - 1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y + 2 = 0 \quad \text{o bien} \quad y - 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -2 \quad \text{o bien} \quad y = 1. \end{aligned}$$

Calculamos los valores de la incógnita x correspondientes a estos valores de y. Para esto usamos $y = -2$ en $x^2 - y = 0$, o equivalentemente en $x^2 = y$.

$$y = -2 \Rightarrow x^2 = -2.$$

Lo cual no es posible; no existen reales x tales que x^2 sea negativo.

Ahora, para $y = 1$:

$$\begin{aligned} y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = -1 \quad \text{o bien} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Se concluye que las soluciones del sistema son:

$$x_1 = -1 \quad \& \quad y_1 = 1; \qquad x_2 = 1 \quad \& \quad y_2 = 1.$$

□

4. Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 36; \\ 3x^2 + y^2 &= 36, \end{aligned}$$

son: ________.

▼ La respuesta es B.

Para resolver este sistema, despejamos x^2 de la primera ecuación para luego sustituir en la segunda ecuación.

$$x^2 + 3y^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 36 - 3y^2.$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 = 36 &\Rightarrow 3(36 - 3y^2) + y^2 = 36 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 108 - 9y^2 + y^2 = 36 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -8y^2 = 36 - 108 = -72 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 = \frac{-72}{-8} = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -3 \quad \text{así como} \quad y = 3. \end{aligned}$$

Ahora se obtienen los valores de x correspondientes a cada uno de los valores de y obtenidos. Para esto se usan los valores de y en $x^2 = 36 - 3y^2$.

$$\begin{aligned} y = -3 \Rightarrow x^2 = 36 - 3y^2 = 36 - 3(-3)^2 = 36 - 27 = 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow x = -3 \quad \text{así como} \quad x = 3. \end{aligned}$$

Encontramos dos soluciones:

$$x_1 = -3 \quad \& \quad y_1 = -3; \qquad x_2 = 3 \quad \& \quad y_2 = -3$$

Ahora para $y = 3$:

$$\begin{aligned} y = 3 \Rightarrow x^2 = 36 - 3y^2 = 36 - 3(3)^2 = 36 - 27 = 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow x = -3 \quad \text{así como} \quad x = 3. \end{aligned}$$

Aquí también se tienen dos soluciones:

$$x_3 = -3 \quad \& \quad y_3 = 3; \qquad x_4 = 3 \quad \& \quad y_4 = 3.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones dado tienen cuatro soluciones que son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 \quad \& \quad y_1 = -3; \\ x_2 &= 3 \quad\;\;\; \& \quad y_2 = -3; \\ x_3 &= -3 \quad \& \quad y_3 = 3; \\ x_4 &= 3 \quad\;\;\; \& \quad y_4 = 3. \end{aligned}$$

□

1.3 Geometría euclideana

Ángulos complementarios y suplementarios

Reactivos: véase la página 45

1. Los ángulos α, β son complementarios. Si el valor de α es un quinto del valor de β, ¿cuál es el valor del ángulo α?: ________.

▼ La respuesta es B.

Considerando la información del problema, se tiene que:

$$\alpha + \beta = 90^\circ, \tag{*}$$

ya que α & β son ángulos complementarios.

Además:

$$\alpha = \frac{\beta}{5}, \tag{**}$$

pues, como señala el texto, α es un quinto del valor de β.

En este problema se debe encontrar el valor de ángulo α. Para esto se debe resolver el sistema de ecuaciones formado por (*) y por (**).

De la ecuación (**) se puede despejar β, esto es: $\alpha = \dfrac{\beta}{5} \Rightarrow \beta = 5\alpha$.

Al usar 5α en (*), se obtiene una ecuación de la cual se puede despejar α:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \& \quad \beta = 5\alpha \;\Rightarrow$$
$$\alpha + 5\alpha = 90^\circ \;\Rightarrow\; 6\alpha = 90^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{90^\circ}{6} \;\Rightarrow\; \alpha = 15^\circ.$$

□

2. α, θ son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Si el valor de α es 40° mayor que θ, ¿cuál es el valor de θ?: ________.

▼ La respuesta es A.

Los ángulos agudos[103] de un triángulo rectángulo suman 90°, es decir,

$$\alpha + \theta = 90^\circ; \tag{*}$$

103. Ángulos de un triángulo rectángulo.

lo que implica que α & θ son ángulos complementarios.

Por otra parte, α es 40° mayor que θ, es decir,

$$\alpha = \theta + 40°. \tag{**}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (*) y por (**) podemos encontrar el valor de θ.

En este caso, se usa α hallado en (**):

$$\alpha + \theta = 90° \quad \& \quad \alpha = \theta + 40° \Rightarrow$$
$$(\theta + 40°) + \theta = 90° \Rightarrow 2\theta = 50° \Rightarrow \theta = \frac{50°}{2} \Rightarrow \theta = 25°.$$

□

3. Considerar que β, θ son ángulos suplementarios y además $\beta > \theta$. Si la diferencia entre éstos es de 30°¿cuál es el valor de θ?: ________ .

▼ La respuesta es C.

Después de leer el enunciado se pueden establecer las siguientes ecuaciones:

$$\beta + \theta = 180°; \tag{*}$$

ya que β & θ son ángulos suplementarios.

Además, dado que $\beta > \theta$ y que la diferencia entre estos ángulos es de 30°:

$$\beta - \theta = 30°. \tag{**}$$

Observa que no sería correcto escribir $\theta - \beta = 30°$, ya que $\theta - \beta$ da como resultado una cantidad negativa debido a que $\beta > \theta$.

En lo anterior, se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y, al resolverlo, se puede encontrar el valor del ángulo θ.

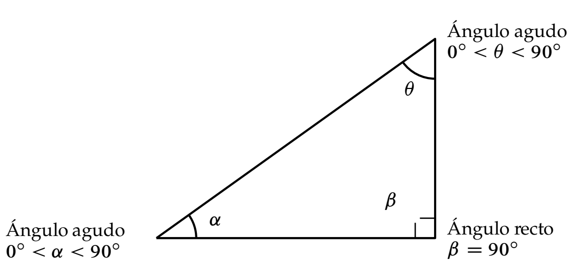
Para esto, se despeja β de la ecuación (**) y se usa en (*); posteriormente se despeja θ y se encuentra su valor.

$$\beta - \theta = 30° \Rightarrow \beta = 30° + \theta.$$

Luego,

$$\beta + \theta = 180° \quad \& \quad \beta = 30° + \theta \Rightarrow$$
$$(30° + \theta) + \theta = 180° \Rightarrow 30° + 2\theta = 180° \Rightarrow 2\theta = 150° \Rightarrow \theta = \frac{150°}{2} \Rightarrow \theta = 75.$$

□



4. El valor del ángulo β es 20° mayor que el cuádruple del valor del ángulo α. Si β, α son ángulos suplementarios, ¿cuál es el valor del ángulo α?: ________.

▼ La respuesta es D.

El enunciado especifica que el ángulo β es 20° mayor que el cuádruple del valor del ángulo α, lo cual se expresa con la ecuación:

$$\beta = 4\alpha + 20^\circ. \tag{*}$$

Por otra parte, dado que β & α son ángulos suplementarios:

$$\beta + \alpha = 180^\circ. \tag{**}$$

Las ecuaciones anteriores conforman un sistema que, al resolverlo, permite conocer el valor del ángulo α. Se utiliza (*) en (**). Esto es:

$$\beta + \alpha = 180^\circ \quad \& \quad \beta = 4\alpha + 20^\circ \Rightarrow$$

$$(4\alpha + 20^\circ) + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha = 160^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{160^\circ}{5} \Rightarrow \alpha = 32^\circ.$$

□

Ángulos formados al cortar dos rectas paralelas con una transversal

Reactivos: véase la página 47

1. Las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. El ángulo θ es igual al ángulo: ________.

▼ La respuesta es D.

Los ángulos iguales con el ángulo θ son:

- α (pues θ, α son opuestos por el vértice).
- γ' (ya que γ', α son correspondientes).
- β' (dado que β, α son alternos externos.

Luego, la opción correcta es la D., que tiene a β'.

□

2. Las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. Los ángulos α y β son ángulos: ________.

▼ La respuesta es D.

En el dibujo formado por las rectas paralelas entre sí $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, el ángulo α es un ángulo externo y el ángulo β es interno. Estos ángulos son iguales por ser correspondientes.

□

3. En la figura, las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. La medida del ángulo α es: ________.

▼ La respuesta es D.

De la figura, se observa que el ángulo β y el ángulo γ son correspondientes, por lo que $\beta = \gamma$. Observa también que $\theta + \gamma = 180^\circ$ por ser ángulos suplementarios, por lo cual:

$$(120^\circ + x) + (20^\circ + x) = 180^\circ \Rightarrow 120^\circ + x + 20^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow 40^\circ + 2x = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 180^\circ - 140^\circ \Rightarrow x = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ.$$

Por otra parte, los ángulos α & β son ángulos complementarios, es decir, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Entonces:

$$\alpha + (20^\circ + x) = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - (20^\circ + x) \Rightarrow \alpha = 70^\circ - x.$$

Ya que $x = 20^\circ$, tenemos:

$$\alpha = 70^\circ - x = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ.$$

□

4. Las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. El valor de β es: ______.

▼ La respuesta es C.

En la figura mostrada se observa que β & $\alpha - 30°$ son suplementarios, por lo cual:

$$\beta + (\alpha - 30°) = 180°.$$

Por otra parte, β & $\alpha + 20°$ son alternos externos, por lo que $\beta = \alpha + 20°$. Se tiene entonces que:

$$\beta + (\alpha - 30°) = 180° \quad \& \quad \beta = \alpha + 20° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\alpha + 20°) + (\alpha - 30°) = 180° \Rightarrow \alpha + 20° + \alpha - 30° = 180° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\alpha = 180° + 30° - 20° \Rightarrow 2\alpha = 190° \Rightarrow \alpha = \frac{190°}{2} = 95°.$$

Por lo tanto:

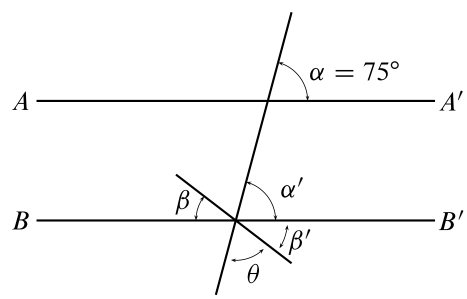
$$\beta = \alpha + 20° = 95° + 20° = 115°.$$

□

5. Considerar que las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas entre sí. Si el ángulo β es la mitad del ángulo α, el valor del ángulo θ es: ______.

▼ La respuesta es D.

En la figura que se muestra a continuación, observa que α & α' son ángulos correspondientes por lo que $\alpha = \alpha'$. Además, por ser ángulos opuestos por el vértice, $\beta = \beta'$.



Observa también que

$$\theta + \beta' + \alpha' = 180° \Rightarrow \theta = 180° - \beta' - \alpha'.$$

Considerando que $\beta' = \beta = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{75°}{2}$ & $\alpha = \alpha' = 75°$:

$$\theta = 180° - \frac{75°}{2} - 75° \Rightarrow \theta = 67.5°.$$

□

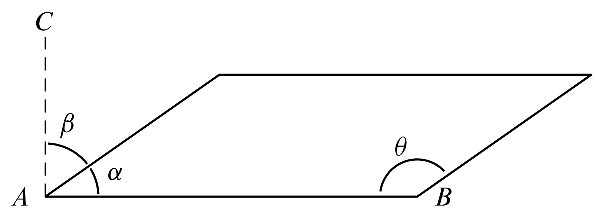
Propiedades de paralelogramos y triángulos

Reactivos: véase la página 51

1. La línea $\overline{AB}$ que representa la base del paralelogramo mostrado en la figura es perpendicular al segmento recto $\overline{AC}$. Si el ángulo θ es igual a 145°, el valor del ángulo β es: ______.

▼ La respuesta es A.

Considerar la siguiente figura.



Dado que la línea $\overline{AB}$ que representa la base del paralelogramo es perpendicular al segmento recto $\overline{AC}$, entonces:

$$\beta + \alpha = 90 \;\Rightarrow\; \beta = 90 - \alpha. \qquad (*)$$

Por otra parte, para todo paralelogramo, dos ángulos consecutivos son suplementarios. En este caso,

$$\alpha + \theta = 180^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 180^\circ - \theta. \qquad (**)$$

Si se usa (**) en (*) y considerando que $\theta = 145^\circ$:

$$\beta = 90 - \alpha = 90 - (180^\circ - \theta) = 90 - 180^\circ + \theta = 90 - 180^\circ + 145^\circ = 55^\circ.$$

□

2. Considerar los polígonos que se muestran a continuación.
¿En cuál de las siguientes opciones se tiene un paralelogramo? Elige la opción: ________.

▼ La respuesta es D.

Recordar que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí.

Observa que los lados opuestos del paralelogramo de la figura cuatro son paralelos entre sí.

También, para todo paralelogramo, sus lados opuestos son congruentes (iguales). Nota que los lados opuestos del paralelogramo de la figura cuatro son congruentes.

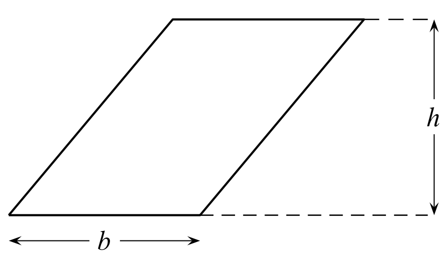
Los polígonos de las figuras 1, 2, 3, 5 y 6 son cuadriláteros, pero ninguno de éstos son paralelogramos.
Sólo el cuadrilátero de la figura cuatro representa un paralelogramo.

□

3. Un paralelogramo tiene una base cuya longitud es de 26 m y una superficie de 806 m^2. ¿Cuál es la altura de este polígono? Indica qué opción es correcta: ________.

▼ La respuesta es A.

El área A de un paralelogramo está definida como la base b por la altura h. Observa la siguiente figura.



A: área de un paralelogramo
$A = b \cdot h$

En este problema, dada la base b y el área A de un paralelogramo, se pide calcular la altura h. De la expresión anterior se puede despejar la altura h y calcularla. Esto es:

$$A = b \cdot h \;\Rightarrow\; h = \frac{A}{b},$$

si $A = 806\ \text{m}^2$ y si $b = 26$ m, entonces,

$$h = \frac{A}{b} = \frac{806\ \text{m}^2}{26\ \text{m}} = 31\ \text{m}.$$

□

4. La diferencia de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de $34°22'$ ¿Cuánto mide el ángulo menor? Elige la opción: ________.

▼ La respuesta es E.

La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a $180°$, y un triángulo rectángulo tiene un ángulo interno que es recto (mide $90°$), entonces, la suma de los ángulos agudos es igual a $90°$.

Considerando los ángulos agudos α & β de la figura dada se tiene que: $\alpha + \beta = 90°$. Y debido a que la diferencia de estos ángulos es $34°22'$, entonces se cumple también:

$$\alpha - \beta = 34°22'.$$

Luego, los ángulos α & β quedan determinados por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90°. \\ \alpha - \beta &= 34°22'. \end{aligned}$$

Resolvemos este sistema sumando las ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & 90° \\ \alpha & - & \beta & = & 34°22' \\ \hline 2\alpha & + & 0 & = & 124°22' \end{array} + \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{2}(124°22') \;\Rightarrow\; \alpha = 62°11'.$$

Usando este valor en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = 90° \;\&\; \alpha = 62°11' \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta = 90° - \alpha = 90° - 62°11' = 89°60' - 62°11' \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta = 27°49'. \end{aligned}$$

Por lo tanto los ángulos agudos miden:

$$\alpha = 62°11' \quad \& \quad \beta = 27°49'.$$

El ángulo menor es $\beta = 27°49'$.

□

5. Si la suma de los ángulos de la base de un triángulo isósceles es igual al cuádruplo del ángulo restante, entonces la medida de uno de los ángulos de la base es: ________.

▼ La respuesta es D.

Considerando la figura dada, y como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a $180°$, entonces:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ahora bien, como la suma de los ángulos de la base es igual al cuádruplo del ángulo restante, entonces:

$$\beta + \gamma = 4\alpha.$$

Juntando las igualdades tenemos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \& \quad \beta + \gamma = 4\alpha \Rightarrow \alpha + 4\alpha = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{5} \Rightarrow \alpha = 36^\circ.$$

De aquí:

$$\beta + \gamma = 4\alpha \Rightarrow \beta + \gamma = 4(36^\circ) \Rightarrow \beta + \gamma = 144^\circ.$$

Pero, por ser β & γ los ángulos de la base de un triángulo isósceles, $\beta = \gamma$. Luego entonces:

$$\beta + \gamma = 144^\circ \;\&\; \beta = \gamma \Rightarrow 2\beta = 144^\circ \Rightarrow \beta = 72^\circ.$$

Por lo tanto, la medida de uno de los ángulos de la base es:

$$72^\circ = \beta = \gamma.$$

□

Triángulos congruentes y semejantes

Reactivos: véase la página 56

1. La siguiente figura muestra un conjunto de triángulos inscritos en el triángulo isósceles ACE. Los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ son paralelos entre sí.

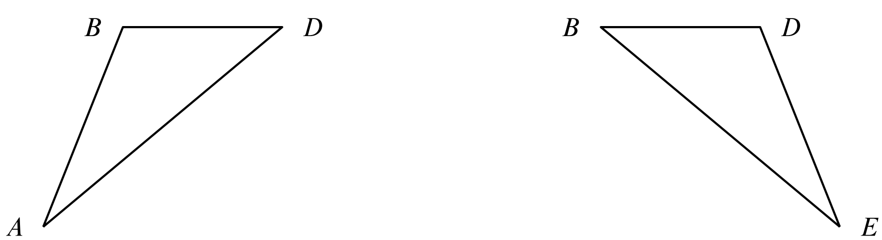
   ¿En cuál de las siguientes opciones los triángulos son congruentes?: ________.

   ▼ La respuesta es C.

   Para determinar la respuesta de este ejercicio, nos podemos basar en el criterio de congruencia de dos triángulos que se refiere a la longitud de los lados de los triángulos:

   > Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo.

   Los triángulos ABD & BDE de la opción C. son congruentes ya que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AD} = \overline{BE}$ y que $\overline{BD}$ es común en ambos triángulos.



□

2. De los siguientes triángulos, ¿cuáles son congruentes? Elige la opción correcta: ________.

   ▼ La respuesta es C.

   En este ejercicio es importante apreciar que, en cuatro de los triángulos mostrados, podemos determinar el valor del ángulo interno faltante. Recuerda que, en cualquier triángulo, la suma de los ángulos internos es igual a 180°.

   Con esta información podemos considerar el siguiente criterio de congruencia:

> Dos triángulos son congruentes si dos de los ángulos internos de uno de ellos tienen la misma medida que dos de los ángulos internos del otro triángulo, y si los lados comprendidos entre estos ángulos tienen la misma longitud.

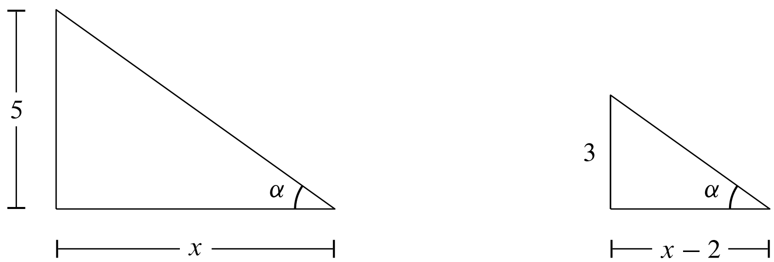
Tomando esto en consideración, los triángulos 1 y 6 son congruentes.

□

3. En la siguiente figura, ¿cuáles son los valores de x y de a? Elige la opción correcta: ______.

▼ La respuesta es C.

En la figura mostrada se aprecian los siguientes dos triángulos rectángulos:



Estos dos triángulos son semejantes ya que el ángulo agudo α de ambos triángulos es el mismo.

Con esta información podemos afirmar que sus catetos son proporcionales, es decir:

$$\frac{x}{x-2} = \frac{5}{3}.$$

De esta ecuación se despeja x de la siguiente manera:

$$\frac{x}{x-2} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = 5(x-2) \;\Rightarrow\; 3x = 5x - 10 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 3x - 5x = -10 \;\Rightarrow\; -2x = -10 \;\Rightarrow\; x = \frac{-10}{-2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 5.$$

Una vez que se ha obtenido el valor de x, calculamos el valor de a. De la figura inicial se observa que:

$$x = a + (x-2).$$

De esta ecuación se despeja a. Esto es:

$$x = a + (x-2) \;\Rightarrow\; x = a + x - 2 \;\Rightarrow\; \Rightarrow\; a = x - x + 2 \;\Rightarrow\; a = 2.$$

Finalmente, en los triángulos rectángulos semejantes mostrados, $x = 5$ & $a = 2$.

□

4. En la siguiente figura, ¿cuál es la medida de la hipotenusa del triángulo ABC?: ______.

▼ La respuesta es A.

El ángulo interno del triángulo ABC en el vértice A es igual al ángulo interno del triángulo ADE en dicho vértice, ya que se trata de ángulos opuestos por el vértice A.

Uno de los criterios sobre la semejanza de dos triángulos rectángulos señala que:

> Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de un triángulo es igual a un ángulo agudo del otro triángulo.

Por ser triángulos semejantes se cumple:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \qquad (*)$$

Observa que la longitud $\overline{AE}$ se puede calcular por el teorema de Pitágoras,

$$(\overline{AE})^2 = (3)^2 + (4)^2 \Rightarrow (\overline{AE})^2 = 25 \Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Lo que pide el problema es la medida del segmento AC. De la expresión (*) se puede despejar y calcular AC.

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{AE}}{\overline{DE}}.$$

Usando los valores conocidos en esta última expresión:

$$\overline{AC} = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{AE}}{\overline{DE}} = \frac{(12)(5)}{4} = 15 \text{ cm}.$$

□

5. Considerar los triángulos rectángulos mostrados a continuación. ¿En cuál de las opciones de respuesta hay triángulos semejantes?: ________ .

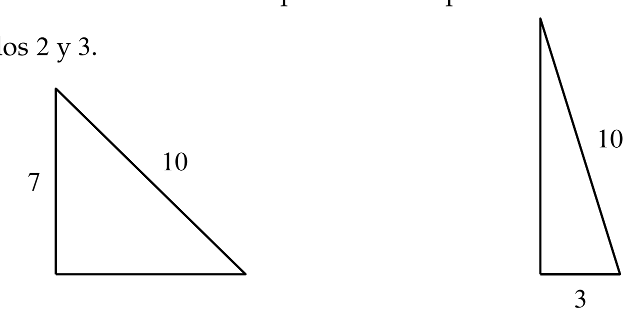
▼ La respuesta es B.

Para resolver este ejercicio, se deben tomar en cuenta los criterios sobre semejanza de triángulos rectángulos. En particular, los que hablan sobre proporciones entre catetos e hipotenusas. Éstos son los siguientes:

- Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus catetos son proporcionales.
- Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus hipotenusas y uno de sus catetos son proporcionales.

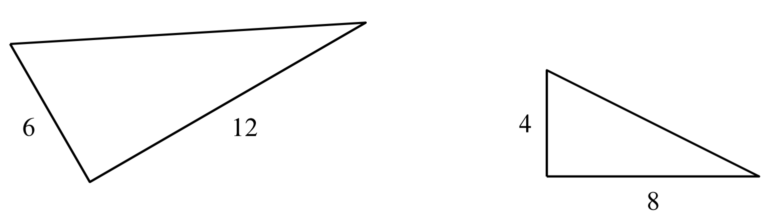
A continuación se analiza cada una de las opciones de respuesta.

Opción A. Triángulos 2 y 3.



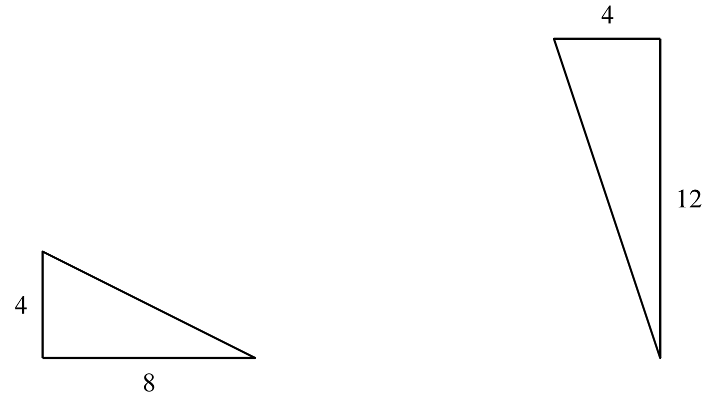
Los triángulos 2 y 3 no son semejantes, ya que $\frac{7}{3} \neq \frac{10}{10}$.

Opción B. Triángulos 1 y 4.



Los triángulos 1 y 4 son semejantes, ya que $\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$.

Opción C. Triángulos 4 y 5.

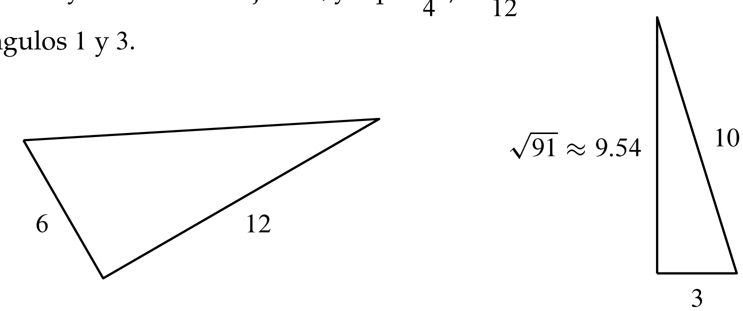


Los triángulos 4 y 5 no son semejantes, ya que $\dfrac{4}{4} \neq \dfrac{8}{12}$.

Opción D. Triángulos 2 y 4.

Los triángulos 2 y 4 no son semejantes, ya que $\dfrac{7}{4} \neq \dfrac{\sqrt{51}}{12}$.

Opción E. Triángulos 1 y 3.



Los triángulos 1 y 3 no son semejantes, ya que $\dfrac{6}{3} \neq \dfrac{12}{\sqrt{91}}$.

□

Teorema de Pitágoras

Reactivos: véase la página 60

1. Considerando el siguiente triángulo rectángulo, aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de x. Elige la opción correcta: ________.

▼ La respuesta es B.

Al aplicar el teorema de Pitágoras, la ecuación que se obtiene es la siguiente:

$$(x + 1)^2 + (3 + x)^2 = (5 + x)^2.$$

Desarrollando los binomios al cuadrado y sumando términos semejantes, se obtiene:

$$\begin{aligned}(x+1)^2+(3+x)^2=(5+x)^2 &\Rightarrow (x^2+2x+1)+(9+6x+x^2)=25+10x+x^2 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow x^2+2x+1+9+6x+x^2=25+10x+x^2 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow x^2+x^2-x^2+2x+6x-10x+1+9-25=0 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow x^2-2x-15=0.\end{aligned}$$

Esta última expresión es una ecuación de segundo grado que se tiene que resolver para encontrar el valor de x del problema original.

Observa que esta ecuación se puede resolver factorizando, esto es:

$$x^2-2x-15=0 \;\Rightarrow\; (x-5)(x+3)=0.$$

Esta última igualdad se cumple cuando

$$x-5=0 \Rightarrow x=5;$$

o bien cuando

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3.$$

De estas dos soluciones, la que resuelve el problema del triángulo rectángulo es $x=5$.

Nota que con la opción $x=-3$ se obtienen catetos de longitudes sin sentido:

$$x+1=-3+1; \quad 3+x=3-3=0.$$

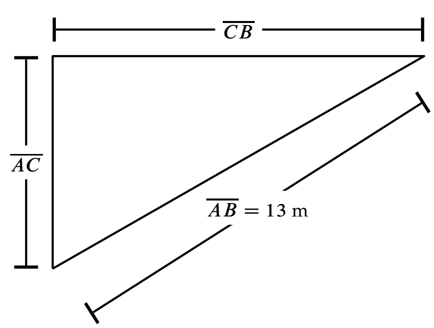
□

2. Una persona recorre 13 m al desplazarse desde el punto A al punto B en línea recta. Otra persona recorre 17 m al desplazarse desde el punto A hasta el punto B, pasando por el punto C. Elige la opción correcta: ______.

¿Cuál es la distancia desde C hasta B?

▼ La respuesta es E.

La siguiente figura muestra las distancias recorridas por las dos personas:



En este problema, la aplicación del teorema de Pitágoras nos proporciona una ecuación que servirá para saber cuál es el valor de la distancia CB, que es la pregunta del problema.

En este caso, el teorema señala:

$$\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=\overline{AB}^2. \tag{*}$$

Por otra parte:

$$\overline{AB}=13; \qquad \overline{AC}+\overline{CB}=17.$$

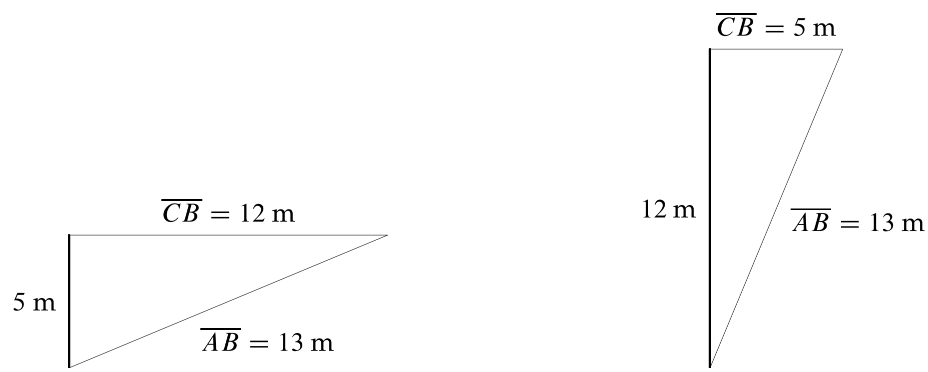
De la ecuación $\overline{AC}+\overline{CB} = 17$ se tiene que $\overline{AC} = 17-\overline{CB}$. Al sustituir por lo anterior en (*), obtenemos una ecuación de segundo grado sólo en términos de $\overline{CB}$, esto es:

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 &\Rightarrow (17-\overline{CB})^2 + \overline{CB}^2 = 13^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (17^2 - 34\overline{CB} + \overline{CB}^2) + \overline{CB}^2 = 13^2 \Rightarrow 17^2 - 34\overline{CB} + \overline{CB}^2 + \overline{CB}^2 = 13^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 17^2 - 13^2 - 34\overline{CB} + 2\overline{CB}^2 = 0 \Rightarrow 2\overline{CB}^2 - 34\overline{CB} + 120 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{CB}^2 - 17\overline{CB} + 60 = 0.\end{aligned}$$

Las soluciones de esta última expresión cuadrática nos permiten resolver el problema. Resolviendo la ecuación por factorización, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\overline{CB}^2 - 17\overline{CB} + 60 = 0 &\Rightarrow (\overline{CB}-12)(\overline{CB}-5) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{CB} - 12 = 0;\ \text{o bien}\ \overline{CB} - 5 = 0 \Rightarrow \overline{CB} = 12;\ \text{o bien}\ \overline{CB} = 5.\end{aligned}$$

Lo anterior quiere decir que el segmento $\overline{CB}$, puede medir 12 m o bien puede medir 5 m. Observa la siguiente figura.



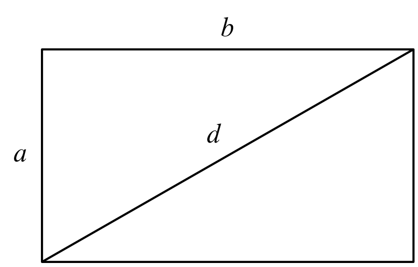
Notamos que los triángulos son congruentes.

□

3. Un terreno rectangular tiene un perímetro que mide 14 m. Si el largo del terreno mide un metro más que su ancho, ¿cuánto mide la diagonal del terreno?: ________.

▼ La respuesta es A.

La siguiente figura muestra el terreno rectangular del problema.



Dado que el terreno tiene un perímetro con una longitud de 14 m:

$$2a + 2b = 14. \qquad (*)$$

También, dado que el largo b del terreno mide un metro más que su ancho a, entonces:

$$b = a + 1. \tag{**}$$

Estas dos expresiones matemáticas conforman un sistema de ecuaciones cuyas soluciones (a & b) se necesitan para, posteriormente, calcular la longitud de la diagonal d del terreno.

Para resolver el sistema, se puede usar (**) en (*) y despejar la incógnita, es decir,

$$2a + 2(a + 1) = 14 \Rightarrow 2a + 2a + 2 = 14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{4} \Rightarrow a = 3.$$

Si el ancho del terreno es $a = 3$ m, entonces el largo es:

$$b = a + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Con esta información del terreno se puede calcular la longitud de la diagonal d aplicando el teorema de Pitágoras

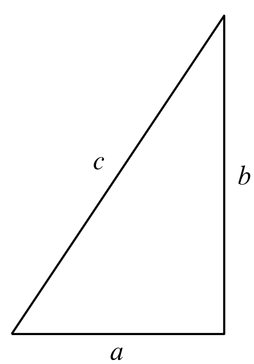
$$a^2 + b^2 = d^2 \Rightarrow (3)^2 + (4)^2 = d^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9 + 16 = d^2 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{d^2} = \sqrt{25} \Rightarrow d = 5.$$

□

4. Un triángulo rectángulo tiene un área de 24 m^2. Si un cateto mide $\frac{4}{3}$ del otro, ¿cuánto mide la hipotenusa del triángulo? : ________ .

▼ La respuesta es B.

Considera la siguiente figura



Si se menciona que el área del triángulo rectángulo es de 24 m^2, entonces se puede establecer la siguiente igualdad:

$$\frac{(a)(b)}{2} = 24. \tag{*}$$

También, si un cateto mide $\frac{4}{3}$ del otro:

$$a = \frac{4}{3}b. \tag{**}$$

Las dos expresiones (*) y (**) conforman un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, que se debe resolver para conocer los valores de a & b.

Para esto, la ecuación (**) se usa en (*) y se despeja la incógnita:

$$\frac{\left(\frac{4}{3}b\right)(b)}{2} = 24 \Rightarrow \frac{4b^2}{3} = 48 \Rightarrow 4b^2 = 144 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2 = \frac{(24)(3)}{2} \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{b^2} = \sqrt{36} \Rightarrow b = 6.$$

Si $b = 6$, entonces:

$$a = \frac{4}{3}b = \frac{4}{3}(6) = 8.$$

Conociendo los valores de los catetos (a & b) del triángulo rectángulo, se puede conocer el valor de la hipotenusa c al aplicar el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (8)^2 + (6)^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 64 + 36 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow \sqrt{c^2} = \sqrt{100} \Rightarrow c = 10.$$

□

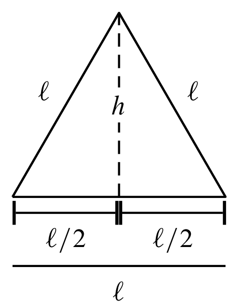
Perímetro y área de polígonos y del círculo

Reactivos: véase la página 65

1. Si el perímetro de un triángulo equilátero mide 18 m, ¿cuál es la longitud de su altura?: ________.

▼ La respuesta es C.

Un triángulo equilátero tiene tres lados de igual longitud ℓ y en él sus alturas coinciden con sus medianas.

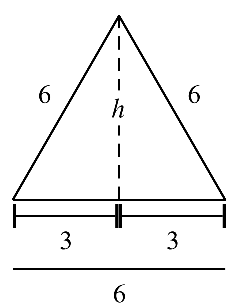


Aquí, h representa la altura del triángulo y baja desde el vértice superior al punto medio de la base.

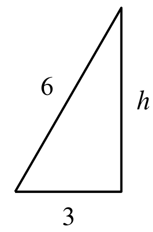
La expresión para calcular el perímetro del triángulo equilátero es:

$$P = 3l.$$

Como se indica que el perímetro mide 18 m, se concluye que cada lado del triángulo equilátero mide 6 m.



En la figura anterior se observan dos triángulos rectángulos inscritos en el triángulo equilátero. Si se aplica el teorema de Pitágoras en uno de éstos triángulos rectángulos, se puede obtener el valor de la altura h. Esto es:



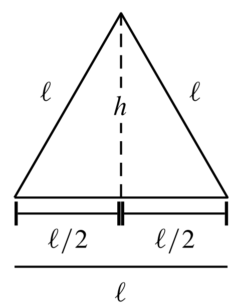
$$3^2 + h^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 6^2 - 3^2 \Rightarrow h = \sqrt{6^2 - 3^2} \Rightarrow h = \sqrt{27} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \sqrt{9 \cdot 3} \Rightarrow h = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow h = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \sqrt{3}\,\text{m}.$$

□

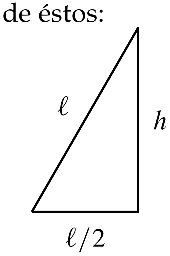
2. Si la altura de un triángulo equilátero mide $4\sqrt{3}$ cm, ¿cuánto mide cada uno de los lados del triángulo?: ________ .

▼ La respuesta es E.

Un triángulo equilátero tiene tres lados ℓ iguales y en él cualquiera de sus alturas es a la vez una mediana.



En la figura anterior se observan dos triángulos rectángulos inscritos en el triángulo equilátero. Si se aplica el teorema de Pitágoras a cualquiera de éstos:



$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}.$$

De esta ecuación se puede obtener el valor del lado ℓ del triángulo, sabiendo que $h = 4\sqrt{3}$.

Para esto sólo se tiene que despejar ℓ:

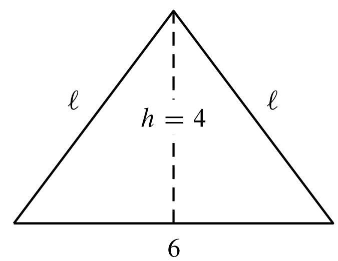
$$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = h^2 \Rightarrow \frac{4\ell^2 - \ell^2}{4} = h^2 \Rightarrow \frac{3\ell^2}{4} = h^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell^2 = \frac{4h^2}{3} \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{4h^2}{3}} \Rightarrow \qquad (\text{Ten en cuenta que } h = 4\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{4(4\sqrt{3})^2}{3}} \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{4 \cdot 16 \cdot 3}{3}} \Rightarrow \ell = \sqrt{4 \cdot 16} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16} \Rightarrow \ell = 8\,\text{cm}.$$

□

3. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 6 m. Si dicho lado es la base del triángulo y su altura mide 4 m, ¿cuánto mide el perímetro del triángulo?: ________.

▼ La respuesta es D.

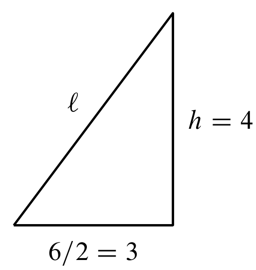
Un triángulo isósceles tiene dos lados con la misma longitud y un lado con longitud diferente, el cual se toma como la base del triángulo. Véase la siguiente figura:



Con esta información, la expresión del perímetro P del triángulo isósceles es la siguiente:

$$P = 2\ell + 6.$$

Para determinar el valor de ℓ, se puede considerar uno de los triángulos rectángulos obtenidos al trazar la altura h desde el vértice superior a la base. Esta altura es también una mediana, por lo cual llega al punto medio de la base.



Al aplicar el teorema de Pitágoras a este triángulo rectángulo, se obtiene directamente el valor de ℓ después de realizar algunos cálculos, es decir,

$$\ell^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow \ell = \sqrt{25} = 5.$$

Si $\ell = 5$, entonces el perímetro P del triángulo isósceles es:

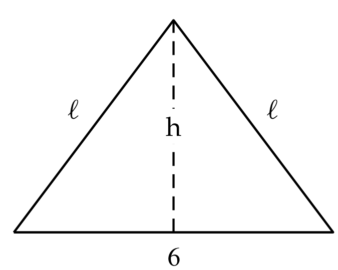
$$P = 2\ell + 6 = 2(5) + 6 = 16 \text{ m}.$$

□

4. La base de un triángulo isósceles mide 6 m y el perímetro 16 m. Si la base es el lado desigual del triángulo, ¿cuánto mide su altura?: ________.

▼ La respuesta es C.

Véase la siguiente figura:



Para determinar el valor de la altura h, se debe encontrar primero el valor de ℓ. Para esto hay que considerar que el perímetro P del triángulo isósceles es:

$$P = 2\ell + 6.$$

Si $P = 16$ m, entonces:

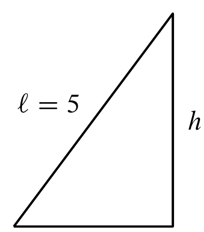
$$16 = 2\ell + 6;$$

de donde se puede despejar ℓ:

$$16 = 2\ell + 6 \Rightarrow 16 - 6 = 2\ell \Rightarrow \ell = \frac{16 - 6}{2} \Rightarrow \ell = 5 \text{ m}.$$

En la figura anterior se observan dos triángulos rectángulos inscritos en el triángulo isósceles. Dichos triángulos son obtenidos al trazar la altura h desde el vértice superior al punto medio de la base, ya que esta altura es a la vez una mediana. Si se aplica el teorema de Pitágoras a uno de éstos, se obtiene una ecuación de la cual se puede despejar la altura h.

Esto es:



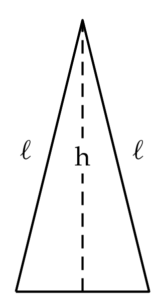
$$\ell^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - 3^2 \Rightarrow h^2 = (5)^2 - 3^2 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = \sqrt{16} \Rightarrow h = 4 \text{ m}.$$

□

5. La base de un triángulo isósceles mide 10 m y cada uno de los lados iguales mide 2 unidades más del doble de la base. ¿Cuánto mide la altura del polígono?: ________ .

▼ La respuesta es A.

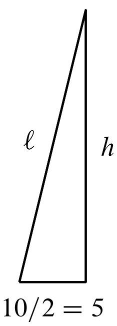
Para resolver este problema, nos será de utilidad la siguiente figura:



El valor de ℓ es 2 unidades más del doble de la base, es decir,

$$\ell = 2(10) + 2 = 22.$$

Con esta información resulta sencillo encontrar el valor de la altura h al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo mostrado a continuación:



$$\ell^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - 5^2 \Rightarrow h^2 = (22)^2 - 25 \Rightarrow h^2 = 484 - 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = 459 \Rightarrow h = \sqrt{459} \Rightarrow h = \sqrt{9 \cdot 51} \Rightarrow h = \sqrt{9} \cdot \sqrt{51} \Rightarrow h = 3 \cdot \sqrt{51}\ \text{m}.$$

□

6. El área de un triángulo escaleno es de $100\ \text{cm}^2$.
¿Cuánto mide la altura del polígono si ésta es la tercera parte de la base?: ________.

▼ La respuesta es E.

El área A de cualquier triángulo, con base b y altura h, está definida como:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

En este problema vemos:

$$A = 100\ \text{cm}^2 = \frac{bh}{2};$$

y además

$$h = \frac{b}{3} \Rightarrow 3h = b.$$

Si en $100 = \dfrac{bh}{2}$ se coloca $3h$ en lugar de b, se obtiene una ecuación de la cual se puede despejar h, es decir,

$$100 = \frac{bh}{2} \Rightarrow 100 = \frac{(3h)h}{2} \Rightarrow 100 = \frac{3h^2}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{(100)(2)}{3} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{(100)(2)}{3}} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \text{cm}.$$

□

7. Si el área de un cuadrado es de $49\ \text{m}^2$, ¿cuánto mide su perímetro?: ________.

▼ La respuesta es C.

El área A de un cuadrado de lado ℓ se define como:

$$A = \ell^2.$$

El problema señala que $A = 49\ \text{m}^2$, por lo que se puede determinar el valor de ℓ, es decir,

$$A = \ell^2 \Rightarrow 49 = \ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{49} \Rightarrow \ell = 7\ \text{m}.$$

Una vez que se ha determinado el valor de ℓ, se puede calcular el perímetro P del cuadrado.

El perímetro P de un cuadrado se define como:

$$P = 4\ell.$$

En este caso, si $\ell = 7$, entonces:

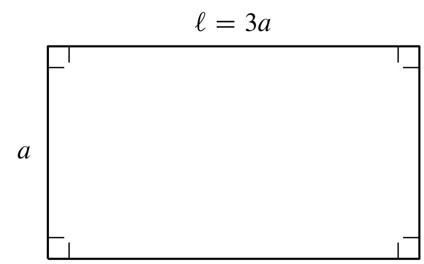
$$P = 4\ell = 4(7) = 28\ \text{m}.$$

□

8. El largo de un rectángulo es el triple de su ancho. Si el área es de 48 m^2, ¿cuál es la medida de su perímetro?: ________.

▼ La respuesta es B.

Para este problema, considerar la siguiente figura:



La figura muestra un rectángulo con su ancho a y su largo ℓ. Además, se señala que el largo es el triple de su ancho, es decir, $\ell = 3a$.

Para un rectángulo de ancho a y de largo ℓ, las fórmulas para calcular el área A y el perímetro P son, respectivamente, las siguientes:

$$A = a \cdot \ell;$$
$$P = 2a + 2l.$$

Como $A = 48$ m^2 y como $\ell = 3a$, entonces:

$$48 = a(3a) \Rightarrow 48 = 3a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{48}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4 \text{ m}.$$

A continuación, sabiendo que $a = 4$ m y que $\ell = 3a = (3)(4) = 12$ m, se puede calcular el perímetro P del rectángulo, que es la pregunta del problema:

$$P = 2a + 2\ell \Rightarrow P = 2(4) + 2(12) \Rightarrow P = 8 + 24 \Rightarrow P = 32 \text{ m}.$$

□

9. El perímetro de un rectángulo mide 50 m y el área 100 m^2. ¿Cuáles son las medidas de sus dimensiones (largo y ancho)?: ________.

▼ La respuesta es E.

Para un rectángulo con ancho a y largo ℓ, el perímetro P y el área A se calculan con las siguientes expresiones:

$$P = 2a + 2\ell \qquad \& \qquad A = a \cdot \ell.$$

Considerando la información del problema:

$$50 = 2a + 2\ell. \tag{*}$$
$$100 = a\ell. \tag{**}$$

Estas dos expresiones representan un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas que debemos resolver para conocer los valores de a, ℓ.

De la ecuación (**) se puede despejar ℓ y usar esto en (*).

$$100 = a \cdot \ell \Rightarrow \ell = \frac{100}{a} \Rightarrow 50 = 2a + 2\ell \Rightarrow 50 = 2a + 2\left(\frac{100}{a}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 50 - 2a = \frac{(2)(100)}{a} \Rightarrow a(50 - 2a) = 200 \Rightarrow 50a - 2a^2 = 200 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 = 2a^2 - 50a + 200.$$

Se ha obtenido una ecuación de segundo grado que debe resolverse:

$$2a^2 - 50a + 200 = 0 \Rightarrow a^2 - 25a + 100 = 0 \Rightarrow (a - 20)(a - 5) = 0 \Rightarrow a = 20 \text{ o bien } a = 5.$$

Los respectivos valores de ℓ son:

$$\ell = \frac{100}{a} = \frac{100}{20} = 5 \quad \text{o bien} \quad \ell = \frac{100}{a} = \frac{100}{5} = 20.$$

En ambos casos, el rectángulo es el mismo.

□

10. El perímetro de un rectángulo mide 66 m. ¿Cuánto mide el ancho del cuadrilátero si el largo es 3 m mayor del cuádruple de su ancho?: ________.

▼ La respuesta es A.

El perímetro P de un rectángulo con ancho a y largo ℓ se define como:

$$P = 2a + 2\ell.$$

En este problema, dado que $P = 66$ m:

$$66 = 2a + 2\ell. \tag{*}$$

Por otra parte se sabe que el largo del rectángulo es 3 m mayor del cuádruple de su ancho, es decir,

$$\ell = 4a + 3. \tag{**}$$

Las ecuaciones (*) y (**) conforman un sistema de ecuaciones; al resolverlo se encuentran los valores de a y de ℓ del rectángulo. En este caso sólo se necesita determinar el ancho a.

Para esto, basta con usar (**) en (*). Esto es:

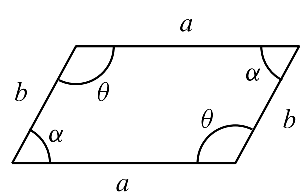
$$66 = 2a + 2\ell \Rightarrow 66 = 2a + 2(4a + 3) \Rightarrow 66 = 2a + 8a + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 66 - 6 = 2a + 8a \Rightarrow 60 = 10a \Rightarrow a = \frac{60}{10} \Rightarrow a = 6 \text{ m}.$$

□

11. ¿Un romboide es un cuadrilátero con (elige la opción correcta)?: ________.

▼ La respuesta es A.

Un romboide es un cuadrilátero, como se muestra en la figura,



con lados iguales y paralelos, dos a dos, y con ángulos iguales, también dos a dos.

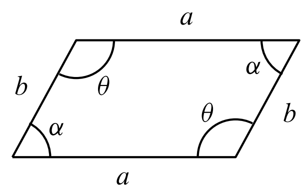
De entre las opciones de respuesta, la opción A es la correcta. Ésta describe parte de las características de un romboide.

□

12. Un lado de un romboide mide 7 cm. Si el perímetro del cuadrilátero mide 22 cm, ¿cuánto vale otro de sus lados?: ________.

▼ La respuesta es A.

Un romboide tiene lados iguales y paralelos dos a dos y ángulos iguales, también dos a dos, tal como se muestra en la figura:



El perímetro P de un romboide está definido como:

$$P = 2a + 2b. \qquad (*)$$

Del problema se sabe que uno de sus lados, por ejemplo a, mide 7 cm, es decir, $a = 7$ cm; $P = 22$ cm. Entonces:

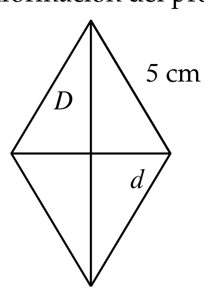
$$P = 2a + 2b \Rightarrow 22 = 2(7) + 2b \Rightarrow 22 - 14 = 2b \Rightarrow b = 4 \text{ cm}.$$

□

13. El lado de un rombo y la diagonal menor miden 5 cm y 6 cm, respectivamente. ¿Cuál es el valor del área?: ________.

▼ La respuesta es A.

En la siguiente figura se muestra la información del problema



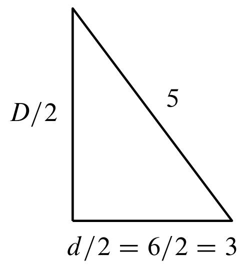
La expresión para calcular el área A de un rombo es

$$A = \frac{D \cdot d}{2}; \qquad (1.1)$$

donde D representa la diagonal mayor y d la diagonal menor.

Además, es importante considerar que las diagonales se bisecan mutuamente.

Si se analiza uno de los triángulos rectángulos inscritos en el rombo, podemos conocer $\frac{D}{2}$ aplicando el teorema de Pitágoras a dicho triángulo. Esto es:



El teorema de Pitágoras establece que:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{D}{2} = \sqrt{16} \Rightarrow \frac{D}{2} = 4.$$

Ahora, con la información con la que se cuenta, se puede obtener el valor del área del rombo:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{D}{2}\right) \cdot d = (4)(6) \Rightarrow A = 24 \text{ cm}^2.$$

□

14. La diagonal mayor de un rombo mide 25 cm. Si el área del cuadrilátero es de 50 cm^2, ¿cuál es el valor de la diagonal menor?: ________.

▼ La respuesta es D.

La expresión para obtener el valor del área A de un rombo es $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$, donde D, d son las diagonales mayor y menor, respectivamente, del rombo.

Dada la información del problema, observa que de la expresión del área se puede despejar d, que es la pregunta del problema, y así calcular su valor.

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow \frac{2A}{D} = d \Rightarrow \frac{2(50)}{25} = d \Rightarrow d = 4 \text{ cm}.$$

□

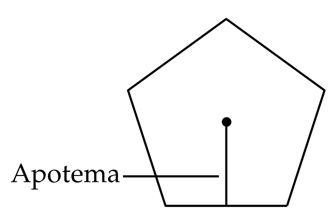
15. El perímetro de un pentágono regular mide 30 cm. Si el área del polígono es de 60 cm^2, ¿cuál es el valor de su apotema?: ________.

▼ La respuesta es D.

Para un pentágono regular, la expresión para calcular el área A es:

$$A = \frac{P \cdot a}{2};$$

donde P es el perímetro y a es la apotema. Recordar que la apotema de un polígono regular es el segmento de recta que va desde el centro del polígono hasta el punto medio del cualquiera de sus lados.



En este ejercicio, se conoce el valor del perímetro P y el área A del pentágono regular, por lo que se puede despejar de la expresión la literal a. Esto es:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} \Rightarrow \frac{2A}{P} = a \Rightarrow a = \frac{(2)(60)}{30} \Rightarrow a = 4 \text{ cm}.$$

□

16. Si el perímetro de un rombo mide 24 m, ¿cuánto mide uno de sus lados?: ________.

▼ La respuesta es C.

Un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados ℓ iguales.

El perímetro P de un rombo se calcula con la fórmula

$$P = 4\ell.$$

En este ejercicio, dado que el perímetro del polígono es de 24 m, se concluye que cada lado mide 6 m. Es decir,

$$P = 4\ell \;\&\; P = 24 \text{ m} \Rightarrow 24 = 4\ell \Rightarrow \frac{24}{4} = \ell \Rightarrow \ell = 6 \text{ m}.$$

□

17. Un pentágono regular se encuentra inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 5 cm. Si el perímetro del polígono es de 30 cm, ¿cuál es el valor de su área?: ________.

▼ La respuesta es A.

La expresión para calcular el área A del pentágono regular es:

$$A = \frac{P \cdot a}{2};$$

donde a representa la apotema y P el perímetro del polígono.

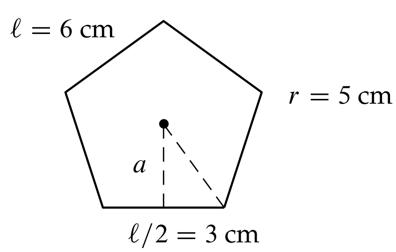
Por otra parte, el perímetro P de un pentágono regular está dado por la fórmula:

$$P = 5 \cdot \ell.$$

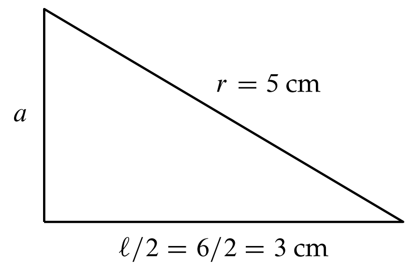
Si el perímetro de un pentágono regular es de 30 cm, entonces cada lado ℓ del polígono tiene una longitud de 6 cm, es decir,

$$\text{si } 30 = 5 \cdot \ell, \text{ entonces } \ell = \frac{30}{5} = 6 \text{ cm}.$$

La siguiente figura muestra la información del problema, así como el hecho de que la apotema biseca a cualquiera de sus lados.



En la figura se observa un triángulo rectángulo inscrito en el pentágono. Si se aplica el teorema de Pitágoras a dicho triángulo se puede obtener el valor de la apotema, para así tener todo lo que se requiere para el cálculo del área del pentágono.



El teorema de Pitágoras afirma que:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = a^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4 \text{ cm}.$$

Teniendo $P = 30$ cm; $a = 4$ cm, el área del polígono regular es:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(30 \text{ cm})(4 \text{ cm})}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

□

18. El perímetro de un hexágono regular mide 36 cm, ¿cuál es el valor de su área?: ________.

▼ La respuesta es A.

La expresión para calcular el área A de un hexágono regular es:

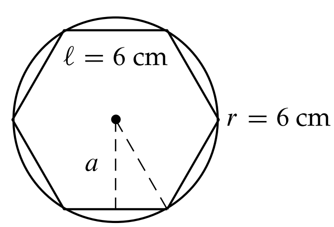
$$A = \frac{P \cdot a}{2};$$

donde P, a son el perímetro y la apotema, respectivamente.

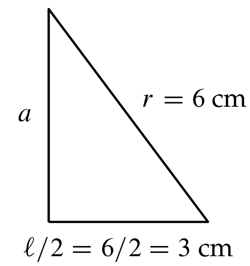
Considerando los datos del problema, para el cálculo del área A se cuenta con el valor del perímetro P y se necesita calcular el valor de la apotema a. Si el perímetro del polígono tiene una longitud de 36 cm, entonces la longitud de cada lado tiene un valor de 6 cm:

$$P = 6l \Rightarrow \frac{P}{6} = l \Rightarrow l = 6 \text{ cm}.$$

En un hexágono regular, el radio de la circunferencia en la que se encuentra inscrito el polígono es igual al lado de éste, es decir:



En la figura anterior se aprecia un triángulo rectángulo. Si se aplica el teorema de Pitágoras a dicho triángulo, se puede encontrar el valor de la apotema. Esto es:



$$r^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow r^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = 6^2 - 3^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = 27 \Rightarrow a = \sqrt{27} \Rightarrow a = \sqrt{9 \cdot 3} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}.$$

Con $P = 36$ cm y con $a = 3\sqrt{3}$ resulta que el área A del hexágono regular es:

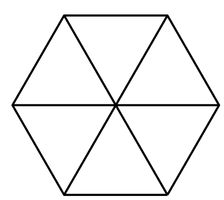
$$A = \frac{a \cdot P}{2} = \frac{(3)(36)\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

□

19. Seis triángulos equiláteros, con un perímetro de 18 cm cada uno, forman un hexágono regular. ¿Cuál es el valor del perímetro de dicho hexágono?: ________.

▼ La respuesta es C.

La siguiente figura muestra seis triángulos equiláteros que conforman un hexágono regular.



Como el perímetro de cada triángulo equilátero es de 18 cm, entonces la longitud l de cada lado es de 6 cm.

El perímetro P de un hexágono regular se calcula con la expresión:

$$P = 6\ell;$$

por lo que el perímetro del polígono regular del ejercicio es:

$$P = 6 \cdot \ell = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}.$$

□

20. Si el perímetro de un círculo mide 14π cm, ¿cuál es el valor del área de dicho círculo?: ________.

▼ La respuesta es B.

La expresión para obtener el valor del área A de un círculo y el perímetro P son, respectivamente:

$$A = \pi r^2 \qquad \& \qquad P = 2\pi r.$$

Ya que se conoce el perímetro del círculo ($P = 14\pi$), se puede calcular el radio de éste, es decir:

$$P = 2\pi r \;\Rightarrow\; 14\pi = 2\pi r \;\Rightarrow\; r = \frac{14\pi}{2\pi} \;\Rightarrow\; r = 7 \text{ cm}.$$

Una vez que se ha calculado el radio del círculo, se puede obtener el valor del área A de éste.

$$A = \pi r^2 \;\Rightarrow\; A = \pi(7)^2 \;\Rightarrow\; A = 49\pi \text{ cm}^2.$$

□

21. El perímetro de una circunferencia en donde se encuentra inscrito un hexágono regular es de 16π cm. ¿Cuál es el perímetro del polígono?: ________.

▼ La respuesta es C.

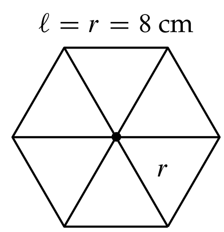
El radio de la circunferencia en donde se encuentra inscrito un hexágono regular es igual a la longitud de cada lado del hexágono. Si se conoce la longitud l de cada lado del polígono, se puede calcular su perímetro.

El perímetro P de una circunferencia es:

$$P = 2\pi r.$$

Si $P = 16\pi$, entonces:

$$16\pi = 2\pi r \;\Rightarrow\; r = \frac{16\pi}{2\pi} \;\Rightarrow\; r = 8 \text{ cm}.$$



El perímetro P de un hexágono regular es $P = 6 \cdot \ell$.

Se concluye que el perímetro del polígono regular es 48 cm:

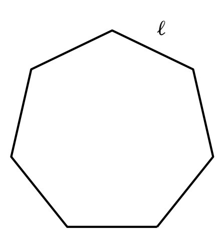
$$P = 6 \cdot \ell = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}.$$

□

22. Si un heptágono regular tiene un perímetro que mide 63 cm, ¿cuál es el valor de cada uno de los lados de dicho polígono?: ________.

▼ La respuesta es A.

Un heptágono regular es un polígono con 7 lados iguales y con ángulos internos iguales.



El perímetro P de un heptángulo regular es:

$$P = 7 \cdot \ell.$$

En este problema, como $P = 63$ cm, entonces ℓ tiene un valor de 9 cm:

$$P = 63 \Rightarrow 63 = 7\ell \Rightarrow \ell = \frac{63}{7} \Rightarrow \ell = 9 \text{ cm}.$$

□

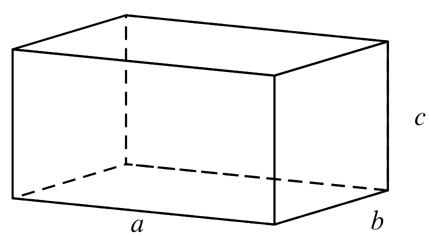
Área y volumen de paralelepípedos, cilindros, conos y esferas

Reactivos: véase la página 72

1. Una caja con tapa tiene una base rectangular cuyo largo es el triple de su ancho y la altura de la caja mide la mitad de lo que mide el largo de la base. Si el volumen de la caja es de 36 cm^3, ¿cuál es el valor del área de todas las caras de la caja?: ________ .

▼ La respuesta es E.

La caja descrita en este problema es un paralelepípedo ortoedro, como el que se muestra en la figura:



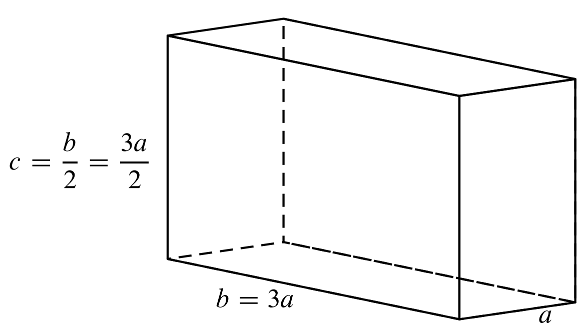
Las expresiones para calcular el volumen V y el área A de la caja son:

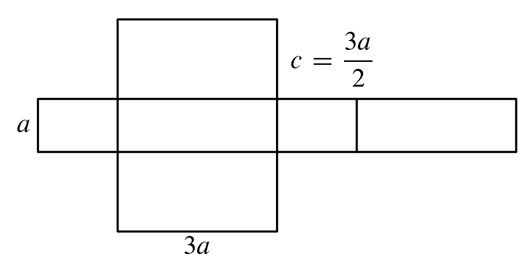
$$V = abc \qquad \& \qquad A = 2ab + 2bc + 2ac.$$

(El área de la caja representa el área de todas las caras de ésta).

Considerando la información del problema:

$$\begin{aligned} V &= 36 \text{ cm}^3; & & \\ b &= 3a; & & \text{(el largo de la base de la caja es el triple de su ancho)} \\ c &= \frac{b}{2} = \frac{3a}{2}. & & \text{(la altura de la caja es la mitad del largo de la base de la caja)} \end{aligned}$$





Observando las figuras anteriores:

$$V = (\text{área de la base})(\text{altura}) = (3a \cdot a)\left(\frac{3a}{2}\right) = \frac{9a^3}{2}.$$

Además:

$$A = 2ab + +2bc + 2ac = 2a(3a) + 2(3a)\left(\frac{3a}{2}\right) + 2(a)\left(\frac{3a}{2}\right) =$$
$$= 6a^2 + 9a^2 + 3a^2 = 18a^2.$$

Ya que $V = 36\ \text{cm}^3$, de la expresión $V = \dfrac{9a^3}{2}$ se puede despejar y calcular a, esto es:

$$V = \frac{9a^3}{2} \Rightarrow a^3 = \frac{2V}{9} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{2V}{9}} = \sqrt[3]{\frac{2(36)}{9}} = \sqrt[3]{8} = 2\ \text{cm}.$$

Por último, puesto que $a = 2$ cm:

$$A = 18a^2 = 18(2)^2 = 72\ \text{cm}^2.$$

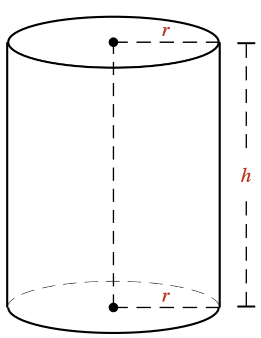
□

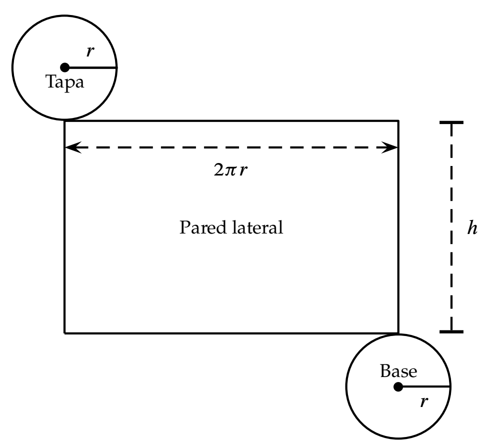
2. La superficie de la pared de un recipiente cilíndrico con base circular es de $10\ \text{m}^2$. ¿Cuál es la expresión del volumen del recipiente en términos de su radio r?: ________.

▼ La respuesta es A.

Para un recipiente cilíndrico con base circular (observar la siguiente figura), la expresión del volumen V y del área A son, respectivamente:

$$V = (\text{área de la base})(\text{altura}) = (\pi r^2)(h) = \pi r^2 h. \qquad (*)$$
$$A = [\text{área de la base y de la tapa}] + [\text{área de la pared lateral}] =$$
$$= [2(\pi r^2)] + [(2\pi r)(h)] = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$





Como $A = 19\ \text{m}^2$. Entonces:

$$10\ \text{m}^2 = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h). \qquad (**)$$

Observa que la expresión del volumen (*) está en términos de r y de h. Para que dicha expresión quede sólo en términos de r, que es la pregunta del problema, se debe sustituir por h.

Si se despeja h de la expresión (**) y posteriormente se utiliza en (*), se obtiene la expresión del volumen del recipiente sólo en términos de r, esto es:

$$10 = 2\pi r(r+h) \Rightarrow \frac{10}{2\pi r} = r+h \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \frac{10}{2\pi r} - r = \frac{5}{\pi r} - r = \frac{5-\pi r^2}{\pi r}. \tag{***}$$

Al usar (***) en (*) se obtiene:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(\frac{5-\pi r^2}{\pi r}\right) = r(5-\pi r^2).$$

□

3. La altura de un cono tiene un valor de 4 m. Si el volumen del cono es de 12π m^3, ¿cuál es el valor de la superficie total del cono?: ________.

▼ La respuesta es C.

Para obtener el valor de la superficie total del cono se necesita utilizar la expresión:

$$A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2+r^2};$$

en la cual, como se puede apreciar, se requiere el valor de r y de h (radio y altura del cono respectivamente). El texto del problema sólo proporciona el valor de h (altura del cono) y el valor del volumen V del cono. Si se consideran la expresión:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3},$$

y los datos del problema ($V = 12\pi$ m^3 y $h = 4$ m), se puede despejar r y calcular su valor, esto es:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow 12\pi = \frac{\pi r^2(4)}{3} \Rightarrow r^2 = \frac{(12)(3)(\pi)}{(\pi)(4)} = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow r = \sqrt{9} = 3 \text{ m}.$$

Con $r = 3$ m y con $h = 4$ m, el valor de la superficie total del cono es:

$$A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi(3)^2 + \pi(3)\sqrt{(4)^2+(3)^2} = \pi(9+15) = 24\pi \text{ m}^2.$$

□

4. Si el volumen de una esfera es de 12 m^3, ¿cuál es el valor del área de su superficie?: ________.

▼ La respuesta es C.

La expresión para el cálculo del área A de la superficie de una esfera es:

$$A = 4\pi r^2;$$

para lo cual se requiere conocer el valor del radio r de la esfera. La expresión para calcular el volumen V de la esfera es:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

El enunciado del problema señala que $V = 12$ m^3; se puede usar este valor en la expresión anterior, despejar r y calcular su valor. Esto es:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow 12\ \text{m}^3 = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \Rightarrow r^3 = \frac{12 \cdot 3}{4\pi} = \frac{9}{\pi} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}\ \text{m}.$$

Con el valor anterior de r se puede calcular el área de la superficie de la esfera de la siguiente manera:

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{9}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 4\pi\frac{9^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}} = 4\pi\cdot\pi^{-\frac{2}{3}}\cdot 9^{\frac{2}{3}} = 4\pi^{(1-\frac{2}{3})}9^{\frac{2}{3}} =$$
$$= 4\pi^{\frac{1}{3}}[(9)^2]^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{81\pi}\ \text{m}^2.$$

□

5. ¿Cuál es la capacidad de un cono cuya base tiene un perímetro de 5π m y su altura mide 6 m?: ________.

▼ La respuesta es A.

La expresión para calcular el volumen V (capacidad) de un cono es la siguiente:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3},$$

en la cual, se aprecia que se requiere el valor del radio r y de la altura h del cono. El texto del problema señala que la altura h del cono es de 6 m y también que el perímetro de la base del cono mide 5π m. Con este último dato se puede obtener el valor del radio r del cono de la siguiente manera:

$$P\text{: perímetro de un círculo} = 2\pi r.$$
$$P = 5\pi \Rightarrow 5\pi = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{5\pi}{2\pi} = \frac{5}{2}\ \text{m}.$$

A continuación, con este último dato y con $h = 6$ m, se puede calcular el valor del volumen del cono.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2(6)}{3} = \frac{\frac{\pi\cdot 25\cdot 6}{4}}{3} = \frac{\pi\cdot 25\cdot 6}{4\cdot 3} = \frac{25}{2}\pi\ \text{m}^3.$$

□

1.4 Trigonometría plana

Medida de ángulos en grados y radianes

Reactivos: véase la página 74

1. Un ángulo mide 135°. Su medida en radianes es: ________.

▼ La respuesta es A.

Partiendo de la igualdad $180° = \pi$ rad, $1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad:

$$135° = 135\left(\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\right) = \frac{135}{180}\pi\ \text{rad} = \frac{3(45)}{4(45)}\pi\ \text{rad} = \frac{3}{4}\pi\ \text{rad}.$$

Esto es,

$$135° = \frac{3}{4}\pi\ \text{rad}.$$

□

2. Un ángulo mide $\dfrac{5}{12}\pi$ radianes. Su medida en grados es: ________.

▼ La respuesta es D.

Partiendo de la igualdad π rad $= 180°$, 1 rad $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$:

$$\frac{5}{12}\pi \text{ rad} = \frac{5\pi}{12}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \left[\frac{5\pi(180)}{12\pi}\right]^{\circ} = \left(\frac{900}{12}\right)^{\circ} = \left[\frac{12(75)}{12}\right]^{\circ} = 75°.$$

Esto es,

$$\frac{5}{12}\pi \text{ rad} = 75°.$$

□

Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Reactivos: véase la página 76

1. En el triángulo rectángulo siguiente, el valor de $\tan\alpha$ es:________.

▼ La respuesta es D.

Primero calculamos el valor de m.

Por el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = m^2 + 8^2.$$

Despejamos m^2:

$$m^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36.$$

Por lo tanto: $m = \sqrt{36} = 6 \;\Rightarrow\; m = 6.$

Finalmente, calculamos el valor de $\tan\alpha$:

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{m}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

□

2. En el triángulo rectángulo siguiente, el valor de $\operatorname{sen}\theta$ es:________.

▼ La respuesta es E.

Primero calculamos el valor de m.

Por el teorema de Pitágoras:

$$m^2 = 6^2 + (\sqrt{13})^2 = 36 + 13 = 49.$$

Por lo tanto: $m = \sqrt{49} \;\Rightarrow\; m = 7.$

Finalmente calculamos el valor de $\operatorname{sen}\theta$:

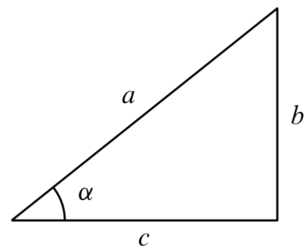
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{6}{m} = \frac{6}{7}.$$

□

3. Si α es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y, además, si $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, ¿cuál es el valor de $\cot\alpha$?: ________.

▼ La respuesta es E.

Si consideramos el siguiente triángulo rectángulo,



podemos ver que $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$.

Pero, debido a que $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, entonces $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$. De aquí: $c = 3, a = 5$.

Calculamos el valor de b mediante el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \ \Rightarrow\ 5^2 = b^2 + 3^2 \ \Rightarrow\ b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16;$$

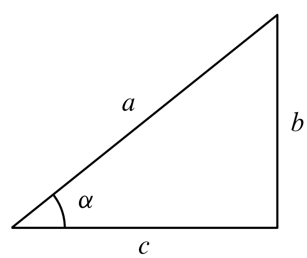
de donde: $b = \sqrt{16} \ \Rightarrow\ b = 4$.

Por lo tanto: $\cot\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{3}{4}$. □

4. Si α es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y, además, $\tan\alpha = 2$, ¿cuál es el valor de $\operatorname{sen}\alpha$?: ________.

▼ La respuesta es A.

Si consideramos el triángulo rectángulo,



podemos ver que $\tan\alpha = \dfrac{b}{c}$.

Y debido a que $\tan\alpha = 2 = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{2}{1}$, entonces $\dfrac{b}{c} = \dfrac{2}{1}$. De aquí $b = 2; c = 1$.

Calculamos el valor de a mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2 \ \Rightarrow\ a^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5;$$

de donde: $a = \sqrt{5}$.

Por lo tanto: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

□

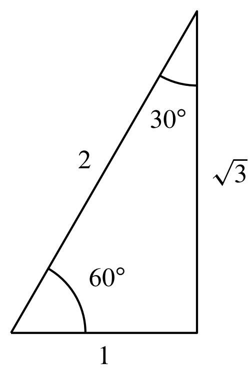
Funciones trigonométricas de ángulos notables (30°, 45° y 60°)

Reactivos: véase la página 78

1. El número $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ corresponde al valor de: ______ .

   ▼ La respuesta es C.

   Considerando el triángulo rectángulo,



   se tiene que:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

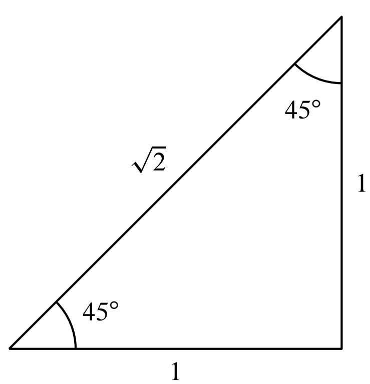
   Además, $60^\circ = 60\left(\dfrac{\pi}{180}\right)$ rad $= \dfrac{\pi}{3}$ rad.

   Por lo tanto: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}$. □

2. El valor de $\tan \dfrac{\pi}{4}$ es: ______ .

   ▼ La respuesta es A.

   Como $45^\circ = 45\left(\dfrac{\pi}{180}\right)$ rad $= \dfrac{\pi}{4}$ rad, consideramos el siguiente triángulo rectángulo:



   De aquí:

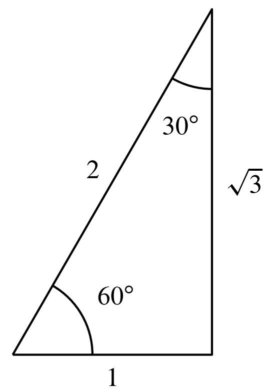
$$\tan 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{1} = 1.$$

   Por lo tanto: $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$. □

3. El número 2 corresponde al valor de: ______ .

▼ La respuesta es A.

Considerando el triángulo rectángulo,



vemos que:

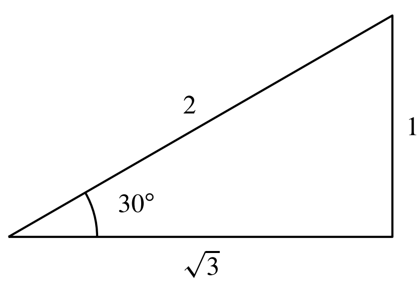
$$\sec 60° = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{2}{1} = 2.$$

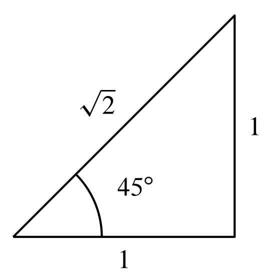
□

4. De las siguientes columnas, la primera contiene funciones trigonométricas de algunos ángulos y en la segunda hay números. Relaciona ambas y elige la opción correspondiente: ______ .

▼ La respuesta es A.

Consideramos los dos triángulos rectángulos siguientes:





De estos triángulos:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}; \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Resultados que nos llevan a relacionar:

1. con c.; 2. con a.; 3. con e.; 4. con b.; 5. con b.

□

Identidades trigonométricas básicas

Reactivos: véase la página 81

1. En cada una de las opciones se tiene una igualdad y solamente una de éstas es verdadera. La opción correcta es: ______ .

▼ La respuesta es D.

De la identidad $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$, $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

De la identidad $\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1$, $\csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Utilizando estas igualdades, se obtiene:

$$\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha};$$

y por otra identidad se sabe que $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$;

Por lo tanto,

$$\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \tan\alpha.$$

□

2. En cada opción se tiene una igualdad y de éstas solamente una es verdadera. La opción correcta es: ______ .

▼ La respuesta es A.

De la identidad $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$, $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

Utilizando esta igualdad se obtiene:

$$\frac{\tan\alpha}{\cot\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\frac{1}{\tan\alpha}} = \frac{\frac{\tan\alpha}{1}}{\frac{1}{\tan\alpha}} = \frac{\tan\alpha \cdot \tan\alpha}{1} = \tan^2\alpha.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\tan\alpha}{\cot\alpha} = (\tan\alpha)^2 = \tan^2\alpha.$$

□

3. En cada opción se tiene una igualdad y solamente una de éstas es verdadera. La opción correcta es: ______ .

▼ La respuesta es D.

De la identidad $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$:

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha;$$

y sacando raíz cuadrada en ambos lados:

$$\sec\alpha = \sqrt{1 + \tan^2\alpha}.$$

Por lo tanto:

$$\sec\alpha = \sqrt{\tan^2\alpha + 1}.$$

□

4. En cada una de las opciones se tiene una igualdad y sólo una de éstas es verdadera. La opción correcta es: ________ .

   ▼ La respuesta es A.

   De la identidad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha;$$

   y sacando raíz cuadrada en ambos lados, se obtiene:

$$\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

□

Resolución de triángulos rectángulos

Reactivos: véase la página 82

1. Calcular el ángulo α en el siguiente triángulo; indicar la opción correcta: ________.

   ▼ La respuesta es C.

   Ya que, $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{5}{8} = 0.655$, entonces α es el arco o ángulo cuyo coseno es 0.625.

   Por lo tanto:

$$\alpha = \arccos(0.625).$$

□

2. Calcular el cateto x del siguiente triángulo. Escribir la opción correcta: ________.

   ▼ La respuesta es C.

   Ya que:

$$\tan 35^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{8};$$

   entonces:

$$8(\tan 35^\circ) = x.$$

   Por lo tanto:

$$x = 8\tan 35^\circ.$$

□

3. Calcular el ángulo α en el siguiente triángulo. Marcar la opción correcta: ________.

   ▼ La respuesta es C.

   Ya que $\tan\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{5}{8} = 0.625.$

   Entonces α es el arco o ángulo cuya tangente es 0.625.

   Por lo tanto:

$$\alpha = \arctan(0.625).$$

□

4. Calcular el lado x del siguiente triángulo e indicar cuál es la opción correcta: ________ .

▼ La respuesta es C.

Ya que $\operatorname{sen} 54^\circ = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{6}{x}$.

Entonces:

$$x(\operatorname{sen} 54^\circ) = 6.$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{6}{\operatorname{sen} 54^\circ}.$$

□

Identidades para la adición de ángulos y sustracción de ángulos

Reactivos: véase la página 84

1. Seleccionar la opción que corresponde al resultado de $\operatorname{sen} 150^\circ + \cos 120^\circ$: ________ .

▼ La respuesta es D.

Aplicamos las identidades para $\operatorname{sen}(\theta + \alpha)$ y $\cos(\theta + \alpha)$ con $\theta = 90^\circ$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 150^\circ &= \operatorname{sen}(90^\circ + 60^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ \cos 60^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \cos 90^\circ = \\
&= (1)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}; \\
\cos 120^\circ &= \cos(90^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \\
&= (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1)\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{sen} 150^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} 150^\circ + \cos 120^\circ = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Esto es, $\operatorname{sen} 150^\circ + \cos 120^\circ = 0$.

□

2. Seleccionar la opción que corresponde al resultado de $\operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4} - \cos \dfrac{3\pi}{4}$: ________ .

▼ La respuesta es A.

Aplicamos las identidades para $\operatorname{sen}(\theta + \alpha)$, $\cos(\theta + \alpha)$ con $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ rad $= 90^\circ$ y con $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ rad $= 45^\circ$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} = \\
&= (1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\
\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \\
&= (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

□

Leyes de los senos y de los cosenos

Reactivos: véase la página 85

1. En el siguiente triángulo, el valor de m es: ________ .

▼ La respuesta es E.

Observa que conocemos las longitudes de dos lados y la medida del ángulo formado por dichos lados. Resulta evidente que debemos aplicar la ley de los cosenos. Aplicando esta ley se tiene que:

$$m^2 = (5)^2 + (10)^2 - 2(5)(10)\cos 60^\circ = 25 + 100 - 100(0.5) = 125 - 50 = 75.$$

Por lo tanto:

$$m = \sqrt{75} = \sqrt{(25)(3)} = \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

□

2. En el siguiente triángulo, la medida del ángulo A es: ________ .

▼ La respuesta es B.

Observa que conocemos las longitudes de dos lados, la medida (45°) del ángulo opuesto a uno de dichos lados (6) y nos piden calcular la medida del ángulo A, que es opuesto al otro lado conocido (8). Resulta evidente que debemos aplicar la ley de los senos:

$$\frac{6}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen}A} \Rightarrow 6(\operatorname{sen}A) = 8(\operatorname{sen}45^\circ) \Rightarrow \operatorname{sen}A = \frac{8}{6}(\operatorname{sen}45^\circ) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto: $A = \operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$.

□

Resolución de triángulos oblicuángulos

Reactivos: véase la página 86

1. En el siguiente triángulo, la medida del ángulo θ es: ________ .

▼ La respuesta es E.

Se conocen las longitudes de los tres lados del triángulo y se desea conocer la medida del ángulo θ, que es opuesto al lado de longitud 10. Por esto, se aplica la ley de los cosenos, la cual permite afirmar que:

$$10^2 = 4^2 + 8^2 - 2(4)(8)\cos\theta \Rightarrow 100 - 16 - 64 = -64\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{20}{-64} = -\frac{5}{16}.$$

Por lo tanto: $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{16}\right)$.

□

2. En el siguiente triángulo, el valor de m es: ________ .

▼ La respuesta es B.

Conocemos las medidas de uno de los lados del triángulo (8) y la de su ángulo opuesto (45°), y deseamos conocer el valor de m que es la longitud de un lado que es opuesto al ángulo θ de medida desconocida. Entonces, debemos conocer primero el valor de θ.

Como $\theta + 75° + 45° = 180°$, entonces $\theta = 60°$.

Ahora aplicamos la ley de los senos.

$$\frac{m}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{8}{\operatorname{sen}45°} \Rightarrow \frac{m}{\operatorname{sen}60°} = \frac{8}{\operatorname{sen}45°} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m = \frac{8(\operatorname{sen}60°)}{\operatorname{sen}45°} = \frac{8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{8\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3}\sqrt{2} = 4\sqrt{6}.$$

Por lo tanto: $m = 4\sqrt{6}$.

□

1.5 Geometría analítica

Distancia entre dos puntos

Reactivos: véase la página 88

1. Calcular la distancia entre los puntos $(1, 5)$ y $(3, 2)$: ________ .

▼ La respuesta es A.

$$d[(1,5),(3,2)] = \sqrt{(1-3)^2+(5-2)^2} = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

□

2. Calcular la distancia entre los puntos $(-2, -5)$ y $(-3, -7)$: ________ .

▼ La respuesta es D.

$$d[(-2,-5),(-3,-7)] = \sqrt{(-3-[-2])^2+(-7-[-5])^2} = \sqrt{(-3+2)^2+(-7+5)^2} =$$
$$= \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

□

3. Calcular la distancia entre los puntos $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: ________ .

▼ La respuesta es B.

$$d[(-\sqrt{2},\sqrt{2}),(\sqrt{3},-\sqrt{3}] = \sqrt{\left(\sqrt{3}-[-\sqrt{2}]\right)^2+\left(-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+\left(-[\sqrt{3}+\sqrt{2}]\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).$$

□

4. Dada la siguiente figura. ¿Para qué valor de a, la longitud del segmento $\overline{AB}$ es igual a la longitud del segmento $\overline{BC}$?: ________.

▼ La respuesta es E.

La distancia entre los puntos $A(-1,0)$ & $B(1,0)$ es:

$$d(A,B) = \sqrt{(1-[-1])^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(1+1)^2} = \sqrt{2^2} = 2.$$

La distancia entre los puntos $B(1,0)$ & $C(0,a)$ es:

$$d(B,C) = \sqrt{(a-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{a^2+1}.$$

Igualando las distancias:

$$\sqrt{a^2+1} = 2 \;\Rightarrow\; a^2+1 = 4 \;\Rightarrow\; a^2 = 4-1 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{3}.$$

□

5. Dada la siguiente figura. Calcular la distancia $\overline{AB}$: ________.

▼ La respuesta es C.

De la figura se tiene que $a > 0$.

$$d(A,B) = \sqrt{(a-0)^2 + (0-a)^2} = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2} = \sqrt{2}\,|\,a\,| = \sqrt{2}a.$$

□

6. Dada la siguiente figura:

Calcular la distancia $\overline{AB}$: ________.

▼ La respuesta es E.

De la figura se tiene que $a < 0$.

$$d(A,B) = \sqrt{(a-0)^2 + (0-a)^2} = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2} = \sqrt{2}\,|\,a\,| = \sqrt{2}(-a) = -\sqrt{2}a.$$

□

División de un segmento en una razón dada. Punto medio

Reactivos: véase la página 92

1. Encontrar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $r = \dfrac{2}{5}$: ________.

▼ La respuesta es C.

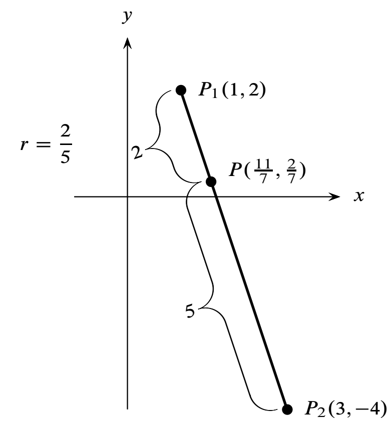
Usamos $*$ de la página 91 y obtenemos:

$$x = \frac{1+\frac{2}{5}\cdot 3}{1+\frac{2}{5}} = \frac{1+\frac{6}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{11}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{11}{7};$$
$$y = \frac{2+\frac{2}{5}\cdot(-4)}{1+\frac{2}{5}} = \frac{2-\frac{8}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{7}.$$

Tenemos entonces que:

$$P\left(\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right).$$

Geométricamente:



□

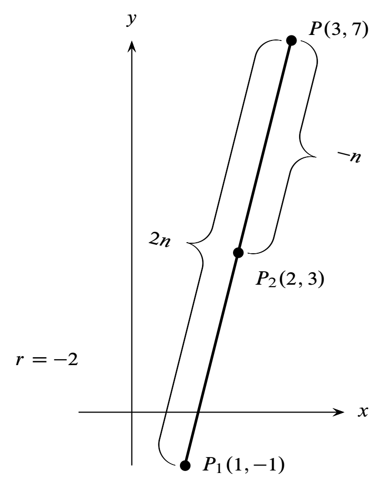
2. Sean los puntos $P_1(1,-1)$ y $P_2(2,3)$. Si el punto $P(3,7)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón r, entonces: ______ .

▼ La respuesta es A.

Usamos $*$ de la pagina 91 y obtenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{r+1} \Rightarrow 3 = \frac{1 + r(2)}{1+r} \Rightarrow 3 + 3r = 1 + 2r \Rightarrow r = -2.$$

Geométricamente vemos lo siguiente:



□

3. Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(-3,5)$. El punto $P(-1,1)$ es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$. Encontrar las coordenadas del punto P_1: ______ .

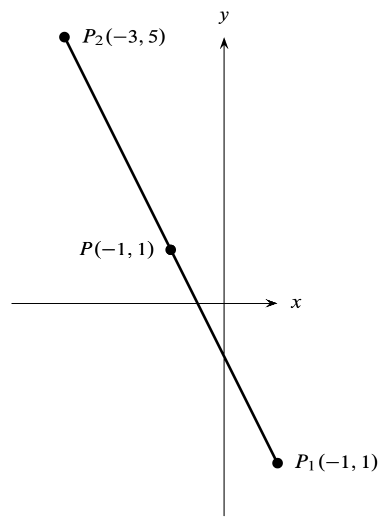
▼ La respuesta es D.

Usamos las coordenadas del punto medio y obtenemos:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow -1 = \frac{x_1 + (-3)}{2} \Rightarrow -2 = x_1 - 3 \Rightarrow x_1 = -2 + 3 \Rightarrow x_1 = 1;$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow 1 = \frac{y_1 + 5}{2} \Rightarrow 2 = y_1 + 5 \Rightarrow y_1 = 2 - 5 \Rightarrow y_1 = -3.$$

Por lo tanto: $P_1(1,-3)$.

Geométricamente vemos que:



□

4. Sean los puntos $P_1(-2,3)$ y $P_2(x_2,y_2)$. El punto $P(-12,5)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $r=-\dfrac{2}{3}$. Encontrar las coordenadas del punto P_2: ________.

▼ La respuesta es D.

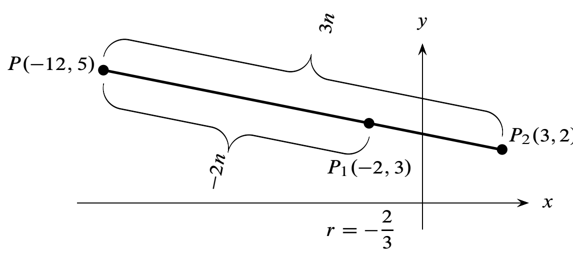
Usamos (*) de la página 91 y obtenemos:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{r+1}\ \Rightarrow\ -12=\frac{-2-\frac{2}{3}x_2}{-\frac{2}{3}+1}=\frac{-2-\frac{2}{3}x_2}{\frac{1}{3}}\ \Rightarrow\ -4=-2-\tfrac{2}{3}x_2\ \Rightarrow\ -2=-\tfrac{2}{3}x_2\ \Rightarrow\ x_2=3;$$
$$y=\frac{y_1+ry_2}{r+1}\ \Rightarrow\ 5=\frac{3-\frac{2}{3}y_2}{\frac{1}{3}}\ \Rightarrow\ \frac{5}{3}=3-\frac{2}{3}y_2\ \Rightarrow\ \frac{5}{3}-3=-\frac{2}{3}y_2\ \Rightarrow\ -\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}y_2\ \Rightarrow\ y_2=2.$$

Por lo tanto:

$$P_2(3,2).$$

Geométricamente vemos que:



□

Ángulo de inclinación y pendiente de una recta

Reactivos: véase la página 94

1. La pendiente m de la recta que pasa por los puntos $P_1(1,-1)$, $P_2(-1,3)$ es: ________.

▼ La respuesta es B.

$$m=\frac{3-(-1)}{-1-1}=\frac{3+1}{-2}=-2.$$

□

2. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(3,-2)$, $P_2(-1,y_2)$ es $m=-3$. Entonces: ______.

▼ La respuesta es D.

$$m=\frac{y_2-(-2)}{-1-3} \Rightarrow \frac{y_2+2}{-4}=-3 \Rightarrow y_2+2=12 \Rightarrow y_2=10.$$

□

3. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1,3)$, $P_2(1,2)$ es $m=2$. Entonces: ______.

▼ La respuesta es C.

$$\frac{2-3}{1-x_1}=2 \Rightarrow \frac{-1}{1-x_1}=2 \Rightarrow -1=2-2x_1 \Rightarrow 2x_1=3 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}.$$

□

4. ¿Cuál es el ángulo de inclinación θ de la recta que pasa por los puntos $P_1(1,0)$, $P_2(2,\sqrt{3})$?: ______.

▼ La respuesta es C.

$$m=\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \arctan\sqrt{3} \Rightarrow \theta=60^\circ.$$

□

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Reactivos: véase la página 95

1. Encontrar b de tal manera que las rectas sean paralelas: ______.

▼ La respuesta es D.

Primero calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0,4)$ & $(3,0)$:

$$m_1=\frac{0-4}{3-0}=-\frac{4}{3}.$$

Ahora calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0,b)$ & $(4,0)$:

$$m_2=\frac{0-b}{4-0}=-\frac{b}{4}.$$

Igualamos ambas pendientes, ya que queremos que las rectas sean paralelas:

$$m_1=m_2 \Rightarrow -\frac{4}{3}=-\frac{b}{4} \Rightarrow b=\frac{16}{3}.$$

□

2. Encontrar a de tal manera que las rectas sean perpendiculares: ______.

▼ La respuesta es A.

Primero calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0,4)$ & $(-3,0)$:

$$m_1=\frac{0-4}{-3-0}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}.$$

Ahora calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0,3)$ & $(a,0)$:

$$m_2=\frac{0-3}{a-0}=\frac{-3}{a}=-\frac{3}{a}.$$

Usamos la condición (**) de la página 95 para que las rectas sean perpendiculares:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{a}\right) = -1 \;\Rightarrow\; -\frac{4}{a} = -1 \;\Rightarrow\; a = 4.$$

□

3. Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $P_1(1, -2)$, $P_2(-3, 1)$.
   Sea L_2 la recta que pasa por los puntos $A(0, 2)$, $B(1, b)$.
   ¿Para qué valor de b las rectas L_1, L_2 son paralelas?: ________.

   ▼ La respuesta es C.

   Primero calculamos la pendiente m_1 de la recta L_1 que pasa por los puntos $P_1(1, -2)$ & $P_2(-3, 1)$:

$$m_1 = \frac{1-(-2)}{-3-1} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

   Ahora calculamos la pendiente m_2 de la recta L_2 que pasa por los puntos $A(0, 2)$ & $B(1, b)$:

$$m_2 = \frac{b-2}{1-0} = b - 2.$$

   Las rectas L_1 & L_2 son paralelas si tienen la misma pendiente:

$$m_1 = m_2 \;\Rightarrow\; -\frac{3}{4} = b - 2 \;\Rightarrow\; b = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}.$$

□

4. Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $P_1(2, -3)$, $P_2(5, 2)$.
   Sea L_2 la recta que pasa por los puntos $A(3, 0)$, $B(a, 1)$.
   ¿Para qué valor de a las rectas L_1, L_2 son perpendiculares?: ________.

   ▼ La respuesta es E.

   Primero calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(2, -3)$ & $P_2(5, 2)$:

$$m_1 = \frac{2-(-3)}{5-2} = \frac{5}{3}.$$

   Ahora calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3, 0)$ & $B(a, 1)$:

$$m_2 = \frac{1-0}{a-3} = \frac{1}{a-3}.$$

   Usamos la condición (**) de la página 95 para que las rectas sean perpendiculares:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{5}{3}\right)\frac{1}{a-3} = -1 \;\Rightarrow\; \frac{5}{3} = -a + 3 \;\Rightarrow\; a = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

□

Ecuaciones de la recta en todas sus formas

Reactivos: véase la página 99

1. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, 5)$ es: ________.

   ▼ La respuesta es E.

Usando (α) de la página 97, calculamos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{5-3}{2-(-1)} = \frac{2}{3}.$$

Usamos ahora (δ) de la página 98, con $m = \dfrac{2}{3}$ y el punto $A(-1, 3)$, para calcular la ecuación de la recta:

$$y - 3 = \frac{2}{3}(x+1) \;\Rightarrow\; 3y - 9 = 2x + 2 \;\Rightarrow\; 2x - 3y + 11 = 0,$$

que es la ecuación de la recta en su forma general.

□

2. La ordenada al origen b y la abscisa al origen a de la recta $3x - 9y + 7 = 0$ son: ______.

▼ La respuesta es B.

Convertimos la ecuación original a la forma $y = mx + b$:

$$3x - 9y + 7 = 0 \;\Rightarrow\; 9y = 3x + 7 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{9}.$$

Si $x = 0$, obtenemos la ordenada al origen $y = b$:

$$y = \frac{1}{3}(0) + \frac{7}{9} \;\Rightarrow\; b = \frac{7}{9}.$$

Si $y = 0$, obtenemos la abscisa al origen $x = a$:

$$0 = \frac{1}{3}a + \frac{7}{9} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3}a = \frac{7}{9} \;\Rightarrow\; a = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}.$$

□

3. La ecuación de la recta $7x - 2y - 3 = 0$ en su forma simétrica es: ______.

▼ La respuesta es E.

La ecuación de la recta es:

$$7x - 2y - 3 = 0.$$

En esta ecuación, si usamos $x = 0$, obtenemos el valor de la ordenada al origen $y = b$:

$$7(0) - 2b - 3 = 0 \;\Rightarrow\; -2b = 3 \;\Rightarrow\; b = -\frac{3}{2}.$$

Si ahora usamos $y = 0$, obtemos la abscisa al origen $x = a$:

$$7a - 2(0) - 3 = 0 \;\Rightarrow\; 7a = 3 \;\Rightarrow\; a = \frac{3}{7}.$$

Utilizamos estos valores en (η) de la página 99 y obtenemos:

$$\frac{x}{\frac{3}{7}} + \frac{y}{-\frac{3}{2}} = 1.$$

Que es la ecuación simétrica de esta recta.

□

4. La ordenada al origen b, de la recta que pasa por el punto $P(-1,3)$ con pendiente $m = -3$ es: ________.

▼ La respuesta es E.

Usamos la ecuación (δ) de la página 98 y obtenemos:

$$y - 3 = -3(x+1) \Rightarrow y - 3 = -3x - 3 \Rightarrow y = -3x.$$

Cuando $x = 0$, se obtiene la ordenada en el origen $y = b$:

$$b = -3 \cdot 0 \Rightarrow b = 0.$$

□

5. La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1,3)$ paralela a la recta $-3x+2y+1=0$ es: ________.

▼ La respuesta es A.

Pasamos de la forma general de la recta a la forma $y = mx + b$:

$$-3x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Usamos (ϵ) de la página 99 y obtenemos que la pendiente de esta recta es $m = \frac{3}{2}$. La recta que pasa por el punto $P(-1,3)$ tiene la misma pendiente, ya que son rectas paralelas. Usando ahora (δ) de la página 98, obtenemos:

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x+1) \Rightarrow 2y - 6 = 3x + 3 \Rightarrow 3x - 2y + 9 = 0.$$

Ésta es la ecuación de la recta solicitada.

□

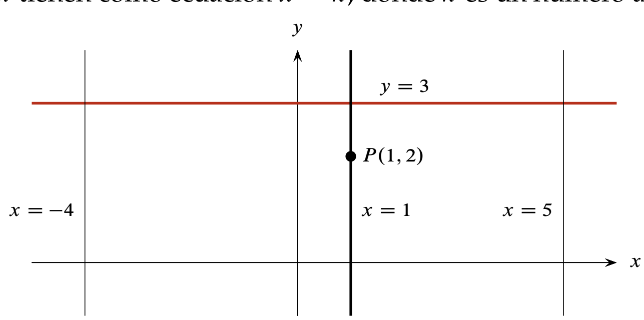
6. La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,2)$ y es perpendicular a la recta $y = 3$ es: ________.

▼ La respuesta es B.

La ecuación la podemos escribir:

$$y = 3 \Rightarrow y = 0 \cdot x + 3,$$

ésta es la ecuación de una recta con pendiente $m = 0$ y ordenada al origen $b = 3$. Es una recta paralela al eje x. La pendiente de una recta perpendicular a esta recta no está definida. Las rectas perpendiculares al eje x tienen como ecuación $x = k$, donde k es un número arbitrario.



Por lo anterior, la ecuación de la recta que es perpendicular al eje x que pasa por el punto $P(1,2)$ es:

$$x = 1.$$

□

Intersección de rectas

Reactivos: véase la página 101

1. El punto de intersección $P(x_1, y_1)$ de las rectas $x - 3y + 3 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$ es: ______.

▼ La respuesta es D.

Reacomodando las ecuaciones, tenemos el sistema que queremos resolver:

$$x - 3y = -3;$$
$$2x + 3y = 5.$$

Si sumamos ambas ecuaciones, se obtiene:

$$3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Despejamos y de la primera ecuación; después usamos el valor de x que acabamos de hallar.

$$-3y = -3 - x \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{3}x \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}.$$

El punto de intersección es:

$$P\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right).$$

□

2. Sea L_1 la recta que pasa por el punto $(1, -3)$, con pendiente $m = -1$. Sea L_2 la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(3, 0)$. La intersección $P(x_1, y_1)$ de ambas rectas es: ______.

▼ La respuesta es D.

Calculamos la ecuación de la recta L_1:

$$\frac{y + 3}{x - 1} = -1 \Rightarrow y + 3 = -x + 1 \Rightarrow x + y = -2.$$

Ahora calculamos la ecuación de la recta L_2:

$$\frac{y - 0}{x - 3} = \frac{0 - 1}{3 - 1} \Rightarrow \frac{y}{x - 3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3y = -x + 3 \Rightarrow x + 3y = 3.$$

Resolvemos el sistema:

$$x + y = -2;$$
$$x + 3y = 3.$$

Restando la primera ecuación de la segunda:

$$2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}.$$

Despejamos x de la primera ecuación; después usamos el valor de y que acabamos de encontrar:

$$x = -2 - y \Rightarrow x = -2 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}.$$

El punto de intersección es:

$$P\left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

□

3. Sea L_1 la recta $3x - 2y + 7 = 0$. Sea L_2 la recta que pasa por el punto $P(-7, 3)$, paralela al eje x. La intersección $P(x, y)$ de ambas rectas es: ________ .

▼ La respuesta es C.

La ecuación de la recta L_2 es $y = 3$. Despejamos x de la ecuación de la recta L_1 y después usamos el valor de y.

$$3x - 2y + 7 = 0 \;\Rightarrow\; 3x = -7 + 2y \;\Rightarrow\; x = -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}y \;\Rightarrow\; x = -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}(3) \;\Rightarrow\; x = -\frac{7}{3} + 2 = -\frac{1}{3}.$$

El punto de intersección es:

$$P\left(-\frac{1}{3}, 3\right).$$

□

4. Sea L_1 la recta $-2x + 5y - 1 = 0$. Sea L_2 la recta que pasa por el punto $P(-7, 3)$, paralela al eje y. La intersección $P(x, y)$ de ambas rectas es: ________ .

▼ La respuesta es D.

La ecuación de la recta L_2 es $x = -7$. Despejamos y de la ecuación de la recta L_1 y después usamos el valor de x:

$$-2x + 5y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}(-7) = \frac{1}{5} - \frac{14}{5} = -\frac{13}{5}.$$

El punto de intersección es:

$$P\left(-7, -\frac{13}{5}\right).$$

□

5. La ecuación de la recta que pasa por la intersección de la rectas $x - y + 4 = 0$ & $2x + y + 5 = 0$, con pendiente $m = -\frac{1}{2}$, es: ________ .

▼ La respuesta es B.

Primero determinamos el punto de intersección de la rectas. Con las dos ecuaciones de las rectas formamos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x - y &= -4; \\ 2x + y &= -5. \end{aligned}$$

Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos:

$$3x = -9 \;\Rightarrow\; x = -3.$$

Despejamos y de la primera ecuación y usamos el valor de x:

$$y = x + 4 \;\Rightarrow\; y = -3 + 4 = 1.$$

Por lo tanto, el punto de intersección de las rectas es $(-3, 1)$. Ahora obtenemos la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, 1)$, con pendiente $m = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{y - 1}{x + 3} = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 3) \;\Rightarrow\; 2y - 2 = -x - 3 \;\Rightarrow\; x + 2y + 1 = 0.$$

□

6. Sea L_1 la recta que pasa por el origen, con pendiente $m = -3$. Sea L_2 la recta $7x + 3y - 1 = 0$. La intersección $P(x, y)$ de ambas rectas es: ________.

▼ La respuesta es A.

La ecuación de la recta L_1 es:

$$y = -3x.$$

Escribiendo las ecuaciones de ambas rectas como un sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$3x + y = 0;$$
$$7x + 3y = 1.$$

Multiplicamos la primera ecuación por -3:

$$-9x - 3y = 0.$$

Sumamos esta ecuación a la segunda ecuación y resulta:

$$\begin{array}{r} -9x - 3y = 0 \\ 7x + 3y = 1 \\ \hline -2x = 1 \end{array} \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Usamos este valor en la primera ecuación:

$$y = -3x \Rightarrow y = -3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

El punto de intersección es:

$$P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

□

Ecuación y elementos principales de la circunferencia

Reactivos: véase la página 103

1. La ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(1, -1)$ y radio $r = 3$ es: ________.

▼ La respuesta es A.

Aplicando la fórmula general de la circunferencia $*$ y un poco de álgebra, obtenemos:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0.$$

□

2. El radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$ es: ________.

▼ La respuesta es A.

Completando cuadrados, obtenemos:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 + 4y + 4 - 4) - 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 3^2.$$

Vemos que el radio de la circunferencia es $r = 3$.

□

3. Los puntos $A(-2,5)$ y $B(6,-3)$ son los extremos de un diamétro de una circunferencia. La ecuación de dicha circunferencia es: ________.

▼ La respuesta es B.

El centro $C(h,k)$ de una circunferencia es el punto medio de los extremos de un diámetro. Por lo tanto:

$$C(h,k) = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (2,1).$$

Para conocer el radio de la circunferencia, calculamos la distancia entre el centro y uno de los puntos proporcionados, digamos $A(-2,5)$:

$$r = \sqrt{(2+2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{2(16)} = \sqrt{32}.$$

Usando este resultado en (*) de la página 102, obtenemos:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 32 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 32 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 27 = 0.$$

□

4. La ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(-1,3)$ y con centro $C(2,-1)$ es: ________.

▼ La respuesta es C.

Para conocer el radio de la circunferencia, calculamos la distancia entre el centro y el punto proporcionado:

$$r = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Como el centro es $C(2,-1)$, usando este resultado en (*) de la página 102, obtenemos:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 25 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

□

5. La ecuación de la circunferencia de radio $r = 2$, que es concéntrica a $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 12 = 0$, es: ________.

▼ La respuesta es C.

Calculamos el centro de la circunferencia proporcionada, completando cuadrados:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 - 6y + 9 - 9) - 12 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-3) = 2 - 9 = 12 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 22.$$

Lo anterior nos proporciona el centro $C(1,3)$ de la circunferencia deseada. Se desea que el radio de esta circunferencias sea $r = 2$. Por lo tanto, su ecuación es:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0.$$

La última ecuación es la solicitada.

□

6. El valor de A que permite que la circunferencia $x^2 + y^2 + Ax + 2y = 0$ tenga radio $r = 4$ es: ________.

▼ La respuesta es A.

Completamos cuadrados en la ecuación proporcionada

$$x^2 + y^2 + Ax + 2y = 0 \Rightarrow x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + (y+1)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + 1.$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación $*$ de la página 102, vemos que:

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + 1 = r^2 \Rightarrow \left(\frac{A}{2}\right)^2 + 1 = 4^2 \Rightarrow \frac{A^2}{4} = 15 \Rightarrow A^2 = 60 \Rightarrow A = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}.$$

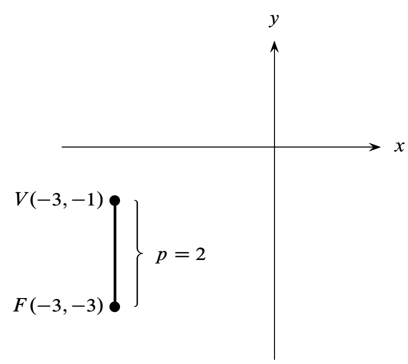
□

Ecuación y elementos principales de la parábola

Reactivos: véase la página 106

1. La ecuación de la parábola con vértice $V(-3,-1)$ y foco $F(-3,-3)$ es: ______.

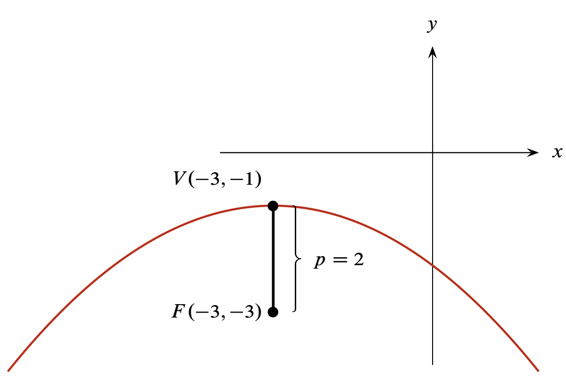
▼ La respuesta es A.



Por la colocación del vértice y el foco vemos que la parábola se abre hacia abajo; además $p = 2$, por lo tanto, su ecuación es:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k) \Rightarrow (x+3)^2 = -4\cdot 2\cdot(y+1) \Rightarrow x^2+6x+9 = -8y-8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+6x+8y+17 = 0.$$

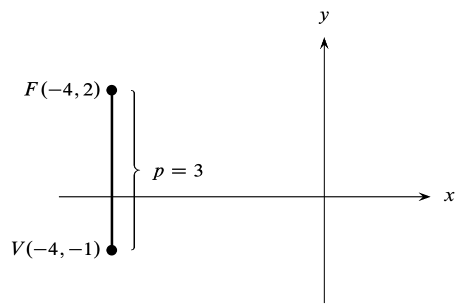
La gráfica de la parábola es:



□

2. La ecuación de la parábola con vértice $V(-4,-1)$ y foco $F(-4,2)$ es: ______.

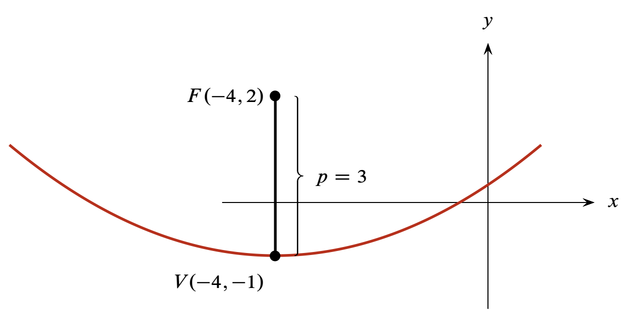
▼ La respuesta es E.



Por la colocación del vértice y el foco vemos que la parábola se abre hacia arriba; además $p = 3$, por lo tanto, su ecuación es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \Rightarrow (x+4)^2 = 4\cdot 3\cdot (y+1) \Rightarrow x^2+8x+16 = 12y+12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+8x-12y+4 = 0.$$

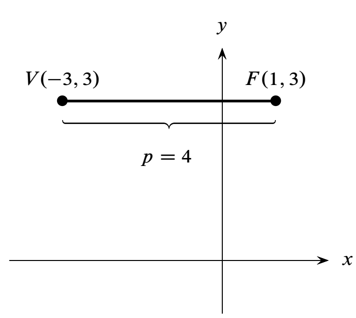
La gráfica de la parábola es:



□

3. La ecuación de la parábola con vértice $V(-3,3)$ y foco $F(1,3)$ es: ________.

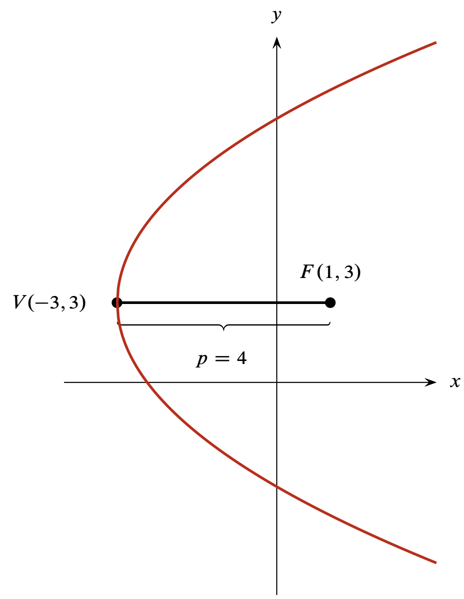
▼ La respuesta es D.



Por la colocación del vértice y el foco vemos que la parábola se abre hacia la derecha; además $p = 4$, por lo tanto, su ecuación es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \Rightarrow (y-3)^2 = 4\cdot 4\cdot (x+3) \Rightarrow y^2-6y+9 = 16x+48 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2-6y-16x-39 = 0.$$

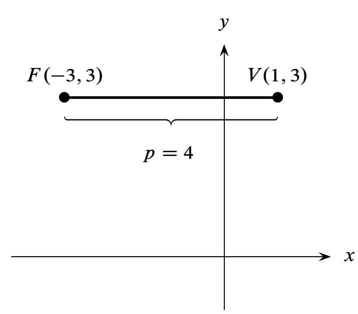
La gráfica de la parábola es:



□

4. La ecuación de la parábola con vértice $V(1,3)$ y foco $F(-3,3)$ es: ________.

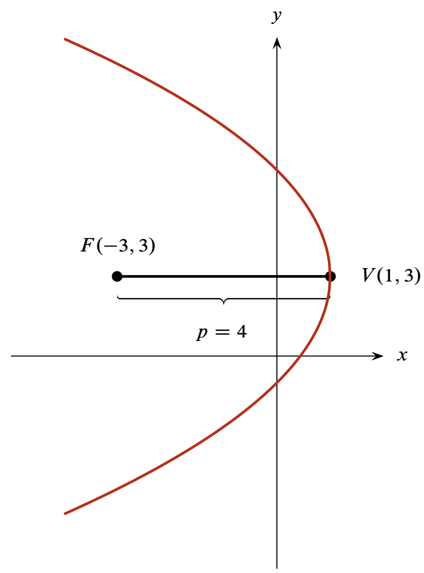
▼ La respuesta es A.



Por la colocación del vértice y el foco vemos que la parábola se abre hacia la izquierda; además $p = 4$, por lo tanto, su ecuación es:

$$(y-k)^2 = -4p(x-h) \Rightarrow (y-3)^2 = -4\cdot 4\cdot (x-1) \Rightarrow y^2-6y+9 = -16x+16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2-6y+16x-7=0.$$

La gráfica de la parábola es:



□

5. Sea la parábola $y^2 - 4y + 8x - 20 = 0$. La ecuación de su directriz es: ________.

▼ La respuesta es A.

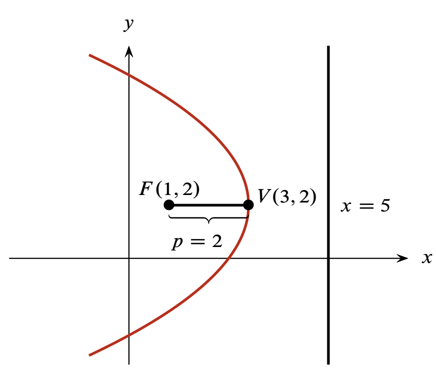
Completamos cuadrados:

$$y^2 - 4y + 8x - 20 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = -8x + 20 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 - 4 = -8x + 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y-2)^2 = -8x + 24 \Rightarrow (y-2)^2 = -8(x-3).$$

Esta última ecuación nos dice que el vértice es el punto $V(3,2)$; la parábola se abre hacia la izquierda y se cumple lo siguiente:

$$-4p = -8 \Rightarrow p = 2,$$

por lo tanto, el foco es $F(3-2,2) = F(1,2)$. Con toda esta información se concluye que la directriz es la recta vertical $x = 3 + 2 = 5$.



□

6. Sea la parábola $x^2 + 6x + 8y + 25 = 0$. Las coordenadas de su foco $F(x,y)$ son: ________.

▼ La respuesta es E.

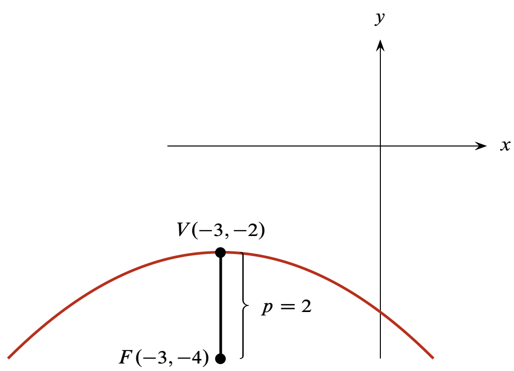
Completamos cuadrados:

$$x^2 + 6x + 8y + 25 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 = -8y - 25 \Rightarrow (x+3)^2 = -8y - 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+3)^2 = -8(y+2).$$

Esta última ecuación nos dice que el vértice es el punto $V(-3,-2)$; la parábola se abre hacia abajo y se cumple lo siguiente:

$$-4p = -8 \Rightarrow p = 2,$$

por lo tanto, el foco es $F(-3,-4)$. La gráfica de la parábola es:



□

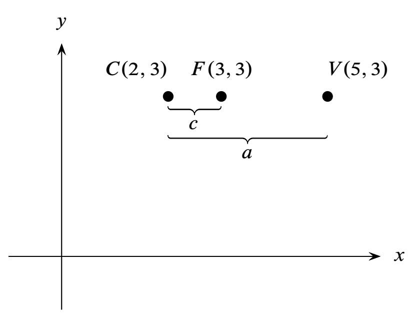
Ecuación y elementos principales de la elipse

Reactivos: véase la página 109

1. Sea la elipse con centro $C(2,3)$; uno de sus focos es $F(3,3)$ y uno de los vértices del eje mayor es $V(5,3)$. La ecuación de la elipse es: ________.

▼ La respuesta es A.

Dibujamos en el plano los puntos proporcionados:



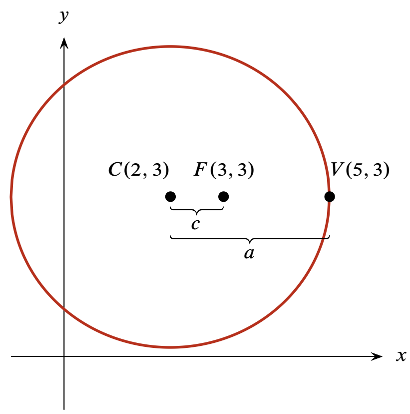
Vemos que:

- $\overline{CF} = c = 1$.
- $\overline{CV} = a = 3$.
- $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8}$.
- El eje mayor de la elipse es paralelo al eje x.

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{8} = 1.$$

Y su gráfica es:

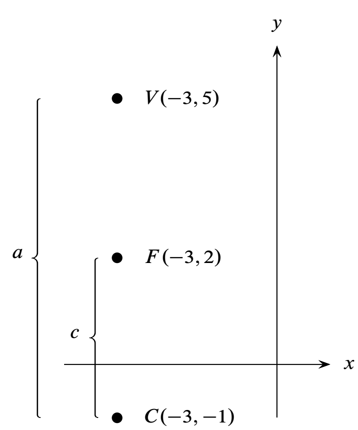


□

2. Sea la elipse con centro $C(-3,-1)$; uno de sus focos es $F(-3,2)$ y uno de los vértices del eje mayor es $V(-3,5)$. La ecuación de la elipse es: ________.

▼ La respuesta es B.

Dibujamos en el plano los puntos proporcionados:



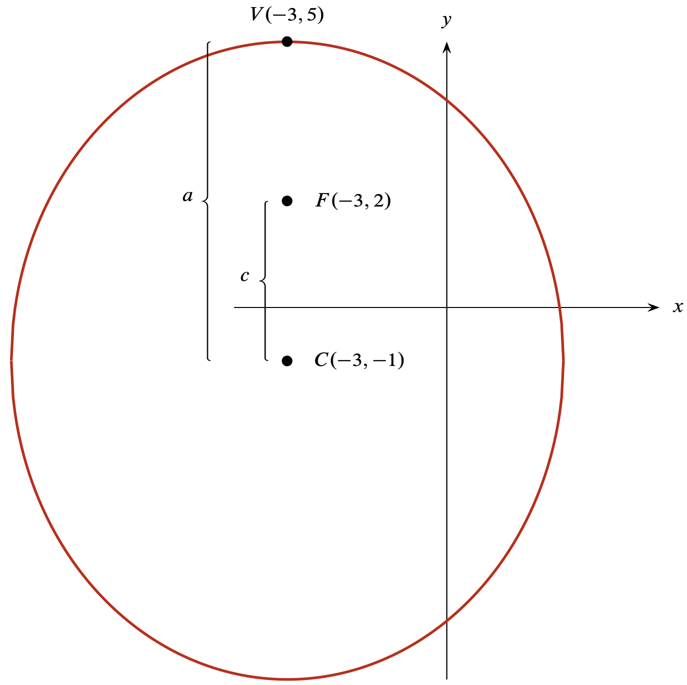
Vemos que:

- $\overline{CF} = c = 3$.
- $\overline{CV} = a = 6$.
- $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27}$.
- El eje mayor de la elipse es paralelo al eje y.

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{27} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1.$$

Y la gráfica de la elipse es:



□

3. Sea $4x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 49 = 0$ la ecuación de una elipse. Las coordenadas de sus dos focos $F_1(x_1, y_1)$ y $F_2(x_2, y_2)$ son: ________.

▼ La respuesta es E.

Partimos de la ecuación proporcionada de la elipse:

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 49 = 0.$$

Completamos cuadrados y simplificamos:

$$\begin{aligned}
4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 6y) + 49 = 0 &\Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 6y + 9 - 9) + 49 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 4(x-1)^2 + 9(y-3)^2 - 4 - 81 + 49 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 4(x-1)^2 + 9(y-3)^2 = 36 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{4(x-1)^2}{36} + \frac{9(y-3)^2}{36} = 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.
\end{aligned}$$

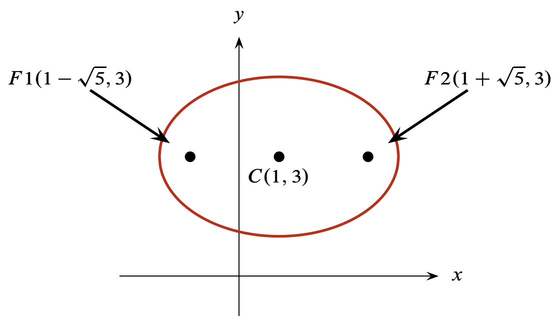
Vemos entonces que:

- $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$.
- $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.
- $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$.
- La elipse tiene su eje mayor paralelo al eje x.
- Las coordenadas del centro son $C(1, 3)$.

Por lo tanto, las coordenadas de los focos son:

$$F_1(1 - \sqrt{5}, 3) \quad \& \quad F_2(1 + \sqrt{5}, 3).$$

Y la gráfica de la elipse es:



□

4. Sea $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4 = 0$ la ecuación de una elipse. Las coordenadas $V_1(x_1, y_1)$ y $V_2(x_2, y_2)$ de los vértices del eje mayor son: ________ .

▼ La respuesta es E.

Partimos de la ecuación proporcionada de la elipse:

$$4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4 = 0.$$

Completamos cuadrados y simplificamos:

$$\begin{aligned} 4(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) + 4 = 0 &\Rightarrow 4(x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4(x+1)^2 + (y-1)^2 - 4 - 1 + 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{1/4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1. \end{aligned}$$

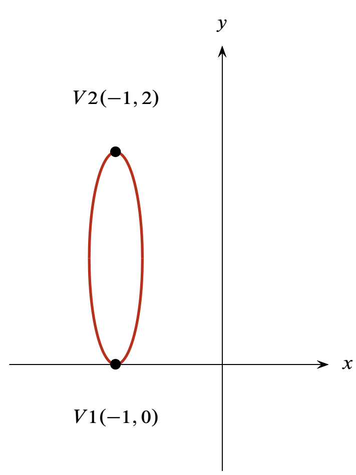
Vemos entonces que:

- $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$.
- $b^2 = 1/4 \Rightarrow b = 1/2$.
- $c^2 = a^2 - b^2 = 1 - 1/4 = 3/4 \Rightarrow c = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$.
- La elipse tiene su eje mayor paralelo al eje y.
- Las coordenadas del centro son $C(-1, 1)$.

Por lo tanto, las coordenadas de los vértices del eje mayor son:

$$V_1(-1, 0) \quad \& \quad V_2(-1, 2).$$

Y la gráfica de la elipse es:



□

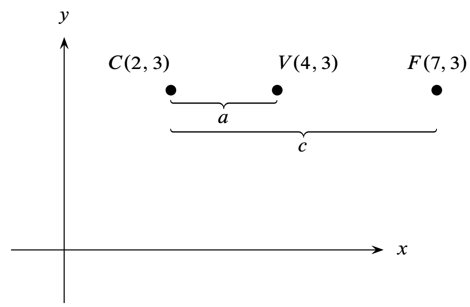
Ecuación y elementos principales de la hipérbola

Reactivos: véase la página 112

1. Sea la hipérbola con centro en $C(2,3)$, un vértice en $V(4,3)$ y un foco en $F(7,3)$. La ecuación de la hipérbola es: ______.

▼ La respuesta es B.

Dibujamos en el plano los puntos proporcionados:



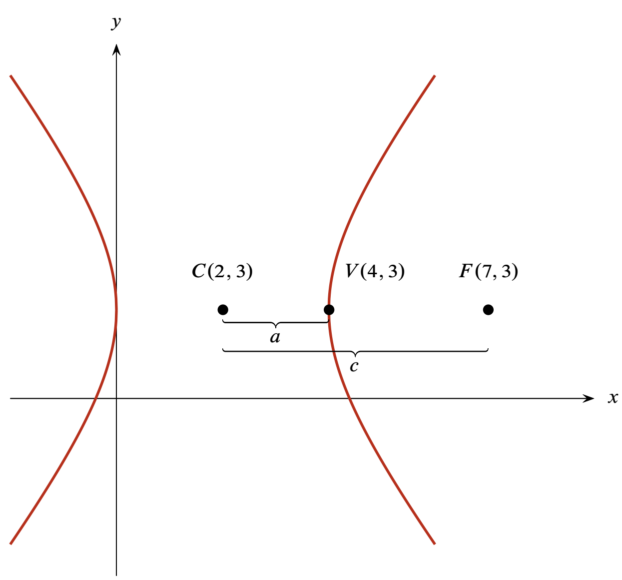
Vemos que:

- $\overline{CV} = a = 2$.
- $\overline{CF} = c = 5$.
- $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$.
- El eje de la hipérbola es paralelo al eje x.

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{21} = 1.$$

Y la gráfica de la hipérbola es:

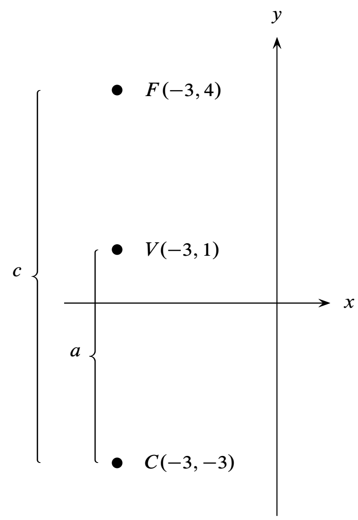


□

2. Sea la hipérbola con centro en $C(-3,-3)$, un vértice en $V(-3,1)$ y un foco en $F(-3,4)$. La ecuación de la hipérbola es: ________.

▼ La respuesta es A.

Dibujamos en el plano los puntos proporcionados:



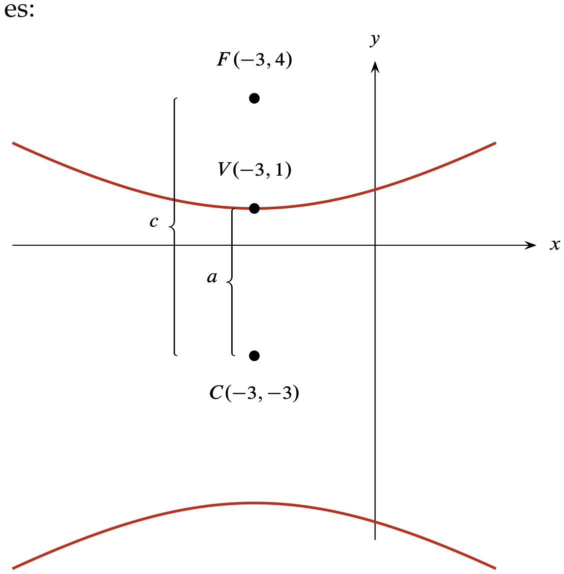
Vemos que:

- $\overline{CV} = a = 4$.
- $\overline{CF} = c = 7$.
- $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33}$.
- El eje mayor de la hipérbola es paralelo al eje y.

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{33} = 1.$$

Y la gráfica de la hipérbola es:



□

3. Sea $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ la ecuación de una hipérbola. Las coordenadas $F_1(x_1, y_1)$ y $F_2(x_2, y_2)$ de sus focos son: ________.

▼ La respuesta es E.

Partimos de la ecuación proporcionada de la hipérbola:

$$x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0,$$

Completamos cuadrados y simplificamos:

$$\begin{aligned}(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 2y) - 4 = 0 &\Rightarrow (x^2 - 4x + 4 - 4) - 4(y^2 + 2y + 1 - 1) - 4 = 0 \Rightarrow\\ &\Rightarrow (x-2)^2 - 4(y+1)^2 - 4 + 4 - 4 = 0 \Rightarrow\\ &\Rightarrow (x-2)^2 - 4(y+1)^2 = 4 \Rightarrow\\ &\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{1} = 1.\end{aligned}$$

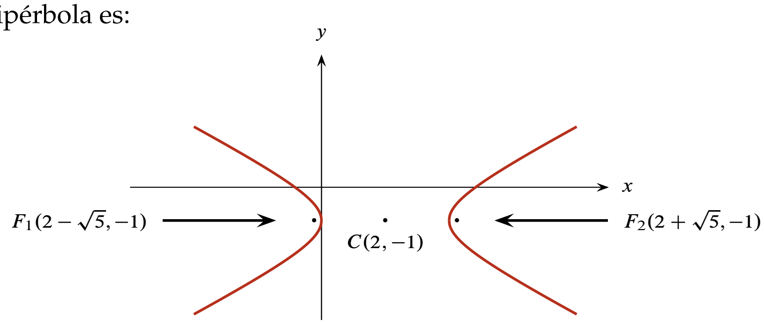
Vemos entonces que:

- $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$.
- $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$.
- $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$.
- La hipérbola tiene su eje paralelo al eje x.
- Las coordenadas del centro son $C(2, -1)$.

Por lo tanto, las coordenadas de los focos son:

$$F_1(2 - \sqrt{5}, -1) \quad \& \quad F_2(2 + \sqrt{5}, -1).$$

Y la gráfica de la hipérbola es:



□

4. Sea $-4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y - 63 = 0$ la ecuación de una hipérbola. Las coordenadas $V_1(x_1, y_1)$ y $V_2(x_2, y_2)$ de sus vértices son: ______________.

▼ La respuesta es E.

Partimos de la ecuación proporcionada de la hipérbola:

$$-4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y - 63 = 0.$$

Completamos cuadrados y simplificamos:

$$\begin{aligned}-4(x^2 + 6x) + 9(y^2 + 2y) - 63 = 0 &\Rightarrow -4(x^2 + 6x + 9 - 9) + 9(y^2 + 2y + 1 - 1) - 63 = 0 \Rightarrow\\ &\Rightarrow -4(x+3)^2 + 9(y+1)^2 + 36 - 9 - 63 = 0 \Rightarrow\\ &\Rightarrow -4(x+3)^2 + 9(y+1)^2 = 36 \Rightarrow\\ &\Rightarrow -\frac{4(x+3)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1 \Rightarrow\\ &\Rightarrow -\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1.\end{aligned}$$

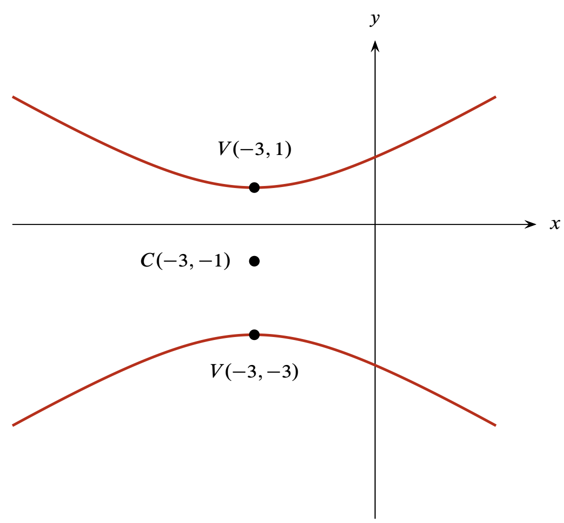
Vemos entonces que:

- La hipérbola tiene su eje paralelo al eje y.
- $a^2 = 4 \;\Rightarrow\; a = 2$.
- $b^2 = 9 \;\Rightarrow\; b = 3$.
- $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{13}$.
- El centro de la hipérbola está en $C(-3, -1)$.

Por lo tanto, las coordenadas de los vértices son:

$$V_1(-3, -3) \quad \& \quad V_2(-3, 1).$$

Y la gráfica de la hipérbola es:



□

1.6 Cálculo diferencial e integral

Derivadas de sumas, productos, cocientes y potencias de funciones

Reactivos: véase la página 115

1. Al derivar la función $f(x) = 5x^3 + \dfrac{15x^2}{2} + 3$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es B.

Para la función

$$f(x) = 5x^3 + \frac{15x^2}{2} + 3,$$

se tiene:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^3 + \frac{15x^2}{2} + 3\right).$$

Considerando que:

$$\frac{d}{dx}\left[g(x) + h(x) - \phi(x)\right] = \frac{d}{dx}g(x) + \frac{d}{dx}h(x) - \frac{d}{dx}\phi(x);$$

entonces:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 3\right) = \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}\left(\frac{15}{2}x^2\right) + \frac{d}{dx}(3).$$

A continuación se aplica la regla $\dfrac{d}{dx}Cg(x) = C\dfrac{d}{dx}g(x)$ a los términos $\dfrac{d}{dx}(5x^3)$; $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{15}{2}x^2\right)$ y la regla $\dfrac{d}{dx}C = 0$ al término $\dfrac{d}{dx}(3)$, por lo que:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}\left(\frac{15}{2}x^2\right) + \frac{d}{dx}(3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{15}{2}\frac{d}{dx}(x^2) + 0 =$$
$$= 5\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{15}{2}\frac{d}{dx}(x^2).$$

Por último, a las expresiones $\dfrac{d}{dx}(x^3)$; $\dfrac{d}{dx}(x^2)$ se aplica la regla $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{(n-1)}$:

$$f'(x) = 5\left(3x^{(3-1)}\right) + \frac{15}{2}\left(2x^{(2-1)}\right) = 5(3x^2) + \frac{15}{2}(2x) = 15x^2 + 15x = 15x(x+1).$$

□

2. Al derivar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es C.

Para derivar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ se debe aplicar la regla para derivar un cociente de funciones:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h(x)\frac{d}{dx}g(x) - g(x)\frac{d}{dx}h(x)}{[h(x)]^2}.$$

Si se considera que $g(x) = x^2$ & $h(x) = x + 1$, se tiene entonces que:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}.$$

Para las expresiones $\dfrac{d}{dx}(x^2)$; $\dfrac{d}{dx}(x+1)$, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{(2-1)} = 2x;$$
$$\frac{d}{dx}(x+1) = \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}1 = 1 + 0 = 1.$$

Considerando la información anterior:

$$f'(x) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(2x) - x^2(1)}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

□

3. Al derivar $y = \sqrt{3x^2 + x}$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es B.

Para obtener y', es decir, la derivada de $y = \sqrt{3x^2 + x}$, es necesario considerar que

$$y = f(x) = (3x^2 + x)^{\frac{1}{2}}.$$

Recordar la regla de derivación de una potencia de una función derivable:

Si $y = f(x) = [g(x)]^n$, entonces:

$$y' = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} g(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

Para la función $f(x) = (3x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$, considerar que $g(x) = 3x^2 + x$.

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x)]^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dx} \left[(3x^2 + x)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left(3x^2 + x\right)^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + x) = \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{d}{dx} 3x^2 + \frac{d}{dx} x\right] = \frac{1}{2}(3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \left[3\frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} x\right] = \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}[(3)(2x) + 1] = \frac{1}{2}(3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}(6x + 1) = \frac{1}{2(3x^2 + x)^{\frac{1}{2}}}(6x + 1) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + x}}(6x + 1) = \frac{6x + 1}{2\sqrt{3x^2 + x}}. \end{aligned}$$

□

4. Al derivar $y = \sqrt{x}(x - 2)$, se obtiene: ________.

▼ La respuesta es B.

Recordar que si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, entonces $f'(x) = g(x)\, h'(x) + h(x)\, g'(x)$.

La función $y = f(x) = \sqrt{x}\,(x - 2)$ está compuesta por dos factores. Un factor es $\sqrt{x}$ y el otro factor es $(x - 2)$.

Si se considera que $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = (x - 2)$, entonces:

$$y'(x) = f'(x) = \sqrt{x}\frac{d}{dx}\,(x - 2) + (x - 2)\frac{d}{dx}\sqrt{x}(1) + (x - 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Para el caso de $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ se tiene que $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}}$, por lo tanto:

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right) x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \left(\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{x}\,(1) + (x - 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} + \frac{x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{(2\sqrt{x})(\sqrt{x}) + (x - 2)}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{2(\sqrt{x})^2 + x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 2}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

□

5. La derivada de la función $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{\sqrt{x - 1}}$ es: ________.

▼ La respuesta es E.

La derivada de un cociente de funciones señala lo siguiente:

$$\text{Si } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \text{ entonces } f'(x) = \frac{h(x)\, g'(x) - g(x)\, h'(x)}{[h(x)]^2}.$$

Para la función $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{\sqrt{x - 1}}$, usaremos el resultado anterior, considerando que $g(x) = (x + 1)^3$ y $h(x) = \sqrt{x - 1}$.

Por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}(x+1)^3 - (x+1)^3\frac{d}{dx}\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2}.$$

A continuación se derivan por separado $\dfrac{d}{dx}(x+1)^3$ & $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x-1}$.
Para ambas derivadas se aplica la regla de la derivada de una potencia de una función:

$$\text{Si } f(x) = [\phi(x)]^n, \text{ entonces} f'(x) = n[\phi(x)]^{n-1} \cdot \phi'(x).$$

Considerando lo anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x+1)^3 &= 3(x+1)^2\left[\frac{d}{dx}(x+1)\right] = 3(x+1)^2\left(\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}1\right) = \\
&= 3(x+1)^2(1) = 3(x+1)^2. \\
\frac{d}{dx}\sqrt{x-1} &= \frac{d}{dx}(x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x-1)^{(\frac{1}{2}-1)}\frac{d}{dx}(x-1) = \\
&= \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}1\right) = \frac{1}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}(1) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.
\end{aligned}$$

Usando estos cálculos realizados:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}(x+1)^3 - (x+1)^3\frac{d}{dx}\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2} = \frac{\sqrt{x-1}3(x+1)^2 - (x+1)^3\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{(x-1)} = \\
&= \frac{3\sqrt{x-1}(x+1)^2 - \frac{(x+1)^3}{2\sqrt{x-1}}}{(x-1)} = \frac{\frac{2\sqrt{x-1}3\sqrt{x-1}(x+1)^2-(x+1)^3}{2\sqrt{x-1}}}{(x-1)} = \\
&= \frac{\frac{6(\sqrt{x-1})^2(x+1)^2-(x+1)^3}{2\sqrt{x-1}}}{(x-1)} = \frac{\frac{6(x-1)(x+1)^2-(x+1)^3}{2\sqrt{x-1}}}{(x-1)} = \\
&= \frac{6(x-1)(x+1)^2-(x+1)^3}{2\sqrt{x-1}(x-1)} = \frac{(x+1)^2[6(x-1)-(x+1)]}{2\sqrt{(x-1)^3}} = \\
&= \frac{(x+1)^2[6x-6-x-1]}{2\sqrt{(x-1)^3}} = \frac{(x+1)^2(5x-7)}{2\sqrt{(x-1)^3}}.
\end{aligned}$$

□

Integrales inmediatas

Reactivos: véase la página 117

1. Al resolver la integral $\int \left(6x^3 + 5x^2 - 2x\right) dx$, obtenemos: ______.

▼ La respuesta es E.

$$\begin{aligned}
\int \left(6x^3 + 5x^2 - 2x\right) dx &= \int 6x^3 dx + \int 5x^2 dx - \int 2x dx = 6\int x^3 dx + 5\int x^2 dx - 2\int x dx = \\
&= 6\cdot\left(\frac{x^4}{4}\right) + 5\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right) - 2\left(\cdot\frac{x^2}{2}\right) + C = \frac{6x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + C = \\
&= \frac{3x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - x^2 + C = \frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - x^2 + C.
\end{aligned}$$

□

2. Al resolver la integral $\int \frac{dx}{x^2}$, obtenemos: ________ .

▼ La respuesta es C.

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{(-2+1)}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

□

3. Al resolver la integral $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt[2]{x}}dx$, obtenemos: ________ .

▼ La respuesta es B.

Antes de resolver la integral, es preciso utilizar algunos pasos algebraicos:

$$\frac{3x^3-2}{\sqrt{x}} = \frac{3x^3-2}{x^{\frac{1}{2}}} = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)(3x^3-2) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)(3x^3) + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)(-2) =$$
$$= 3x^{\left(3-\frac{1}{2}\right)} - 2x^{-\frac{1}{2}} = 3x^{\frac{5}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}.$$

Observa que esta última expresión se integra fácilmente:

$$\int \frac{(3x^3-2)}{\sqrt{x}}dx = \int \left(3x^{\frac{5}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int 3x^{\frac{5}{2}}dx - \int 2x^{-\frac{1}{2}}dx =$$
$$= 3\int x^{\frac{5}{2}}dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 3\cdot\frac{x^{\left(\frac{5}{2}+1\right)}}{\frac{5}{2}+1} - 2\cdot\frac{x^{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$
$$= \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{6x^{\frac{7}{2}}}{7} - 4x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{6\sqrt{x^7}}{7} - 4\sqrt{x} + C.$$

□

4. Al evaluar la integral $\int_1^3 (x+3)dx$, se obtiene: ________ .

▼ La respuesta es D.

$$\int_1^3 (x+3)dx = \int_1^3 xdx + \int_1^3 3dx = \int_1^3 xdx + 3\int_1^3 dx =$$
$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 + 3x|_1^3 = \frac{(3)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} + 3[3-1] =$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 9 - 3 = \frac{8}{2} + 9 - 3 = 4 + 9 - 3 = 10.$$

Por lo tanto

$$\int_1^3 (x+3)dx = 10.$$

□

5. Al evaluar la integral $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, se obtiene: ________ .

▼ La respuesta es A.

Considera que:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}.$$

Se tiene entonces:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = \left. \frac{x^{\left(-\frac{2}{3}+1\right)}}{-\frac{2}{3}+1} \right|_1^8 = \left. \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_1^8 = \left. 3x^{\frac{1}{3}} \right|_1^8 =$$

$$= 3\left(8^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}}\right) = 3\left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}\right) = 3(2-1) = 3.$$

Por lo tanto

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = 3.$$

□

2. Física

2.1 Análisis dimensional

Sistema internacional de unidades

Reactivos: véase la página 120

1. La unidad de tiempo y de corriente eléctrica son segundo (s) y ampere (A), respectivamente. Por definición, la carga eléctrica q es la cantidad de corriente eléctrica que circula dentro de un conductor por segundo; su unidad es el coulomb (C), la cual está dada por: ________.

   ▼ La respuesta es E.

   La carga eléctrica q que atraviesa una sección transversal de un conductor que transporta una corriente de intensidad I, en el tiempo t es $q = It$.

   Por lo tanto $[q] = [I][t] = \mathrm{A\,s} = \mathrm{C}$.

   □

2. La cantidad de calor Q que recibe un gas es directamente proporcional a su aumento de temperatura ΔT, esto es $Q = C\Delta T$. Si las unidades de medida del calor y de la temperatura son joule (J) y kelvin (K), respectivamente, la unidad de la constante de proporcionalidad C, llamada capacidad calorífica, es: ________.

   ▼ La respuesta es C.

   Dado que $Q = C\Delta T$, entonces $C = \dfrac{Q}{\Delta T}$, por lo tanto $[\mathrm{C}] = \dfrac{[\mathrm{Q}]}{[\mathrm{T}]} = \dfrac{[\text{calor}]}{[\text{temperatura}]} = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.

   □

Magnitudes físicas. Escalares y vectoriales. Fundamentales y derivadas

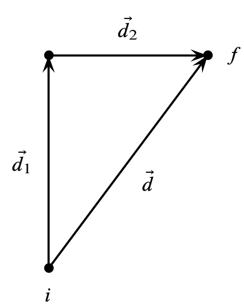
Reactivos véase la página 124

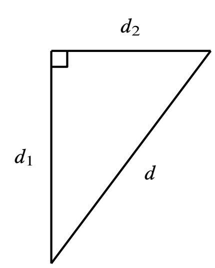
1. Un automóvil se desplaza 4 km hacia el norte y enseguida 3 km hacia el este. La magnitud del desplazamiento total entre el punto inicial y el punto final así como la distancia recorrida por el automóvil son: ________.

   ▼ La respuesta es C.

   En este caso se tiene que $\vec{d}_1 = \{\, 4\text{ km}, 90°\,\}$, $\vec{d}_2 = \{\, 3\text{ km}, 0°\,\}$. El desplazamiento total del automóvil es:

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2.$$





Puesto que el ángulo formado por los vectores es de 90°, la magnitud del desplazamiento total se obtiene usando el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(4\text{ km})^2 + (3\text{ km})^2} = \sqrt{16\text{ km}^2 + 9\text{ km}^2} = \sqrt{25\text{ km}^2} = 5\text{ km}.$$

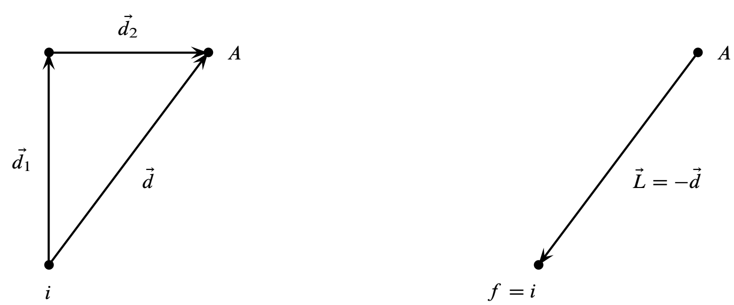
Debido a que la distancia es una cantidad escalar, la distancia total recorrida por el automóvil es la suma de las magnitudes de los vectores desplazamiento, esto es:

$$D = 4\text{ km} + 3\text{ km} = 7\text{ km}.$$

□

2. Un automóvil se desplaza 4 km hacia el norte y enseguida 3 km hacia el este y finalmente regresa en línea recta al punto inicial. La magnitud del desplazamiento entre el punto inicial y el final así como la distancia recorrida por el automóvil son: ________.

▼ La respuesta es E.



El desplazamiento total desde el punto i hasta el punto A es, de acuerdo con la figura de la izquierda, $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$, cuya magnitud es $d = 5$ km (véase reactivo anterior). Debido a que el automóvil se regresa desde el punto A hasta el punto $f = i$ en línea recta, entonces este desplazamiento $\vec{L}$ es igual en magnitud y dirección al vector $\vec{d}$, pero de sentido opuesto (véase la figura de la derecha); es decir $\vec{L} = -\vec{d}$. Por lo tanto el desplazamiento total es:

$$\vec{d}_{\text{total}} = \vec{d} + \vec{L} = \vec{d} - \vec{d} = 0\text{ km}.$$

Finalmente, la distancia total ℓ recorrida por el automóvil es la suma de las magnitudes de los desplazamientos $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$, $\vec{L}$; es decir:

$$\ell = 4\text{ km} + 3\text{ km} + 5\text{ km} = 12\text{ km}.$$

□

Notación científica

Reactivos: véase la página 125

1. La magnitud de la fuerza eléctrica que ejercen entre sí dos cargas q_1, q_2, separadas una distancia d, está dada por la ecuación:

$$F = K\frac{|q_1||q_2|}{d^2},$$

donde $K = 9 \times 10^9\ \dfrac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$ es la constante de Coulomb.

Si $q_1 = 4.0 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = -1.5 \times 10^{-6}$ C, $d = 3.0 \times 10^{-5}$ m, la magnitud de la fuerza eléctrica es: ________.

▼ La respuesta es C.

Sustituyendo por los valores numéricos indicados:

$$F = (9 \times 10^9\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2)\frac{(4.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(1.5 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(3.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{m})^2} = 6 \times 10^7\ \mathrm{N}.$$

□

2. El año luz es la distancia d que recorre la luz en un tiempo $t = 1$ año, es decir:

$$d = ct,$$

donde $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$ es la velocidad de la luz.

Considerando que 1 año $= 365$ días, el año luz expresado en metros es igual a: ________.

▼ La respuesta es D.

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$d = (3 \times 10^8\ \mathrm{m/s})(1\ \text{año}) = (3 \times 10^8\ \mathrm{m/s})[(365)(24)(60)(60)\ \mathrm{s}] = 9.46 \times 10^{15}\ \mathrm{m}.$$

□

Conversión de unidades

Reactivos: véase la página 126

1. Sabiendo que un corredor de maratón recorre 42 km en 2.3 h, su rapidez promedio es: ________.

▼ La respuesta es C.

La rapidez promedio del corredor es

$$v_m = \frac{42\ \mathrm{km}}{2.3\ \mathrm{h}} = 18.2\ \mathrm{km/h}.$$

Como 1 km = 1 000 m y 1 h = 3 600 s, entonces:

$$v_m = 18.2\frac{1\,000\ \mathrm{m}}{3\,600\ \mathrm{s}} = \frac{18.2}{3.6}\ \mathrm{m/s} = 5.05\ \mathrm{m/s} \approx 5\ \mathrm{m/s}.$$

□

2. Un medidor de consumo de electricidad marca 150 kWh. Sabiendo que $1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s}$, la energía consumida, expresada en joules es ________.

▼ La respuesta es A.

Se tiene 1 kWh = (1 000 W)(3 600 s), por lo tanto:

$$\begin{aligned} 150\ \mathrm{kWh} &= 150(1\,000\ \mathrm{W})(3600\ \mathrm{s}) = \\ &= 150\left(1\,000\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right)(3\,600\ \mathrm{s}) = \\ &= 540\,000\,000\ \mathrm{J} = 5.4 \times 10^8\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

□

3. La rapidez de un corredor olímpico es $v = 10\ \mathrm{m/s}$. Se sabe que la distancia recorrida d en un tiempo t es $d = vt$. ¿En cuantas horas recorrería 108 km, con esa rapidez? Elige la opción: ________.

▼ La respuesta es D.

De la expresión $d = vt$:

$$\begin{aligned} t = \frac{d}{v} &= \frac{108\ \mathrm{km}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{10.8\ \mathrm{km}}{1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \\ &= \frac{10\,800\ \mathrm{m}}{1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 10\,800\ \mathrm{s} = 10\,800\frac{\mathrm{h}}{3\,600} = 3\ \mathrm{h}. \end{aligned}$$

□

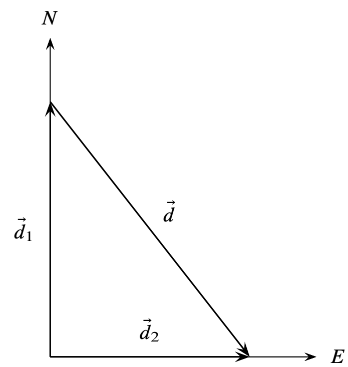
2.2 Cinemática

Conceptos de desplazamiento

Reactivos: véase la página 128

1. Un automóvil se desplaza 400 km hacia el norte y enseguida 300 km hacia el este. Expresado en km, la magnitud del desplazamiento y la distancia total recorrida son: ________ .

▼ La respuesta es E.



El desplazamiento $\vec{d}$ del automóvil está dado por $\vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1$, que se muestra en la figura.

$$d = \left|\vec{d}\right| = \sqrt{(400\text{ km})^2 + (300\text{ km})^2} = 500\text{ km}.$$

La distancia total recorrida es:

$$L = 400\text{ km} + 300\text{ km} = 700\text{ km}.$$

□

2. Un automóvil recorre 400 km hacia el norte en 3 h, luego 300 km hacia el este en 2 h. La magnitud de su velocidad media y de su velocidad promedio, expresadas en km/h son: ________ .

▼ La respuesta es E.

La velocidad media es:

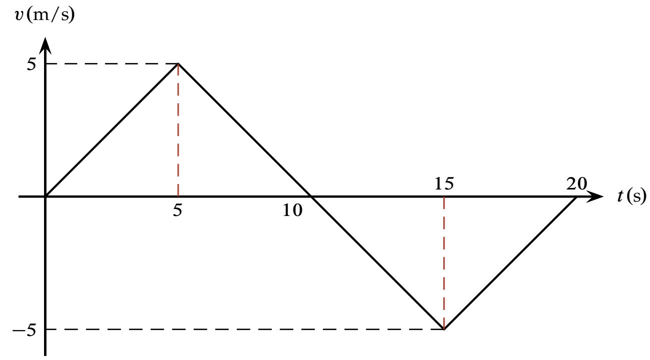
$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(400\text{ km})^2 + (300\text{ km})^2}}{3\text{ h} + 2\text{ h}} = \frac{500\text{ km}}{5\text{ h}} = 100\text{ km/h}.$$

La velocidad promedio es:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\mathrm{d}r}{\Delta t} = \frac{400\text{ km} + 300\text{ km}}{3\text{ h} + 2\text{ h}} = \frac{700\text{ km}}{5\text{ h}} = 140\text{ km/h}.$$

□

3. La gráfica de velocidad contra tiempo de una partícula en movimiento es:



Por lo tanto, la distancia recorrida y la posición x de la partícula en el tiempo $t = 20$ s, expresadas en metros, son: ________.

▼ La respuesta es D.

La velocidad de una partícula m está dada por:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt.$$

Al integrar la expresión anterior:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v dt = A \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\, dt = A,$$

por lo tanto

$$x = x_0 + A.$$

Donde A es el área bajo la curva de velocidad. La cual puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo de la velocidad. La gráfica muestra dos triángulos de igual base $\Delta t = 10$ s e igual altura $v = 5$ m/s, por lo tanto el valor absoluto del área correspondiente a cada uno de ellos es:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(10 \text{ s})(5 \text{ m/s})}{2} = 25 \text{ m}.$$

Tomando en cuenta que:

$$A_1 = 25 \text{ m}, \qquad A_2 = -25 \text{ m},$$

la distancia recorrida es igual a la suma de los valores absolutos, que en este caso es:

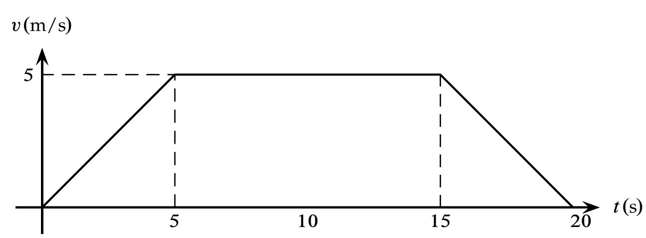
$$d = |A_1| + |A_2| = |25| + |-25| = 50 \text{ m}.$$

La posición final es la suma de las dos áreas, incluyendo su signo, esto es:

$$x = A_1 + A_2 = +25 \text{ m} - 25 \text{ m} = 0.$$

□

4. La gráfica de velocidad contra tiempo de una partícula en movimiento es:



Por lo tanto, la gráfica de aceleración contra el tiempo es: ________.

▼ La respuesta es E.

En general, la aceleración de una partícula m es:

$$a = \frac{dv}{dt};$$

donde v es la velocidad de la partícula. De acuerdo con esta definición, la aceleración coincide con la pendiente de la curva, gráfica de velocidad contra el tiempo, en cada instante; en el caso considerado:

En el intervalo de 0 s a 5 s, $a = 1 =$ cte.
En el intervalo de 5 s a 15 s, $a = 0 =$ cte.
En el intervalo de 15 s a 20 s, $a = -1 =$ cte.

Por lo tanto la gráfica de aceleración contra tiempo de 0 s a 20 s es la que se muestra en la opción E.

□

Movimiento rectilíneo: uniforme y acelerado

Reactivos: véase la página 130

1. Una partícula m se desplaza en línea recta; en un instante dado su velocidad es de 12 m/s, y se observa que en un tiempo de 10 s avanza una distancia de 170 m. La aceleración y la velocidad final de m son: ________.

▼ La respuesta es A.

La distancia recorrida $d = 170$ m y la velocidad final v_f en el tiempo $t_f = 10$ s son:

$$d = v_0 t_f + \frac{1}{2} a t_f^2, \qquad v_f = v_0 + a t_f;$$

donde $v_0 = 12$ m/s, por lo tanto:

$$170\text{ m} = 12\text{ m}(10\text{ s}) + 50\text{ s}^2 a \;\Rightarrow\; a = \frac{170 - 120}{50} = \frac{50}{50} = 1\text{ m/s}^2;$$
$$v_f = 12 + 10a \;\Rightarrow\; v_f = 12 + (10)(1) = 22\text{ m/s}.$$

□

2. Una partícula m describe un movimiento rectilíneo con aceleración $a = 1$ m/s^2 e inicia su movimiento con velocidad inicial $v_0 = 12$ m/s; se observa que en el tiempo t_f recorre la distancia $d = 170$ m y adquiere la velocidad v_f. Los valores de t_f, v_f son: ________.

▼ La respuesta es A.

La distancia recorrida $d = 170$ m y la velocidad v_f, adquirida en un tiempo t_f están dadas por:

$$d = v_0 t_f + \frac{1}{2} a t_f^2, \qquad v_f = v_0 + a t_f,$$

donde $v_0 = 12$ m/s, $a = 1$ m/s^2, por lo tanto:

Primera ecuación:

$$d = v_0 t_f + \frac{1}{2} a t_f^2 \;\Rightarrow 170\text{ m} = (12\text{ m/s}) t_f + (0.5\text{ m/s}^2) t_f^2 \;\Rightarrow\; (0.5) t_f^2 + (12) t_f - 170 = 0.$$

Hemos obtenido una ecuación cuadrática cuya solución es:

$$t_f = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 + 2(170)}}{2(0.5)} = \begin{cases} 10\text{ s} = t_f; \\ -34\text{ s}. \end{cases}$$

La solución negativa es físicamente imposible porque no consideramos esos tiempos. Por lo tanto, el tiempo que tarda la partícula en recorrer la distancias d es $t_f = 10$ s.

Segunda ecuación:

$$v_f = v_0 + a t_f \;\Rightarrow\; v_f = 12\text{ m/s} + (1\text{m/s}^2) t_f \;\Rightarrow\; v_f = 12 + 10 = 22\text{ m/s}.$$

□

3. Una partícula m se lanza desde el piso, verticalmente hacia arriba, con una rapidez de $v_0 = 20$ m/s , bajo la acción de la gravedad ($g = 10$ m/s^2). La máxima altura H que alcanza m y el tiempo t_f que tarda en regresar al piso son: ________.

▼ La respuesta es D.

En el punto de máxima altura, la masa m termina de subir e inicia su descenso, por lo que su velocidad en ese instante es igual a cero. El tiempo que tarda en llegar a su máxima altura está dado por:

$$v_H = v_0 - g t_H = 0 \;\Rightarrow\; t_H = \frac{v_0}{g} = \frac{20}{10} = 2\text{ s}.$$

La altura máxima es:

$$H = v_0 t_H - \frac{1}{2} g t_H^2 = (20)(2) - \frac{1}{2}(10)(2)^2 = 20 \text{ m} = H.$$

En la caída libre de m se sabe que

$$t_f = 2t_H = 2(2) = 4 \text{ s} = t_f;$$

o de otra forma, que:

$$v_0 t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 = 0 \Rightarrow t_f = \frac{2v_0}{g} = \frac{2(20)}{10} = 4 \text{ s}.$$

□

4. Se deja caer ($v_0 = 0$ m/s) desde una altura $h = 20$ m una pelota y, en el mismo instante, se dispara sobre el piso una canica con velocidad constante $u = 15$ m/s. El tiempo que tarda la pelota en llegar al piso y la distancia recorrida por la canica en el mismo tiempo son: ________.

   (Considera que $g = 10$ m/s^2).

   ▼ La respuesta es E.

   El tiempo de caída de la pelota es:

$$h - \frac{1}{2} g t_f^2 = 0 \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(20)}{10}} = 2 \text{ s}.$$

   La distancia recorrida por la canica es:

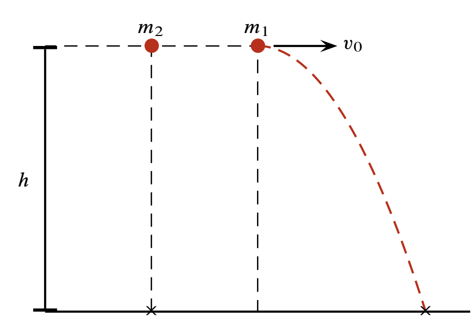
$$d = u t_f = (15)(2) = 30 \text{ m}.$$

□

Movimiento bidimensional: circular y tiro parabólico

Reactivos: véase la página 133

1. Se dispara una partícula m_1 y al mismo tiempo se deja caer otra partícula m_2, como se muestra en la siguiente figura:



   El tiempo que m_2 tarda en llegar al suelo, en relación con el tiempo en que m_1 tarda en llegar al suelo es: ________.

   ▼ La respuesta es B.

El tiempo t_F que tarda m_2 en llegar al suelo es:

$$h = \frac{1}{2}gt_F^2 \;\Rightarrow\; t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

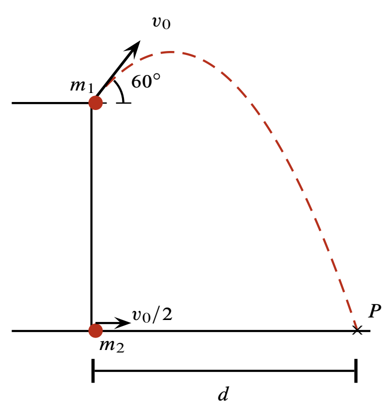
El tiempo t'_F que tarda m_1 en llegar al suelo es:

$$h = \frac{1}{2}g(t'_F)^2 \;\Rightarrow\; t'_F = \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_F.$$

□

2. Se disparan dos partículas m_1, m_2 al mismo tiempo (m_2 se mueve con velocidad constante), como se muestra en la siguiente figura:

   (m_2 se mueve con velocidad constante).



   El tiempo que tarda m_2 en llegar al punto P, en relación con el tiempo en que m_1 tarda en llegar a ese punto es: ________ .

   ▼ La respuesta es E.

   El tiempo t_F que tarda m_2 en llegar a P es:

$$\frac{v_0}{2} = \frac{d}{t_F} \;\Rightarrow\; t_F = \frac{2d}{v_0}.$$

   El tiempo t'_F que tarda m_1 en llegar al P es:

$$d = (v_0 \cos 60°)t'_F \;\Rightarrow\; t'_F = \frac{d}{v_0 \cos 60°} = \frac{d}{(0.5)v_0} = \frac{2d}{v_0} = t_F.$$

□

3. Una persona se coloca en la orilla de un carrousel cuyo radio es $R = 3.5$ m. Para que la aceleración centrípeta de la persona sea 14 m/s^2, la rapidez angular del carrousel expresada en rad/s, es: ________ .

   ▼ La respuesta es A.

   Tenemos:

$$a_c = \frac{w^2}{R} \;\Rightarrow\; w = \sqrt{Ra_c} = \sqrt{(3.5)(14)} = 7 \text{ rad/s}.$$

□

4. La velocidad angular de un carrousel es de 8 rad/s, por lo tanto su periodo y frecuencia de rotación son, respectivamente: ______.

   ▼ La respuesta es C.

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} = 0.25\pi \text{ s}$$
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.25\pi} = \frac{4}{\pi} \text{ vueltas/s.}$$

□

2.3 Dinámica

Conceptos de inercia y fuerza. Leyes de Newton

Reactivos: véase la página 136

1. Completa el siguiente enunciado:

   La ______ es la propiedad de los cuerpos materiales de conservar su estado de ______ o de movimiento ______ .

   ▼ La respuesta es C.

   La primera ley de Newton establece que los cuerpos materiales poseen la propiedad de mantener su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme; a esta propiedad se le llama la inercia del cuerpo.

□

2. Relaciona las dos columnas. Elige la opción correspondiente: ______.

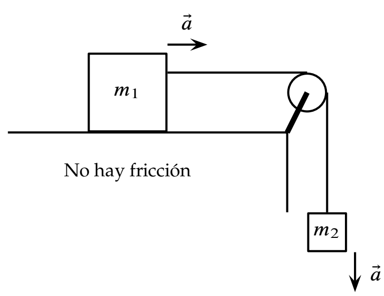
   ▼ La respuesta es C.

   Se tiene que:

   - A la primera ley de Newton también se le llama: ley de Inercia.
   - La segunda ley de Newton se enuncia: $\vec{F} = m\vec{a}$.
   - A la tercera ley de Newton también se le llama: ley de Acción–Reacción.
   - Definición de trabajo: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.
   - Definición de potencia: $P = \dfrac{W}{t}$.
   - La energía potencial de gravedad es: $E_p = mgh$.
   - Definición de energía cinética: $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$.

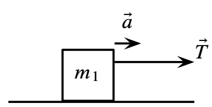
□

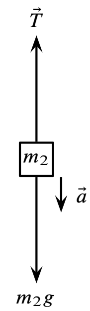
3. En el sistema mostrado en la siguiente figura, considera $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 2$ kg, $g = 10$ m/s^2.



La magnitud de la aceleración de los bloques es: ________.

▼ La respuesta es B.





T es la magnitud de la tensión de la cuerda, aplicando la segunda ley de Newton en cada bloque:

$$\text{Para } m_1: \qquad T = m_1 a.$$
$$\text{Para } m_2: \qquad T - m_2 g = -m_2 a.$$

Es decir:

$$T = 8a, \qquad (*)$$
$$T - (2)(10) = -(2)a. \qquad (**)$$

Utilizando (*) en (**):

$$8a - 20 = -2a \;\Rightarrow\; a = \frac{20}{10} = 2\ \text{m/s}^2.$$

□

4. Una fueza de magnitud F produce una aceleración a_1 sobre un cuerpo de masa m_1. Si se triplica la masa del cuerpo, bajo la acción de la misma fuerza, su aceleración, respecto de a_1 es: ________.

▼ La respuesta es B.

De la segunda ley de Newton:

$$a_1 = \frac{F}{m_1}.$$

$$\text{Para } m_2 = 3m_1: \qquad a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{F}{3m_1} = \frac{1}{3}\frac{F}{m_1} = \frac{1}{3}a_1.$$

□

5. Completa la siguiente afirmación:

La aceleración que produce la fuerza de gravedad $F_1 = m_1 g$ sobre un cuerpo de masa m_1 es ________ que la aceleración que produce la fuerza de gravedad sobre un cuerpo del doble de masa.

▼ La respuesta es C.

De la segunda ley de Newton se tiene:

$$\text{Para } m_1: \qquad a_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{m_1 g}{m_1} = g.$$
$$\text{Para } m_2 = 2m_1: \qquad a_2 = \frac{F_2}{m_2} = \frac{F_2}{2m_1} = \frac{(2m_1)g}{2m_1} = g = a_1.$$

□

6. Un automóvil de masa $m = 1\,000$ kg, a partir del reposo, adquiere la velocidad de 30 m/s en 10 s. La magnitud de la aceleración de m y la de la fuerza aplicada sobre m son: ______.

▼ La respuesta es **??**

La aceleración de m es tal que:

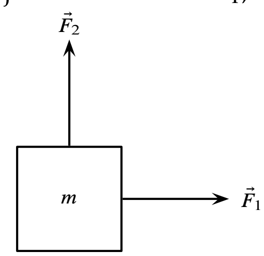
$$v_f = at_f \;\Rightarrow\; a = \frac{v_f}{t_f} = \frac{30\text{ m/s}}{10\text{ s}} = 3\text{ m/s}^2.$$

De la segunda ley de Newton:

$$F = ma = (1\,000\text{ kg})(3\text{ m/s}^2) = 3\,000\text{ N}.$$

□

7. Sobre un cuerpo de masa $m = 10$ kg se ejercen las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (véase la siguiente figura):



Considerando que $\vec{F}_1 = 40$ N, $\vec{F}_2 = 30$ N, la magnitud de la aceleración de m es: ______.

▼ La respuesta es **??**

La magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre m es:

$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(40\text{ N})^2 + (30\text{ N})^2} =$$
$$= \sqrt{1\,600\text{ N}^2 + 900\text{ N}^2} = \sqrt{2\,500\text{ N}^2} = 50\text{ N}.$$

La magnitud de la aceleración de m es:

$$a = \frac{F_r}{m} = \frac{50\text{ N}}{10\text{ kg}} = 5\text{ m/s}^2.$$

□

Conceptos de energía cinética, energía potencial, trabajo y potencia

Reactivos: véase la página 136

1. Complete el siguiente enunciado:

La ______ cuantifica la inercia de un cuerpo, mientras que la ______ cuantifica la interacción entre los cuerpos capaz de modificar su estado de movimiento.

▼ La respuesta es D.

La masa es un parámetro físico que se usa para:

i. Cuantificar la inercia de un cuerpo material $\left(a = \dfrac{F}{m}\right)$.

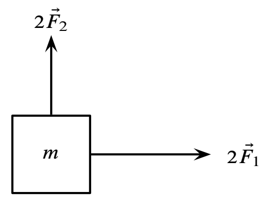
ii. Cuantificar la propiedad gravitacional de los cuerpos materiales $\left(F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\right)$.

iii. Cuantifica la cantidad de materia de los cuerpos materiales ($m = nM$).
iv. Cuantifica el equivalente de la materia y la energía ($E = mc^2$).

Por otro lado, la fuerza es el parámetro físico que cuantifica la interacción entre los cuerpos materiales, capaz de modificar su estado de movimiento.

□

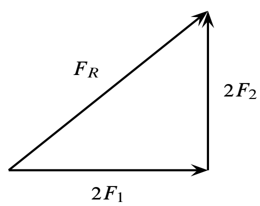
2. Sobre un cuerpo actúan las fuerzas mostradas en la siguiente figura.



Si $F_1 = 4$ N y si $F_2 = 3$ N, la fuerza resultante $\vec{F}_R = 2\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2$ tiene magnitud: ________.

▼ La respuesta es E.

Del teorema de Pitágoras:



$$F_R = \sqrt{(2F_1)^2 + (2F_2)^2} = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} =$$
$$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

Es decir, $F_R = 10$ N.

□

3. La energía cinética de un cuerpo es $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$; si la masa se cuadriplica, para que la energía cinética sea la misma, su velocidad debe: ________.

▼ La respuesta es D.

Si $m_2 = 4m_1$, entonces:

$$E_{c1} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2.$$
$$E_{c2} = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(4m_1)v_2^2 = 2m_1 v_2^2.$$

Se quiere que $E_{c2} = E_{c1}$, por lo tanto:

$$2m_1 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \;\Rightarrow\; v_2 = \sqrt{\frac{v_1^2}{4}} = \frac{v_1}{2}.$$

□

4. La energía potencial de gravedad de un cuerpo de masa m es $E_p = mgh$, donde h es la altura del cuerpo respecto del piso y donde $g = 10$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad. Para un cuerpo de masa 5 kg que cambia su altura de $h_1 = 10$ m a $h_2 = 5$ m, el cambio de su energía potencial de gravedad es: ________.

▼ La respuesta es B.

Tenemos:

$$\begin{aligned} E_1 &= mgh_1 = (5 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m}) = 500 \text{ J};\\ E_2 &= mgh_2 = (5 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m}) = 250 \text{ J};\\ \Delta E_p &= E_2 - E_1 = 250 \text{ J} - 500 \text{ J} = -250 \text{ J}. \end{aligned}$$

□

5. Una fuerza de magnitud 100 N desplaza 15 m a un cuerpo en un tiempo de 20 s; el trabajo realizado y la potencia de la fuerza son: ________.

▼ La respuesta es E.

Tenemos:

$$\begin{aligned} W &= Fd = (100 \text{ N})(15 \text{ m}) = 1\,500 \text{ J};\\ P &= \frac{W}{t} = \frac{1\,500 \text{ J}}{20 \text{ s}} = 75 \text{ W}. \end{aligned}$$

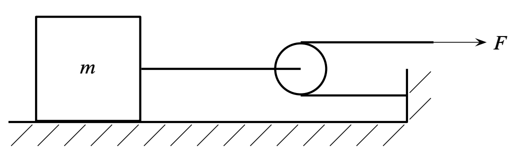
□

2.4 Estática

Diagrama de cuerpo libre

Reactivos: véase la página 142

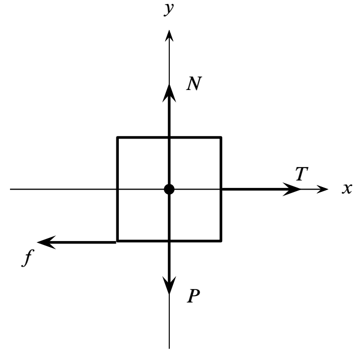
1. Considera el siguiente sistema de un bloque que se desliza sobre una superficie con fricción en el que F se aplica en el extremo libre de una cuerda que pasa por la polea.

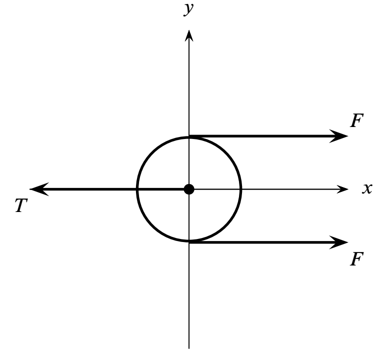


El diagrama de cuerpo libre para el bloque es: ________.

▼ La respuesta es A.

Los diagramas de cuerpo libre para el bloque y la polea son:





Donde T es la tensión de la cuerda que une a m con la polea. Se considera que la masa de la polea es cero; por lo tanto, de la segunda ley de Newton aplicada a la polea:

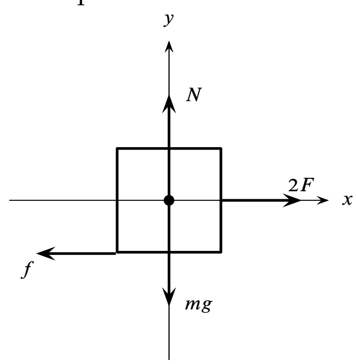
$$2F - T = 0 \;\Rightarrow\; T = 2F;$$

P es el peso del bloque m, esto es:

$$P = mg.$$

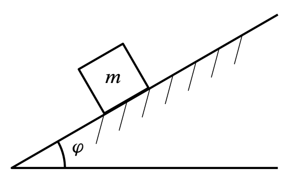
N, f son la fuerza de contacto y la fuerza de fricción, respectivamente, que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque m.

De esta forma el diagrama de cuerpo libre para m es:



□

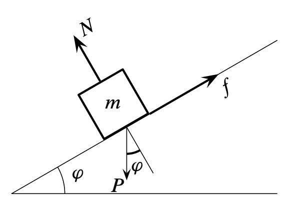
2. Para el bloque que se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado con fricción, como se muestra en la siguiente figura,



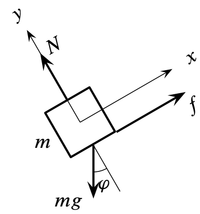
el diagrama de cuerpo libre es: ________.

▼ La respuesta es E.

Las fuerzas que actúan sobre m se ilustran enseguida:

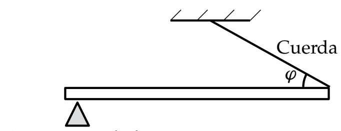


Donde $P = mg$ es el peso del bloque de masa m, N, f son la fuerza de contacto y la fuerza de fricción, respectivamente, que la superficie inclinada ejerce sobre m. El diagrama de cuerpo libre es:



□

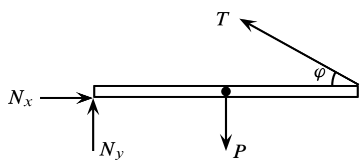
3. Para la viga de masa m que se muestra en la siguiente figura,



su diagrama de cuerpo libre es: ________.

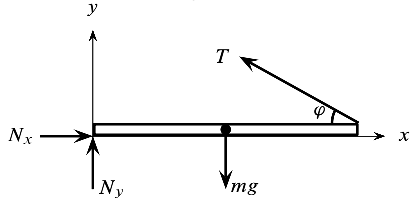
▼ La respuesta es E.

Las fuerzas que actúan sobre la viga de masa m se ilustran enseguida:



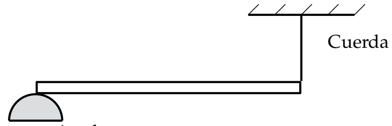
Donde $P = mg$ es el peso de la viga, T la tensión de la cuerda y N_x, N_y son las componentes x, y de la fuerza que el apoyo articulado ejerce sobre la viga.

Entonces el diagrama de cuerpo libre para la viga es:



□

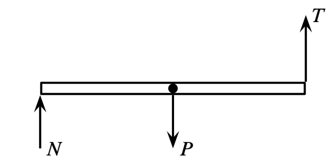
4. Para la viga de masa m que se muestra en la siguiente figura,



su diagrama de cuerpo libre es: ________.

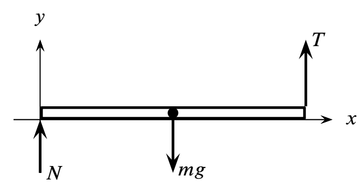
▼ La respuesta es B.

Las fuerzas aplicadas a la viga de masa m se ilustran enseguida:



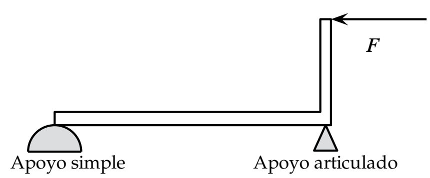
Donde $P = mg$ es el peso de la viga, N la fuerza que el apoyo simple ejerce sobre la viga y T la tensión de la cuerda.

Entonces el diagrama de cuerpo libre para la viga es:



□

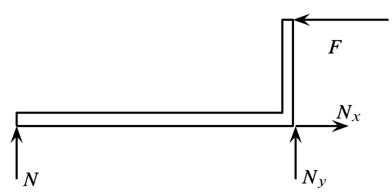
5. Para la estructura en L de masa despreciable que se muestra en la siguiente figura,



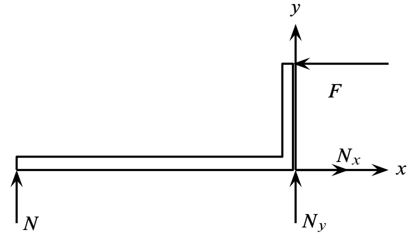
su diagrama de cuerpo libre es: ________.

▼ La respuesta es C.

Las fuerzas aplicadas a la estructura se ilustran enseguida:

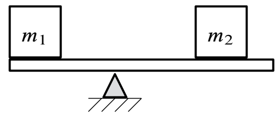


Donde N es la fuerza que ejerce el apoyo simple sobre la estructura y N_x, N_y son las componentes x, y de la fuerza ejercida por el apoyo articulado. Entonces el diagrama de cuerpo libre para la estructura es:



□

6. Para el brazo de la balanza que se muestra en la siguiente figura,

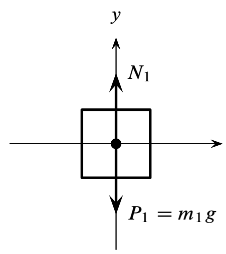


su diagrama de cuerpo libre es: ________.

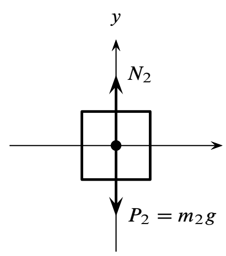
▼ La respuesta es E.

Los diagramas de cuerpo libre son:

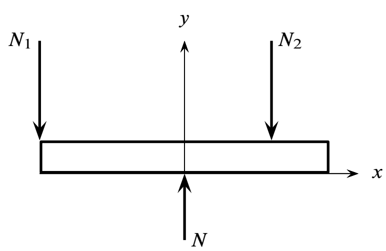
Para m_1



Para m_2



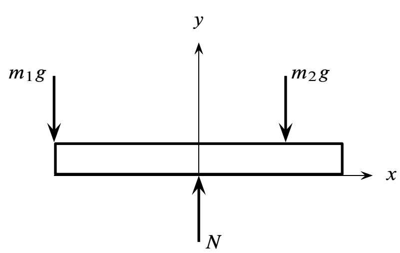
Para el brazo de la balanza:



Para el equilibrio de m_1, m_2 se tiene:

$$N_1 = P_1 = m_1 g \qquad \& \qquad N_2 = P_2 = m_2 g.$$

Entonces el diagrama de cuerpo libre para el brazo de la balanza es:



□

Equilibrio, momento de una fuerza y centro de gravedad

Reactivos: véase la página 149

1. Complete la siguiente definición:

   Un cuerpo puntual se encuentra en equilibrio cuando la ______ es ______ .

   ▼ La respuesta es D.

   La condición para el equilibrio de un cuerpo puntual es que la suma de las fuerzas aplicadas sea cero.

   □

2. Complete la siguiente definición:

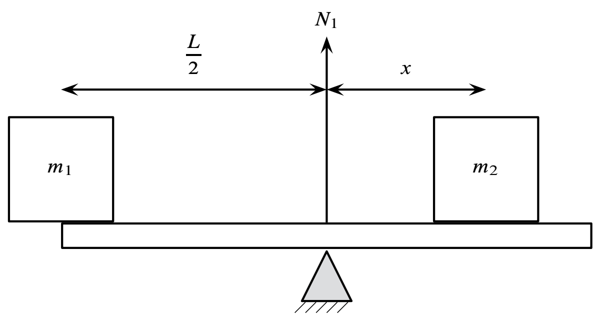
   Para el equilibrio de un cuerpo rígido se requiere lo siguiente: ______ .

   ▼ La respuesta es A.

   Las condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido son: que la suma de las fuerzas aplicadas sea cero y que la suma de las torcas también sea cero.

   □

3. Para la balanza, de longitud L, en equilibrio que se muestra en la siguiente figura,



considere: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, $L = 1$ m, $g = 10$ m/s^2.

El valor de la distancia x y la magnitud de la fuerza N_1 son: ______.

▼ La respuesta es E.

Para el equilibrio se requiere:

Suma de fuerzas igual a cero:

$$-m_1 g + N_1 - m_2 g = 0. \tag{*}$$

Suma de momentos de las fuerzas aplicadas es cero:

$$m_1 g \left(\frac{L}{2}\right) - m_2 g x = 0. \tag{**}$$

De (**):

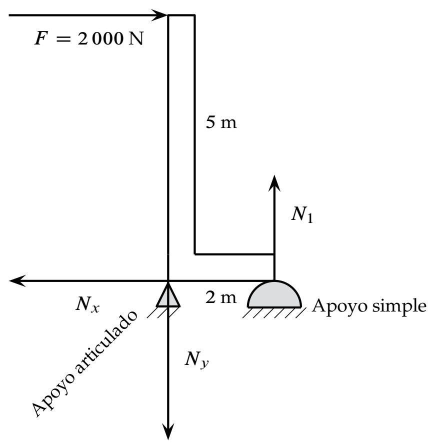
$$x = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2\text{ kg}}{4\text{ kg}}(0.5\text{ m}) = 0.25\text{ m}.$$

De (*):

$$N_1 = m_1 g + m_2 g = (2\text{ kg})(10\text{m/s}^2) + (4\text{ kg})(10\text{m/s}^2) = 60\text{ N}.$$

□

4. La estructura en L de masa despreciable, que se muestra en la siguiente figura, se encuentra en equilibrio.



Las magnitudes de las fuerzas N_1, N_x, N_y son: ________.

▼ La respuesta es A.

Para el equilibrio de la estructura se requiere:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; F - N_x = 0; \qquad (*)$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; N_1 - N_y = 0; \qquad (**)$$

$$\sum \vec{\tau}_i = 0 \;\Rightarrow\; -F(5\text{ m}) + N_1(2\text{ m}) = 0. \qquad (***)$$

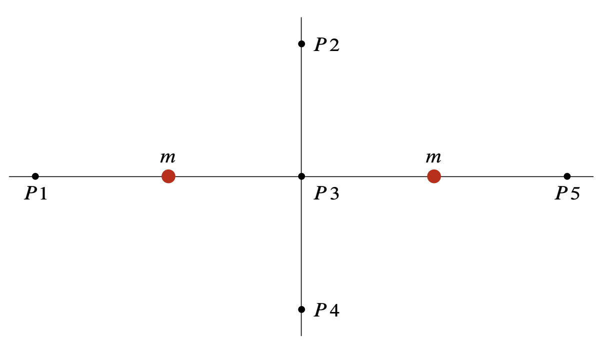
De (*) $\Rightarrow$ $N_x = F = 2\,000$ N.

De (***) $\Rightarrow$ $N_1 = \dfrac{F(5\text{ m})}{2\text{ m}} = \dfrac{(2\,000\text{ N})(5\text{ m})}{2\text{ m}} = 5\,000$ N.

De (**) $\Rightarrow$ $N_y = N_1 = 5\,000$ N.

□

5. El centro de masa de dos partículas con masas (m) iguales (véase la siguiente figura) es el punto: ________.

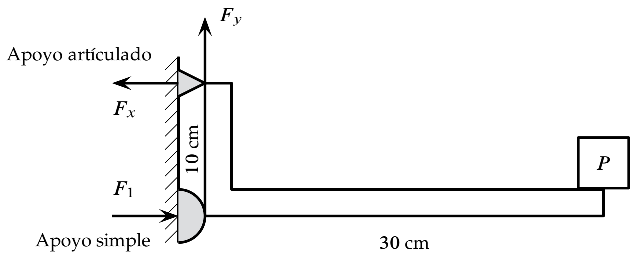


▼ La respuesta es E.

El centro de masa de dos partículas de igual masa coincide con el punto central del segmento de recta que las une.

□

6. La repisa en forma de L, que se muestra en la figura, soporta un peso $P = 100$ N.



Las fuerzas que aplican los apoyos sobre la repisa son: ________ .

▼ La respuesta es E.

Para el equilibrio de la repisa, se debe cumplir:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 - F_x = 0. \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y - P = 0. \tag{2}$$

$$\sum \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow -P(0.3) + F_1(0.1) = 0. \tag{3}$$

De la ecuación (2):

$$F_y = P = 100 \text{ N}.$$

De la ecuación (3):

$$F_1 = \frac{P(0.3)}{(0.1)} = \frac{100(0.3)}{0.1} = 300 \text{ N}.$$

De la ecuación (1):

$$F_x = F_1 = 300 \text{ N}.$$

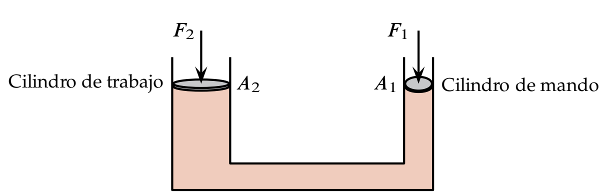
□

2.5 Hidrostática

Principio de Pascal

Reactivos: véase la página 152

1. Una prensa hidráulica se diseña para amplificar 100 veces la fuerza F_1 aplicada al cilindro de mando (véase la figura siguiente):



Si R_1 es el radio del cilindro de mando, el radio R_2 del cilindro de trabajo es igual a: ______.

▼ La respuesta es A.

Del principio de Pascal se tiene:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_1 A_2 = F_2 A_1 \Rightarrow F_1(\pi R_2^2) = F_2(\pi R_1^2) \quad (\text{considerando que } F_2 = 100F_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 R_2^2 = (100F_1)R_1^2 \Rightarrow R_2 = \sqrt{100R_1^2} \Rightarrow R_2 = 10R_1.$$

□

Densidad

Reactivos: véase la página 152

1. Sabiendo que la densidad del aire es 1.2 kg/m^3, la masa y el peso del aire contenido en un salón de dimensiones $6 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ son: ______.

   (Considera $g = 10 \text{ m/s}^2$).

   ▼ La respuesta es B.

   El volumen del salón es $V = (6 \text{ m})(8 \text{ m})(4 \text{ m}) = 192 \text{ m}^3$.

   La masa del aire contenida en el salón es:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = (1.2 \text{ kg/m}^3)(192 \text{ m}^3) = 230.4 \text{ kg}.$$

   El peso de esa masa de aire es:

$$P = mg = (230.4 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 2\,304 \text{ N}.$$

□

2. La densidad del agua y del oro son $\rho_A = 1\,000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_O = 20\,000 \text{ kg/m}^3$, por lo tanto el volumen de una tonelada de agua y el de una tonelada de oro son: ______.

   ▼ La respuesta es E.

   Tenemos:

$$\rho_A = \frac{m_A}{V_A} \Rightarrow V_A = \frac{m_A}{\rho_A} = \frac{1\,000 \text{ kg}}{1\,000 \text{ kg/m}^3} = 1 \text{ m}^3.$$

$$\rho_O = \frac{m_O}{V_O} \Rightarrow V_O = \frac{m_O}{\rho_O} = \frac{1\,000 \text{ kg}}{20\,000 \text{ kg/m}^3} = \frac{1}{20} \text{ m}^3 = 0.05 \text{ m}^3.$$

□

2.6 Electrostática

Carga eléctrica

Reactivos: véase la página 153

1. Relaciona las dos columnas; la respuesta es: ______.

   ▼ La respuesta es E.

   De acuerdo con las propiedades de la carga eléctrica y por evidencias experimentales:

- Por convención, al protón se le asigna carga positiva, y al electrón carga negativa, por lo que 1. se relaciona con c. y 2. con f.
- Dos cargas iguales en signo se repelen, mientras que dos cargas de signo distintas se atraen, de esta manera 3. se relaciona con e. y 4. con a.
- La unidad elemental de carga es la que posee el electrón, cuya magnitud es 1.6×10^{-19} C, 5. se relaciona con d.
- Un átomo de hidrógeno está configurado por un protón ($q_p = +1.6 \times 10^{-19}$ C) y por un electrón ($q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C); por lo tanto su carga total es:

$$q_h = q_p + q_e = 0 \text{ C};$$

  es decir, 6. se relaciona con b.

□

2. Completa la siguiente frase:

   Cuando una persona se peina, se transfieren electrones del pelo hacia el peine. Por la conservación de la carga, el pelo queda con carga ______ y el peine con ______ cantidad de carga ______.

   ▼ La respuesta es C.

   Es una evidencia experimental que, al frotar un peine (plástico) con el pelo de una persona, se transfiere una cantidad de carga negativa del pelo al peine, por lo tanto, el pelo queda con carga positiva y el peine con igual cantidad de carga negativa.

   □

3. Completar la frase.

   Debido a la fuerza repulsiva entre cargas del mismo signo y a la propiedad conductora de los metales, la carga depositada en una esfera metálica ______.

   ▼ La respuesta es C.

   Debido a la repulsión entre cargas del mismo signo, éstas tienden a separarse la mayor distancia. Al colocarlas en un cuerpo conductor, los puntos de mayor separación son la superficie de dicho cuerpo; por eso en una esfera conductora al depositar carga eléctrica, se distribuye uniformemente en la superficie.

   □

4. La densidad superficial de carga en una superficie de área A es $\sigma = \dfrac{Q}{A}$, donde Q es la carga total en la superficie. Considerando una lámina metálica (dos caras) de dimensiones 0.6 m $\times$ 0.01 m con una carga $Q = 3 \times 10^{-10}$ C, la densidad superficial de carga es: ______.

   ▼ La respuesta es A.

   La superficie total de una lámina de superfice A en cada cara es $2A$, por lo tanto:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{3 \times 10^{-10} \text{ C}}{2(0.6 \text{ m})(0.01 \text{ m})} = \frac{3 \times 10^{-10} \text{ C}}{0.012 \text{ m}^2} = 2.5 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2.$$

   □

5. Completar el texto siguiente.

   En un cuerpo no conductor, la carga depositada en él se puede distribuir uniformemente en su volumen. Para una esfera no conductora de radio R y carga Q, su densidad de carga es: ______ y la carga acumulada en una esfera de radio $R/2$, con la misma densidad, es: ______.

   ▼ La respuesta es D.

La densidad volumétrica de carga de una esfera de radio R con carga Q es:

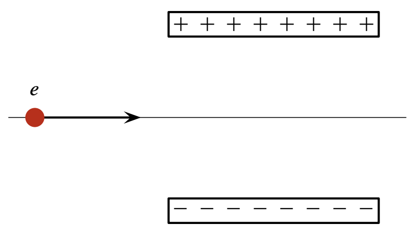
$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}.$$

Ahora, considerando una esfera de radio $R/2$ con igual densidad volumétrica de carga, la carga acumulada es:

$$Q' = \rho V' = \frac{3Q}{4\pi R^3}\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3\right] = \frac{3Q}{4\pi R^3}\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8} = \frac{Q}{8}.$$

□

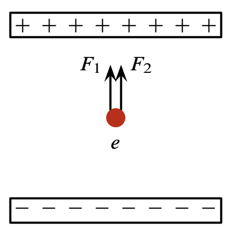
6. Un electrón se mueve en línea recta y penetra en el espacio entre las placas de un condensador cargado, como se muestra en la siguiente figura.



Dentro de las placas del condensador, el movimiento y la fuerza que actúa sobre el electrón es como se muestra en la elección que tu hagas: ________ .

▼ La respuesta es B.

El electrón e posee carga negativa. Al entrar al condensador, la placa positiva lo atrae con una fuerza vertica hacia arriba (F_1) y la placa negativa lo repele con una fuerza vertical hacia arriba (F_2).



Por lo tanto la fuerza resultante que actúa sobre e es $F = F_1 + F_2$ dirigida verticalmente hacia arriba.

□

Ley de Coulomb

Reactivos: véase la página 156

1. La magnitud de la fuerza eléctrica F que ejercen entre sí dos partículas de cargas q_1, q_2, separadas la distancia r, queda determinada por la ley de Coulomb. Si la distancia r se disminuye a la mitad, entonces la fuerza F ________ (elige la opción que corresponda).

▼ La respuesta es A.

De la ley de Coulomb:

$$F = K\frac{q_1q_2}{r^2}.$$

Para $r^* = \dfrac{r}{2}$:

$$F^* = K\frac{q_1q_2}{|r^*|^2} = K\frac{q_1q_2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = K\frac{q_1q_2}{\frac{r^2}{4}} = 4\left(K\frac{q_1q_2}{r^2}\right) = 4F.$$

Es decir, F se incrementa cuatro veces.

□

2. Completa el texto siguiente:

La ley de Coulomb establece que la magnitud de la fuerza que ejercen entre sí dos cargas eléctricas es ________ proporcional ________ de la distancia entre ellas ________ proporcional ________ de las magnitudes de las cargas.

▼ La respuesta es A.

La ley de Coulomb establece que la magnitud de la fuerza que ejercen entre sí dos cargas q_1, q_2, separadas la distancia r, está dada por:

$$F = K\frac{|q_1||q_2|}{r^2};$$

con $K = \text{cte}$. Es decir, dicha fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y directamente proporcional al producto de las magnitudes de las cargas.

□

3. La magnitud de la fuerza eléctrica F que ejercen entre sí dos partículas de cargas q_1, q_2, separadas la distancia r, queda determinada por la ley de Coulomb. Si se duplica el valor de las dos cargas, para mantener constante el valor de la fuerza F, la distancia r de separación debe: ________.

▼ La respuesta es A.

De la ley de Coulomb:

$$F = K\frac{q_1q_2}{r^2}.$$

Para $q_1^* = 2q_1$ y para $q_2^* = 2q_2$:

$$F^* = K\frac{q_1^*q_2^*}{(r^*)^2} = K\frac{(2q_1)(2q_2)}{(r^*)^2} = 4K\frac{q_1q_2}{(r^*)^2}.$$

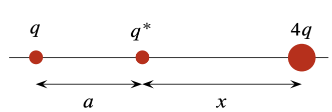
Se requiere que:

$$F^* = F \;\Rightarrow\; 4K\frac{q_1q_2}{(r^*)^2} = K\frac{q_1q_2}{r^2} \;\Rightarrow\; \frac{4}{(r^*)^2} = \frac{1}{r^2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 4r^2 = (r^*)^2 \;\Rightarrow\; r^* = \sqrt{4r^2} = 2r.$$

Es decir, la distancia debe duplicarse para mantener constante la fuerza F.

□

4. En el sistema de partículas cargadas mostrado en la figura siguiente:



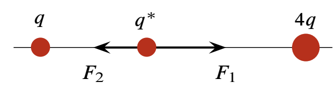
Se requiere que q^* esté en equilibrio. Por lo tanto la distancia x es: ________.

▼ La respuesta es C.

Las fuerzas F_1, F_2 ejercidas por q y por $4q$ tienen magnitudes:

$$F_1 = K\frac{qq^*}{a^2}, \qquad F_2 = K\frac{(4q)q^*}{x^2} = 4K\frac{qq^*}{x^2}.$$

Y actúan como se muestra en la figura siguiente:

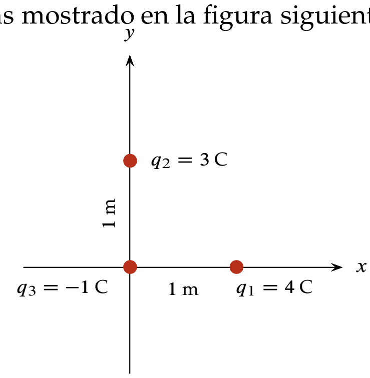


Para el equilibrio de q^* se requiere que:

$$F_2 = F_1 \Rightarrow 4K\frac{qq^*}{x^2} = K\frac{qq^*}{a^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{4}{x^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow 4a^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{4a^2} = 2a.$$

□

5. En el sistema de partículas cargadas mostrado en la figura siguiente,



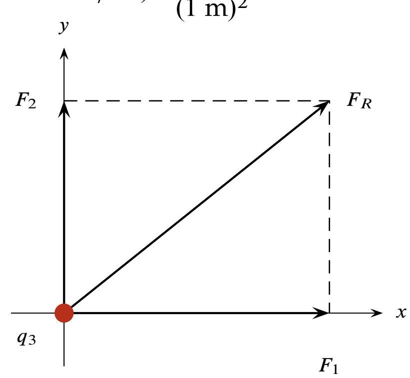
aplicando la ley de Coulomb, se obtiene que la fuerza resultante que actúa sobre q_3 tiene magnitud: ________ .

(La constante de Coulomb es $K = 9 \times 10^9$ Nm^2/C^2).

▼ La respuesta es A.

Por la ley de Coulomb, sobre q_3 se ejercen las fuerzas F_1, F_2 mostradas en la figura siguiente; con

$$F_1 = K\frac{|q_1q_3|}{r_1^2} = (9\times 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2)\frac{(4\ \text{C})(1\ \text{C})}{(1\ \text{m})^2} = 36\times 10^9\ \text{N} = (9\times 4)\times 10^9\ \text{N};$$
$$F_2 = K\frac{|q_2q_3|}{r_2^2} = (9\times 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2)\frac{(3\ \text{C})(1\ \text{C})}{(1\ \text{m})^2} = 27\times 10^9\ \text{N} = (9\times 3)\times 10^9\ \text{N}.$$



Por lo tanto, la fuerza resultante que actúa sobre q_3, tiene magnitud dada por:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(9\times 3\times 10^9\ \text{N})^2 + (9\times 4\times 10^9\ \text{N})^2} = \sqrt{(9)^2(3^2+4^2)(10^9\ \text{N})^2} =$$
$$= \sqrt{(9)^2(25)(10^9\ \text{N})^2} = \sqrt{(9)^2(5)^2(10^9\ \text{N})^2} = (9)(5)(10^9\ \text{N}) =$$
$$= 45\times 10^9\ \text{N} = 4.5\times 10^{10}\ \text{N}.$$

□

6. Relacionar las columnas que se muestran; encontrar la opción correspondiente: ________.

▼ La respuesta es A.

La ley de Coulomb establece que:

- Cargas del mismo signo se repelen, por lo tanto 4. se relaciona con b.
- Cargas de signo contrario se atraen, por lo tanto 3. se relaciona con f.
- La magnitud de la fuerza que se ejercen entre sí dos cargas, q_1, q_2 colocadas a la distancia r es:

$$F = K\frac{|q_1||q_2|}{r^2};$$

  con $K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

  Por lo tanto: 1., 2., 6. se relacionan con a. e., d., c., respectivamente.

La unidad de carga eléctrica en el SI es:

$$[q] = \text{C (coulomb)};$$

entonces: 5. se relaciona con a.

□

3. Química

3.1 Conceptos introductorios

La materia y los átomos

Reactivos: véase la página 159

1. Se sabe que la composición de la masa del agua (H_2O) es 88.8 % de oxígeno y 11.2 % de hidrógeno. ¿Qué cantidad de oxígeno se producirá al descomponer 175 g de agua?: ______.

   ▼ La respuesta es D.

   La composición en masa del agua se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\text{Masa molecular}\\
&\qquad\text{del } H_2O = \sum \text{masas atómicas de los elementos en el compuesto} =\\
&\qquad\qquad = (\text{masa atómica de H})\ (2 \text{ átomos de H}) + (\text{masa atómica de O})(1 \text{ átomo de O}) =\\
&\qquad\qquad = (1\ \text{g/mol})\ (2 \text{ átomos de H}) + (16\ \text{g/mol})\ (1 \text{ átomo de oxígeno}) =\\
&\qquad\qquad = (2\ \text{g/mol}) + (16\ \text{g/mol}) = 18\ \text{g/mol}.
\end{aligned}$$

   Para determinar la proporción en la que se encuentran presentes el oxígeno y el hidrógeno en el agua:

$$\text{Oxígeno: } \frac{16\ \text{g/mol}}{18\ \text{g/mol}} = 0.888\ (88.8\,\%) \qquad \text{Hidrógeno: } \frac{2\ \text{g/mol}}{18\ \text{g/mol}} = 0.112\ (11.2\,\%).$$

   En el problema tenemos como base de cálculo 175 g de H_2O; ahora bien, se sabe que el porcentaje de oxígeno en masa de agua es 88.8 %, entonces:

$$(175\ \text{g})(0.888) = 155.4\ \text{g de oxígeno}.$$

   Esto es, la masa del oxígeno al descomponer 175 g de agua es 155 g. Y al restar del total el oxígeno hallado, tenemos:

$$175\ \text{g} - 155.4\ \text{g} = 19.6\ \text{g de hidrógeno}.$$

   Por tanto, al descomponer 175 g de agua, se obtendrán 155.4 g de oxígeno y 19.6 g de hidrógeno.

   □

2. Todas las siguientes unidades se usan para medir la masa de un cuerpo, excepto: ______.

   ▼ La respuesta es C.

   Los gramos y kilogramos son unidades de masa empleados en el sistema internacional (SI); las onzas y las libras son también unidades de masa del sistema inglés. La unidad que no es utilizada para medir masa es el angstrom (Å), ésta es una unidad de longitud que equivale a 1×10^{-10} m.

   □

Propiedades de la materia

Reactivos: véase la página 160

1. La plata, el cobre y el oro presentan propiedades que los identifican como metales; indica cuál de las siguientes no es una propiedades física intensiva: ______.

   ▼ La respuesta es B.

   De las opciones, la única de las propiedades que depende de la masa de la sustancia, y que por lo tanto es una propiedad extensiva, es el volumen; el resto de las propiedades son intensivas, es decir, no dependen de la cantidad de masa del material. En general, el cociente de dos magnitudes extensivas nos da una magnitud intensiva; por *ejemplo*, la división entre masa y volumen resultará en una propiedad intensiva denominada densidad, propiedad que es independiente de la cantidad de substancia.

□

2. Las siguientes son descripciones de propiedades que corresponden a un elemento o a un compuesto, identificar cuál de ellas hace referencia a una propiedad química: ______.

▼ La respuesta es E.

Esta opción hace referencia a una reacción química en la cual se combinan el carbonato de calcio y un ácido para producir bióxido de carbono (CO_2) como resultado de esa reacción; es la única opción relacionada con las propiedades químicas de los elementos o compuestos que reaccionan. Las otras opciones tienen que ver con características o propiedades físicas de los elementos o compuestos, que no alteran la naturaleza e identidad de la materia de los elementos o compuestos que las presentan.

□

Estados de agregación

Reactivos: véase la página 162

1. El cambio de estado físico de líquido a vapor se denomina: ______.

▼ La respuesta es D.

La vaporización es el cambio de estado líquido a gaseoso; hay dos tipos de vaporización: la ebullición y la evaporación.

□

2. Cuando la materia se encuentra en estado sólido se caracteriza por poseer: ______.

▼ La respuesta es C.

Un cuerpo en estado sólido posee una forma y un volumen definidos, es decir, si se somete el cuerpo a una presión, no se observará un cambio significativo ya que los sólidos son prácticamente incompresibles.

Por otra parte, de los 3 estados de agregación, sólido, líquido y gas, el sólido es el que presenta el estado físico que reporta las más altas densidades, ya que las partículas en dicho estado físico se encuentran más compactadas y juntas, en comparación con el estado líquido y gaseoso.

□

Sustancias puras (elementos y compuestos)

Reactivos: véase la página 163

1. En la siguiente lista, las opciones representan compuestos que pueden ubicarse como sustancias elementales, excepto: ______.

▼ La respuesta es E.

El dióxido de carbono es un compuesto de dos elementos: carbono y oxígeno. El resto de las opciones, aunque son moléculas, representan sustancias simples al estar formadas de un solo tipo de átomos.

□

2. De las siguientes opciones, identificar cuál corresponde a una sustancia elemental: ______.

▼ La respuesta es C.

Todas las opciones, excepto la C., el aluminio, hacen referencia a compuestos formados por varios tipos de átomos. El aluminio por su parte es una sustancia elemental constituida por un solo tipo de átomos, en este caso un metal.

□

Mezclas homogéneas y heterogéneas

Reactivos: véase la página 164

1. Las siguientes son características de una mezcla heterogénea, excepto: ______.

   ▼ La respuesta es C.

   Esta opción es la única que no corresponde a las características de una mezcla heterogénea, ya que no puede afirmarse, en una mezcla de este tipo, que sus propiedades sean idénticas en cualquier parte de la misma.

   □

2. Los siguientes son ejemplos de mezclas homogéneas, excepto: ______.

   ▼ La respuesta es A.

   En esta opción los materiales de la mezcla pueden distinguirse entre sí. Si en un recipiente se tiene una mezcla de arena con agua de mar, se observará que la arena quedará en el fondo y el agua de mar (un líquido) aparecerá sobre ella.

   □

3.2 Estructura del átomo

Partículas subatómicas y fundamentales (protones, neutrones y electrones)

Reactivos: véase la página 165

1. Un átomo neutro, sin carga eléctrica, tiene el mismo número de: ______.

   ▼ La respuesta es D.

   Si el número de cargas positivas (protones) y negativas (electrones) es igual, el átomo es neutro.

   □

2. Partícula subatómica cuyo número permite identificar el tipo de elemento y así diferenciarlo de otros: ______.

   ▼ La respuesta es B.

   La partícula subatómica que permite distinguir un átomo de otro es el protón; de tal manera que dos átomos con diferentes números de protones corresponden a elementos distintos. Por *ejemplo* un átomo con un protón en su núcleo es el hidrógeno, con dos protones es el helio, con tres protones, es el litio y así sucesivamente (véase tabla periódica).

   □

3. Es una partícula subatómica con masa aproximada a la de un protón: ______.

   ▼ La respuesta es B.

   El neutrón es la partícula subatómica con masa casi igual a la del protón.

   □

Número atómico, número de masa e isótopos

Reactivos: véase la página 166

1. El átomo de uranio se presenta en la naturaleza como una mezcla de isótopos ¿en qué coinciden las variantes del uranio?: ______.

   ▼ La respuesta es E.

   Los isótopos son átomos de un mismo elemento que coinciden en su número de protones.

   □

2. En la tabla periódica de los elementos, el símbolo del átomo de bario (Ba) se acompaña de dos números: $^{137}_{56}$Ba; el número 56, representa su número de protones, ¿qué representa el número 137?: ________.

▼ La respuesta es C.

Los símbolos químicos de los elementos se acompañan generalmente con dos números: el número de masa y el número atómico, que indican el número de partículas subatómicas que poseen.

El número atómico se asocia al número de protones de un átomo.

Por su parte, el número de masa representa las partículas subatómicas que se ubican en el núcleo del átomo, es decir, numéricamente es la suma de protones y neutrones.

□

3. Para el átomo de polonio (Po) que tiene un número de masa de 209 y un número atómico de 84, ¿cuál es su número de neutrones?: ________.

▼ La respuesta es D.

Para conocer el número de partículas subatómicas de un átomo, es decir, sus protones, neutrones y electrones, se utilizan los valores que corresponden con su número de masa y su número atómico.

El número de protones del átomo se obtiene directamente del número atómico; en el caso del átomo de polonio es 84 protones.

Si se considera que el átomo está neutro, el número de electrones será igual al número de protones, entonces, el polonio tendrá 84 electrones.

Para determinar el número de neutrones, se emplea el valor del número de masa (A), que representa la suma de protones y neutrones y, a este valor, se le resta el número atómico Z (número de protones). Entonces para el polonio:

$$A - Z = \text{ número de neutrones } = (209) - (84) = 125 \text{ neutrones.}$$

□

Moléculas e iones

Reactivos: véase la página 167

1. Identificar cuál de los siguientes iones representa la pérdida de dos electrones: ________.

▼ La respuesta es B.

Cuando se pierde uno o más electrones, se forma un catión y éste se simboliza con un número que se coloca encima del extremo superior derecho del elemento, acompañado de un signo positivo. Observa que:

- Si el número de electrones en el átomo es menor que el de protones se tiene un catión (carga positiva).
- Si el número de electrones en el átomo es mayor que el de protones, se tiene un anión (carga negativa).
- El exceso o deficiencia de electrones se coloca en la parte superior derecha del símbolo del elemento con el número y signo que corresponda: (+) pérdida o (−) ganancia de electrones.

□

2. Cuando un átomo gana un electrón se transforma en un: ________.

▼ La respuesta es E.

Un anión es un átomo que ha ganado al menos un electrón y que está cargado negativamente.

Cuando el átomo se encuentra en estado neutro, el número de partículas subatómicas positivas (protones) es igual al número de partículas subatómicas negativas (electrones). Cuando esta condición se modifica por la pérdida o ganancia de electrones, se forma un ión, que puede ser positivo, si el átomo ha perdido electrones o negativo si los ha ganado.

□

Cantidad de sustancia (mol) y masa molar

Reactivos: véase la página 168

1. Determinar el número de moles que hay en 350 g de ácido sulfúrico, cuya fórmula es H_2SO_4.

Masas atómicas (g/mol): H (1), S (32), O (16).

Elige la opción correcta: ________.

▼ La respuesta es B.

Un mol de H_2SO_4 tiene una masa molar equivalente a su masa molecular expresada en gramos.

La masa molecular del H_2SO_4 se determina a partir de la suma de las masas atómicas de los elementos que forman el compuesto; hacemos esta suma:

$$\begin{array}{rl}
\text{H: } 2 \times 1 \text{ g/mol} = 2 \text{ g/mol} & \\
\text{S: } 1 \times 32 \text{ g/mol} = 32 \text{ g/mol} & + \\
\text{O: } 4 \times 16 \text{ g/mol} = 64 \text{ g/mol} & \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{98 \text{ g/mol (es la masa molar del } H_2SO_4).}
\end{array}$$

Entonces, un mol de H_2SO_4 tiene una masa molar de 98 g.

Por lo tanto, en 350 g de H_2SO_4 hay $\frac{350}{98} = 35.7$ moles de H_2SO_4.

□

2. ¿Cuántas moléculas de glucosa ($C_6H_{12}O_6$) hay en 100 g del compuesto?

Masa atómica (g/mol): H (1), C (12), O (16).

Elige la opción correcta: ________.

▼ La respuesta es D.

La masa molecular de $C_6H_{12}O_6$ se determina a partir de la suma de las masas atómicas de los elementos que forman el compuesto; hacemos la suma:

$$\begin{array}{rl}
\text{H: } 12 \times 1 \text{ g/mol} = 12 \text{ g/mol} & \\
\text{C: } 6 \times 12 \text{ g/mol} = 72 \text{ g/mol} & + \\
\text{O: } 6 \times 16 \text{ g/mol} = 96 \text{ g/mol} & \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{180 \text{ g/mol es la masa molar de la glucosa } (C_6H_{12}O_6).}
\end{array}$$

Entonces, un mol de $C_6H_{12}O_6$ tiene una masa molar de 180 g.

En 100 g de $C_6H_{12}O_6$ hay $\frac{100}{180} = 0.55$ moles de $C_6H_{12}O_6$.

Por lo tanto, el número de moléculas que hay en 100 g del compuesto es:

$$0.55 \times 6.022 \times 10^{23} = 3.34 \times 10^{23}.$$

□

3.3 Tabla periódica

Símbolos y fórmulas químicas

Reactivos: véase la página 170

1. Identificar los símbolos químicos de los siguientes elementos: potasio, plata, fósforo, estaño. ________.

▼ La respuesta es D.

Los símbolos químicos de los elementos se muestran en la tabla periódica; los nombres de los elementos, se asignan, entre otros criterios, con base en lo siguiente:

- Por su lugar de origen:
  Magnesio (Mg), de Magnesia, comarca de Tesalia en Grecia.
  Galio (Ga), de Galia, nombre latino dado a Francia.
- Nombres de científicos:
  Curio (Cm), en honor de Pierre y Marie Curie.
  Einstenio (Es), en honor de Albert Einstein.
  Mendelevio (Md), en honor al químico ruso Dmitri Ivanovich Mendeleiev, creador de la tabla periódica moderna.
- Nombre de algún planeta:
  Mercurio (Mg); uranio (U); neptunio (Np); plutonio (Pu); cerio (Ce), por el asteroide Ceres.

Respecto de los elementos de la pregunta:

- Potasio (K), proviene del griego *kalium*, también se dice que su nombre proviene del inglés *pot ashes* (cenizas de vasija).
  Plata (Ag), del latín *argentum*, el nombre deriva de sus propiedades externas; la plata tiene un color brillante y blanquecino.
  Fósforo (P), del griego *phosphoros*, que significa portador de luz.
  Estaño (Sn), el nombre proviene del latín *stannum*.

□

2. Si se sabe que en la fórmula molecular del acetileno se tienen 2 átomos de hidrógeno y 2 de carbono, ¿cuál es la fórmula empírica y la masa molecular de este compuesto?

Masas atómicas H, (1 u); C, (12 u).

Elige la opción correcta: ________.

▼ La respuesta es A.

La fórmula molecular del acetileno es C_2H_2, la cual indica que cada molécula está formada por 2 átomos de carbono y 2 átomos de hidrógeno.

La fórmula empírica del acetileno es CH, la cual indica que el acetileno tiene átomos de carbono e hidrógeno en la proporción 1 a 1.

La suma de las masas atómicas de todos sus átomos equivale a su masa molecular. Un átomo de carbono tiene una masa de 12 unidades, un átomo de hidrógeno de 1.008 unidades, por lo tanto la masa molecular del acetileno será:

$$(2 \times 12) + (2 \times 1.008) = 26.016 \text{ uma.}$$

□

Grupos o familias, periodos y bloques

Reactivos: véase la página 172

1. Son elementos que forman parte del grupo de los halógenos: ______.

▼ La respuesta es A.

El grupo VII corresponde a los halógenos y se encuentra formado por los siguientes elementos:

Flúor (F), cloro (Cl), bromo (Br), yodo (I) y astato (At).

□

2. En la tabla periódica, los elementos químicos con propiedades similares se ubican en un mismo: ______.

▼ La respuesta es D.

Los elementos que se ubican en un mismo grupo en la tabla periódica tienen propiedades similares, ya que su agrupación considera su coincidencia en cuanto a sus electrones del nivel de valencia. Por ejemplo, los gases nobles que se encuentran en el grupo 18 (VIII) tienen 8 electrones de valencia en su último nivel, excepto el helio que sólo tiene 2, lo cual hace que tengan configuraciones que cumplen el octeto (ns^2np^6); esto tiene como consecuencia una baja reactividad en todos ellos.

□

Propiedades periódicas

Reactivos: véase la página 174

1. Al avanzar de izquierda a derecha en un periodo, los elementos presentan un aumento de las siguientes propiedades periodicas, excepto de: ______.

▼ La respuesta es B.

Al avanzar en un periodo de izquierda a derecha todas las propiedades consideradas se incrementan excepto el radio atómico el cual disminuye.

□

2. Seleccionar 2 de las siguientes propiedades que muestren un aumento al recorrer de abajo hacia arriba un grupo de la tabla periódica. Elige la opción que corresponda: ______.

▼ La respuesta es C.

Tanto el radio atómico, como el carácter metálico de los elementos disminuyen de arriba a abajo en los grupos de la tabla periódica.

□

3.4 Enlace químico

Principios de enlace químico

Reactivos: véase la página 178

1. La configuración electrónica del sodio (Na), que tiene número atómico 11 y número de masa 23, es: ________.

▼ La respuesta es A.

La configuración electrónica de cualquier elemento se hace con base al número atómico del elemento, aplicando los principios y reglas mencionadas. En este caso los 11 electrones del sodio se distribuyen en niveles y subniveles, de la siguiente manera:

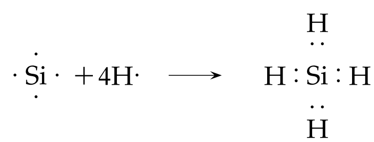
$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1.$$

□

2. ¿Cómo se representa la formación del SiH_4 utilizando la estructura de Lewis?: ________.

▼ La respuesta es E.

El silicio se ubica en el grupo IV de la tabla periódica, por lo que tiene 4 electrones de valencia; el hidrógeno, en el grupo I y tiene 1 electrón de valencia. Para completar su octeto, al unirse el silicio con el hidrógeno queda rodeado de 8 electrones y cada átomo de hidrógeno con 2 electrónes; de esa forma ambos átomos adquieren una configuración estable equivalente a la de un gas noble, como se muestra a continuación.



□

Enlace iónico o electrovalente

Reactivos: véase la página 179

1. Un compuesto iónico es la unión química de: ________.

▼ La respuesta es E.

Para que ocurra un enlace iónico, es necesario que exista una marcada diferencia de electronegatividades entre los átomos que participan en la unión, es decir, entre el metal y el no metal.

□

2. Determina algunas características de un compuesto iónico: ________.

▼ La respuesta es D.

Los compuestos iónicos presentan propiedades tales como dureza o fragilidad; no conducen la corriente eléctrica, ni el calor y son solubles en solventes polares.

□

Enlace covalente

Reactivos: véase la página 181

1. Entre los átomos de los siguientes elementos, ¿cuáles pueden unirse mediante enlace covalente?: ________.

▼ La respuesta es E.

Carbono, oxígeno, cloro y flúor son no metales; sodio, plata y calcio son metales; y argón es un gas noble.

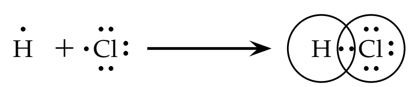
El enlace covalente ocurre cuando un no metal reacciona con otro no metal. En este caso carbono y oxígeno.

□

2. Si en el HCl existe una diferencia de electronegatividades de 0.9, el enlace es de tipo: ________.

▼ La respuesta es E.

Si en el HCl se cumple: $3.0-2.1 = 0.9$, el enlace es covalente debido a que la diferencia de electronegatividad es menor que 1.7:



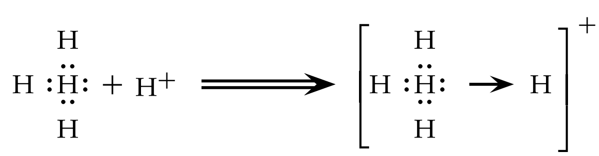
Compartición de electrones
(1 enlace covalente)

□

3. En el ión amonio NH_4^+, el átomo de nitrógeno aporta un par de electrones para la formación de un enlace al que se denomina: ________.

▼ La respuesta es C.

En la formación del catión amonio, NH_4^+, a partir del amoníaco (NH_3), y del ión de hidrógeno (H^+), el amoníaco aporta un par de electrones que son compartidos por el ión H^+, el cual adquiere de esta forma la configuración estable del gas noble He.



En el NH_4^+ hay 3 enlaces covalentes normales y un enlace covalente coordinado.

□

Enlace metálico

Reactivos: véase la página 183

1. El enlace metálico sucede entre: ________.

▼ La respuesta es D.

En el enlace metálico los núcleos del metal o iones positivos (cationes) se encuentran rodeados de una nube de electrones (negativos) que son compartidos por todos los átomos del metal. Como cationes y electrones están opuestamente cargados, éstos se mantienen unidos por fuerzas de atracción electrostática.

□

2. De los siguientes compuestos señala cuáles son de tipo metálico. Elige la opción: ______.

▼ La respuesta es D.

Los metales son estructuras con un gran número de átomos que se mantienen unidos por enlaces metálicos. Los compuestos hierro, cobre y sodio están constituidos por átomos metálicos unidos mediante enlace metálico.

□

3. Las siguientes son propiedades de los metales, excepto: ______.

▼ La respuesta es B.

Ningún metal se disuelve en agua; los electrones no pueden pasar a la disolución y los cationes no pueden disolverse por ellos mismos. El enlace metálico permite explicar el resto de las propiedades.

□

Interacciones por puente de hidrógeno

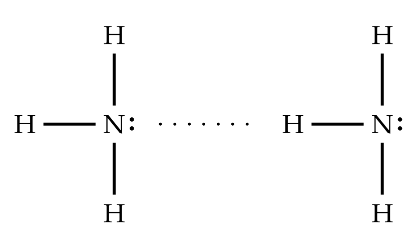
Reactivos: véase la página 184

1. De las siguientes sustancias, ¿en cuál está presente la interacción por puente de hidrógeno? Escribe la opción: ______.

▼ La respuesta es A.

Los 5 compuestos contienen hidrógeno, pero la interacción por puente de hidrógeno se presenta cuando el hidrógeno está unido directamente a N, O o F, debiendo haber un par de electrones no compartidos en el átomo electronegativo (por lo regular N, O o F) de una molécula cercana.

Con base en lo anterior, quedan eliminadas las sustancias H_2S, CH_4, HCl y PH_3 debido a que no contienen H unido a N, O o F, lo cual si sucede con el NH_3:



□

2. De las siguientes parejas de compuestos, indica cuál puede formar puentes de hidrógeno: ______.

▼ La respuesta es A.

Ya que tanto el oxígeno como el nitrógeno son elementos muy electronegativos y, por otra parte, ambos cuentan con pares de electrones libres que podrán interaccionar con un átomo de hidrógeno de otra molécula de agua (H_2O) o amoníaco (NH_3) que a su vez esté unido a un elemento muy electronegativo.

Si se compara el H_2O con el H_2S, se esperaría que fueran compuestos muy parecidos ya que el oxígeno y el azufre pertenecen al mismo grupo (VIA), es decir, tienen propiedades parecidas; sin embargo la diferencia es que el oxígeno es más electronegativo. El agua es una molécula polar y puede formar puentes de hidrógeno, mientras que el ácido sulfhídrico (H_2S) es no polar y no tiene dicha capacidad. El resto de las opciones no cumplen con los requisitos para la formación de puente de hidrógeno.

□

3.5 Nomenclatura

Iones mono y poliatómicos

Reactivos: véase la página 189

1. ¿Cuáles de los siguientes iones tienen el nombre incorrecto?: ________.

▼ La respuesta es A.

a. El nombre correcto del Fe^{2+} es ión hierro (II), pues su estado de oxidación[104] es 2+ que debe de indicarse con números romanos entre paréntesis (esto es, sus cargas positivas son dos).

b. El nombre correcto del ión NO_2^- es ión nitrito, debido a que procede de un ácido que termina en –oso (ácido nitroso, HNO_2).

□

2. Asignar el nombre correcto a los siguientes aniones, relacionando ambas columnas: ________.

▼ La respuesta es A.

Al incrementarse el estado de oxidación del cloro (1+, 3+, 5+, o 7+), aumenta el número de átomos de oxígeno en sus polianiones, denominándose hipoclorito, clorito, clorato, hiperclorato, respectivamente, los que provienen de los ácidos hipocloroso, cloroso, clórico, hiperclórico, también respectivamente.

□

Óxidos metálicos y no metálicos

Reactivos: véase la página 191

1. Si el Fe tiene una valencia de +3 en el óxido Fe_2O_3, elige la opción que presenta la nomenclatura tradicional, sistemática y de Stock, respectivamente: ________.

▼ La respuesta es D.

El Fe (hierro) tiene valencias de +2 y +3. En el Fe_2O_3, el Fe está actuando con +3.

En la nomenclatura tradicional se emplea el sufijo –oso si el elemento actúa con la valencia menor y el sufijo –ico si actúa con la mayor. En Fe_2O_3, el fierro (Fe) está actuando con la valencia mayor (+3); por lo tanto, deberá nombrarse con el sufijo –ico, es decir, óxido férrico.

En la nomenclatura sistemática, debido a que el Fe tiene más de una valencia, deben indicarse los subíndices del anión O^- y el del Fe, con el prefijo correspondiente; por lo tanto, el nombre sistemático del Fe_2O_3 es trióxido de dihierro.

104. El estado de oxidación de un elemento, que forma parte de un compuesto u otra especie química, se considera como la carga aparente con la que dicho elemento está funcionando en ese compuesto o especie. Los estados de oxidación se denotan en los nombres químicos mediante números romanos, entre paréntesis, después del elemento de interés.

Por último, debido a que el Fe tiene más de una valencia, se indica el valor de ésta en números romanos, entre paréntesis. Como en este caso está actuando con valencia +3, según la nomenclature de Stock, es óxido de hierro (III).

□

2. Elige los nombre de los óxidos enlistados a la izquierda con base en las nomenclaturas de Stock y tradicional y relaciónalos con la columna de la derecha: ________ .

   ▼ La respuesta es E.

   El S (azufre) tiene valencias de −2, +2, +4 y +6. En los óxidos SO, SO_2 y SO_3, el S actúa con valencia +2, +4 y +6, respectivamente.

   El nombre tradicional se forma con la palabra anhídrido, seguida del nombre del no metal terminada en –oso o en –ico, según su valencia sea menor o mayor, respectivamente, pero por otra parte, como se forman más de dos anhídridos, se antepone el prefijo hipo– al de menor valencia (+2).

   Si se utiliza la nomenclatura de Stock, se indican los números de oxidación con números romanos entre paréntesis después del nombre del óxido. Si en los óxidos SO, SO_2 y SO_3, el S actúa con valencia +2, +4 y +6, respectivamente, con esta nomenclatura tenemos: óxido de azufre (II), óxido de azufre (IV) y óxido de azufre (VI).

□

Hidruros

Reactivos: véase la página 193

1. Da los nombres de Stock de los siguientes hidruros metálicos: CuH_2, KH, AlH_3. ________ .

   ▼ La respuesta es B.

   El Cu tiene números de valencia de +1 y +2. En el CuH_2, el Cu actúa con número de valencia de +2, por lo tanto, según la nomenclatura de Stock se denomina hidruro de cobre (II).

   Tanto el K como el Al tienen un solo número de valencia, por lo tanto, según la nomenclatura de Stock para KH y AlH_3 no se escribe nada entre paréntesis, esto es, se escribe simplemente hidruro de potasio e hidruro de aluminio, respectivamente.

□

2. Del listado de la derecha, elige la fórmula correcta para los hidruros no metálicos de la izquierda: ________ .

   ▼ La respuesta es B.

   Hay que recordar que los hidruros que forma el H con número de oxidación de +1 con el C, Si, N, P, As, Sb y O no se rigen por ninguna regla de nomenclatura, tienen nombres propios aceptados por la IUPAC, por lo tanto es necesario memorizarlos.

□

Hidrácidos

Reactivos: véase la página 195

1. El nombre del HF_{ac} es ________ y el del HI_{ac} es: ________ .

   ▼ La respuesta es D.

   Recordar que los compuestos formados por hidrógeno y un no metal del grupo 17 que normalmente se encuentran en estado gaseoso, al disolverse en agua, forman hidrácidos, nombrándose con el prefijo ácido y el sufijo hídrico.

□

Oxiácidos

Reactivos: véase la página 197

1. ¿Cuál es el nombre correcto del HNO_3?: ________.

▼ La respuesta es B.

Para asignar el nombre correcto de este oxiácido, es necesario conocer el número de oxidación del N (átomo central).

Para determinar el número de oxidación con que actúa el N, se requiere saber cuál es el número de oxidación del O, que es 2; como hay 3 oxígenos, el número de oxidación del O es 6. Luego, si al 6 se le resta el número de oxidación del H (en este caso $= 1$), resulta que el número de oxidación del N es $+5$.

Debido a que el N tiene números de oxidación de $+1$, $+3$, $+5$, y en éste oxiácido actúa con número de oxidación $+5$, le corresponde el sufijo –ico, por lo tanto, el nombre correcto es ácido nítrico.

Num. de oxidación	*Fórmula*	*Nombre*
1	HNO	Ácido hiponitroso
3	HNO_2	Ácido nitroso
5	HNO_3	Ácido nítrico

□

2. Si los números de oxidación del Br (bromo) son $+1$, $+3$, $+5$, $+7$, ¿cuáles son los nombres de los oxiácidos que se forman cuando el Br actúa con $+3$ y con $+7$ respectivamente?: ________.

▼ La respuesta es A.

Para nombrar los oxiácidos se usan los prefijos hipo–, per– y sufijos –oso, –ico, que indican el número de oxidación del elemento central del ácido, de menor a mayor, es decir:

Número de oxidación	*Ácido*
Más bajo	hipo– $\cdots$ –oso
Bajo	–oso
Alto	–ico
Más alto	per– $\cdots$ –ico

Si el bromo tiene los números de oxidación $+1$, $+3$, $+5$, $+7$ y, sabiendo que la fórmula general para los oxiácidos es H $+$ no metal $+$ O:

Núm. de oxidación	*Fórmula*	*Nombre*
1	HClO	Ácido hipobromoso
3	$HClO_2$	Ácido bromoso
5	$HClO_3$	Ácido brómico
7	$HClO_4$	Ácido perbrómico

□

Hidróxidos

Reactivos: véase la página 198

1. En la siguiente tabla, el nombre sistemático para el $Mn(OH)_4$ es ________, mientras que el nombre de Stock para el $Pb(OH)_2$ es: ________ .

▼ La respuesta es D.

Siguiendo la regla de la nomenclatura sistemática, el $Mn(OH)_4$ se nombra con la palabra hidróxido + de + el nombre del metal. Para el manganeso Mn que tiene más de una valencia, en este caso 4, se antepone el prefijo tetra–, por lo tanto el nombre correcto es tetrahidróxido de manganeso.

De manera análoga para el $Pb(OH)_2$, el nombre de Stock se asigna escribiendo la valencia con números romanos y entre paréntesis, entonces queda: hidróxido de plomo (II).

□

2. Elige la fórmula correcta de los siguientes hidróxidos, relacionando ambas columnas : ________.

▼ La respuesta es D.

En la nomenclatura de Stock, los hidróxidos se nombran usando la palabra hidróxido + de + el nombre del metal, indicando enseguida la valencia del metal con números romanos entre paréntesis, los cuales corresponden al subíndice del oxhidrilo OH_v.

□

Sales

Reactivos: véase la página 202

1. Usando la nomenclatura de Stock, nombra las siguientes sales binarias: Fe_2S_3, PbI_2, KCl. Escribe la opción correcta: ________.

▼ La respuesta es C.

En el Fe_2S_3: S = no metal y Fe = metal, con número de oxidación 3.

En el PbI_2: I = no metal y Pb = metal, con número de oxidación 2.

En el KCl: K = no metal y K = metal, con número de oxidación 1.[105]

De acuerdo con la nomenclatura de Stock: "no metal con sufijo –uro + de + nombre del metal + entre paréntesis el número de oxidación con números romanos".

□

Hidrocarburos (alcanos, alquenos y alquinos)

Reactivos: véase la página 206

1. De acuerdo con la IUPAC, el compuesto de la izquierda se denomina ________, y el de la derecha ________.

▼ La respuesta es D.

- El primer compuesto se numera de izquierda a derecha debido a que el doble enlace está más próximo en ese extremo. Como tiene 5 átomos de carbono y el doble enlace se ubica en el carbono 2, el nombre del compuesto se determina con el número 2, el prefijo pent– y el sufijo –eno por tratarse de un doble enlace, por tanto el nombre del compuesto es 2–penteno.

105. Cuando el número de oxidación es 1 no es necesario indicarlo.

- El segundo compuesto se numera de derecha a izquierda por ser el lado más próximo donde se encuentra el triple enlace. Como tiene 7 átomos de carbono y el triple enlace se ubica en el carbono 1, el nombre del compuesto se determina con el número 1, el prefijo hept– y el sufijo –ino, por tratarse de un triple enlace, por tanto el nombre sistemático del compuesto es 1–heptino.

□

2. Indica el nombre del siguiente compuesto usando el sistema de nomenclatura IUPAC: ______.

▼ La respuesta es D.

- Debido a que el compuesto sólo presenta enlaces sencillos, se trata de un alcano.
- La cadena continua más larga va del grupo metilo inferior derecho, al grupo metilo superior derecho, la cual tiene 6 átomos, por tanto se trata de un hexano.
- Hay un grupo metilo que se ramifica de la cadena principal, por tanto, se trata de metilhexano.
- Para especificar la ubicación del grupo metilo se deben enumerar los átomos de carbono desde el extremo que asigna el número más pequeño a los carbonos que tienen cadenas laterales. Esto significa que la numeración debe comenzar en el carbono inferior derecho.
- Hay un grupo metilo en el carbono 3, por tanto, el nombre sistemático del compuesto es: 3–metilhexano.

□

3.6 Reacciones químicas

Tipos de reacciones químicas (síntesis, decomposición y desplazamiento)

Reactivos: véase la página 207

1. Del siguiente listado, ¿cuáles son reacciones de desplazamiento o simple sustitución? Indica la opción: ______.

▼ La respuesta es C.

Las reacciones de desplazamiento se pueden agrupar en 3 tipos, en los cuales:

- El metal de una sal[106] es desplazado por otro metal.
- Un metal desplaza al hidrógeno de un ácido.
- El no metal de una sal es desplazado o sustituido por otro no metal.

En la reacción 1, el metal $Cu_{(s)}$ de la sal $CuSO_{4(ac)}$ es desplazado o sustituido por el metal Fe, formándose la sal $FeSO_{4(ac)}$.

En la reacción 4, el metal Sn, ha desplazado al H en el HCl para formar el $SnCl_{2(ac)}$.

En la reacción 5, el no metal Br del NaBr es desplazado o sustituido por el no metal Cl_2 para formar el NaCl.

□

2. Para las siguientes reacciones, en el orden en que se encuentran, indicar el tipo de reacción: ______.

▼ La respuesta es C.

106. Una sal es un compuesto iónico formado por un metal (catión) más un radical (anión). Las sales son el producto de una reacción química entre una base, quien proporciona el catión, y un ácido, quien proporciona el anión. Un *ejemplo* es el cloruro de sodio (NaCl), producto de la reacción entre la base hidróxido de sodio (NaOH) y el ácido clorhídrico (HCl).

- En la reacción 1, se combinan dos elementos (Al, O_2), para formar un compuesto (Al_2O_3); por lo tanto, es una reacción de síntesis.
- En la reacción 2, suceden dos desplazamientos, ya que en el compuesto $AgNO_3$ se sustituye el NO_3 por el Cl para formar AgCl y, en el compuesto HCl, se sustituye el Cl por el NO_3; para formar el HNO_3, por lo tanto, es una reacción de doble desplazamiento.
- En la reacción 3, el compuesto $CaCO_3$ se ha descompuesto en dos: CaO, CO_2; por lo tanto, es una reacción de descomposición.
- En la reacción 4, dos compuestos (SO_3, H_2O) se han combinado para formar otro (H_2SO_4); por lo tanto, es una reacción de síntesis.

□

Reacciones ácido–base

Reactivos: véase la página 209

1. De las siguientes reacciones, ¿cuáles corresponden al tipo ácido–base? Elige la opción: ______.

▼ La respuesta es A.

Ambas reacciones ocurren entre un ácido y una base, obteniendo como productos una sal y agua.

En la reacción 1, el ión Br^- del ácido bromhídrico HBr reacciona con el ión NH_4^+ de la base hidróxido de amonio NH_4OH, formándose la sal bromuro de amonio NH_4Br.

Por otra parte, en la reacción 4, el ión SO_4 del ácido sulfúrico H_2SO_4 reacciona con el ión Na^+ de la base hidróxido de sodio NaOH, para formar la sal sulfato de sodio $NaSO_4$.

En ambas reacciones, el ión H^+ del ácido reacciona con el ión OH^- de la base, formándose agua.

□

2. Con base en la teoría Brønsted-Lowry, indicar cuál afirmación es cierta para la siguiente reacción en solución acuosa. Elige qué opción corresponde: ______.

▼ La respuesta es A.

En la reacción se observa que los pares ácido–base conjugados quedarían de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} HCl_{(g)} & + & H_2O_{(l)} & \longrightarrow & H_3O^+_{(ac)} & + & Cl^-_{(ac)} \\ \text{Ácido} & & \text{base} & & \text{ácido} & & \text{base} \\ & & & & \text{conjugado} & & \text{conjugada} \end{array}$$

Por tanto, el ácido clorhídrico HCl cede un protón (H^+)[107] a la base agua H_2O para formar la base conjugada del ácido Cl^- y el ácido conjugado de la base hidrónio H_3O^+.

De acuerdo con lo anterior, el ión Cl^- es la base conjugada del ácido clorhídrico HCl; de la misma forma, el ión hidronio H_3O^+ es el ácido conjugado del H_2O.

□

107. El protón (H^+) es el ión positivo más simple que se obtiene cuando se elimina el único electrón que posee el átomo de hidrógeno. El protón, al igual que el electrón, es una partícula fundamental, pero 1 836 veces más pesada. El símbolo químico del hidrógeno es H, pero el del protón es H^+.

Reacciones de combustión

Reactivos: véase la página 211

1. De las siguientes opciones, eligir la que no corresponde a una reacción de combustión: ______.

   ▼ La respuesta es D.

   Ya que en esta opción los productos de la reacción no corresponden a las que se generan en una combustión, N_2, CO_2, SO_2 o agua como ya sabemos.

   En las reacciones B., C., E., el benceno C_6H_6, el naftaleno $C_{10}H_8$ y el etileno C_2H_4, respectivamente, son hidrocarburos[108] (combustibles) que están reaccionando con el O_2 (comburente), donde los productos de estas tres reacciones son el dióxido de carbono CO_2 y el agua H_2O, que son los más comunes. Asimismo, se libera energía, debido a que son reacciones exotérmicas, por lo que una de sus aplicaciones más importantes es como fuente de energía con fines industriales y domésticos.

   Por otra parte, en la reacción B., la hidracina N_2H_4 al reaccionar con el O_2 produce N_2, que es otro de los productos de la combustión, así como también emite una gran cantidad de energía, por lo cual se emplea como combustible de cohetes.

   □

2. De las siguientes reacciones, ¿cuáles corresponden a combustión incompleta?: ______.

   ▼ La respuesta es A.

   La combustión incompleta[109] de un carburante da generalmente como resultado la producción de monóxido de carbono más agua: CO[110] más H_2O; otro producto de la combustión incompleta es el carbón (C) u hollín,[111] por lo tanto la respuesta correcta es la opción A.

   La combustión completa da como resultado la producción de dióxido de carbono CO_2[112] más H_2O.

   □

Reacciones óxido–reducción

Reactivos: véase la página 213

1. Del siguiente listado, determinar el número de oxidación del elemento en color: ______.

   ▼ La respuesta es E.

   1 Para el $CuSO_4$,

   - Los números de oxidación del Cu y del O son 2^+ y 2^-.
   - El sulfato de cobre es neutro, por tanto, la suma de los números de oxidación debe ser cero.
   - Si el número de oxidación del S es x:

   $$0 = 4(-2) + x + 1(+2).$$

   Por lo tanto,

   $$x = \text{número de oxidación del S} = 6^+.$$

108. Los hidrocarburos son compuestos que contienen los elementos H (hidrógeno) y C (carbono); por *ejemplo:* metano, CH_4; etano, C_2H_6; propano, C_3H_8; butano, C_4H_{10}; octano, C_8H_{18}.

109. Una combustión incompleta sucede cuando parte del combustible no reacciona completamente porque el oxígeno no es suficiente. La combustión incompleta libera menor cantidad de calor que la combustión completa del mismo combustible. Y peor aún: la combustión incompleta es peligrosa,

110. El CO es un gas incoloro, inodoro e insípido; es sumamente tóxico, pues afecta a los sistemas nervioso y cardiovascular.

111. El hollín es el carbón, finamente dividido, que se libera de la combustión incompleta; se eleva por el calor que desprende la combustión, y se va enfriando a medida que se aleja de la fuente de calor, formando humo negro, el cual se deposita en los objetos cercanos.

112. El CO_2 es un gas incoloro, inodoro, incombustible y no tóxico, pero es el mayor responsable del recalentamiento global. El CO_2 se encuentra en baja concentración en el aire que respiramos (aproximadamente 0.03% en volumen).

2 Para el Na_2NO_3,

- El sodio y el oxígeno tienen números de oxidación 1^+, 2^-.
- El nitrato de sodio es neutro, por tanto, la suma de los números de oxidación debe ser cero.
- Si el número de oxidación del N es y, entonces:

$$0 = 3(-2) + y + 2(+1).$$

Por lo tanto,

$$y = \text{número de oxidación del N} = 4^+.$$

□

2. En la siguiente ecuación, identifica en el orden: átomo oxidado, átomo reducido, agente oxidante y agente reductor:

▼ La respuesta es C.

El $CuSO_4$ se separa en sus iones componentes, señalándose sus cargas correspondientes:

$$Fe + Cu^{2+} + SO_4^{2-} \rightarrow Fe^{2+} + SO_4^{2-} + Cu$$

El Fe es oxidado a Fe^{2+} al ceder $2e^-$, aumentando su número de oxidación: $0 \rightarrow 2^+$; por lo tanto es el agente reductor.

$$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$$

El Cu^{2+} es reducido a Cu al aceptar $2e^-$, disminuyendo su número de oxidación: $2^+ \rightarrow 0$; por lo tanto, es el agente oxidante.

$$Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu$$

El ión SO_4^{2-} no sufrió ningún cambio en su número de oxidación, es decir, no ha sido oxidado ni reducido, por lo cual no está implicado en la reacción redox:

$$Fe + Cu^{2+} \rightarrow Fe^{2+} + Cu$$

□

Balanceo de ecuaciones por tanteo y por el método redox

Reactivos: véase la página 217

1. Elegir la opción que corresponda al balanceo correcto por tanteo, de la siguiente ecuación: ________.

▼ La respuesta es C.

- Se balancea el metal (K): se asigna para ello el coeficiente 3 en el KOH (lado izquierdo):

$$3KOH + H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4 + H_2O$$

- Se balancea el no metal (P); se observa que se encuentran balanceados:

$$3KOH + H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4 + H_2O$$

- Se balancean los átomos de hidrógeno: se asigna para ello el coeficiente 3 a la molécula de agua (lado derecho); así quedan balanceados los átomos de oxígeno.

$$3KOH + H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4 + 3H_2O$$

Se observa el mismo número de cada uno de los átomos tanto en los reactantes como en los productos.

□

2. Balancear la siguiente ecuación de reacción redox en solución ácida por el método del ión electrón: ______.

▼ La respuesta es C.

Separando las dos semirreacciones:

$$I^- \rightarrow I_2$$
$$MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+}$$

Balance de los átomos de I:

$$2I^- \rightarrow I_2$$

El Mn en la reacción del permanganato ya está balanceado; balancear ahora el oxígeno:

$$MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$$

Añadir H^+ para balancear las 4 moléculas de agua:

$$MnO_4^- + 8H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$$

Ahora las dos semirreacciones están balanceadas para los átomos:

$$MnO_4^- + 8H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$$

Balanceando las cargas por adición de electrones:

$$2I^- \rightarrow I_2 + 2e^-$$
$$5e^- + 8H^+ + MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$$

Al multiplicar por los números de oxidación, las dos semirreacciones tienen el mismo número de electrones.

$$2(5e^- + 8H^+ + MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O)$$

Al sumar las dos semirreacciones:

$$10I^- \rightarrow 5I_2 + 10e^-$$
$$16H^+ + 2MnO_4^- + 10e^- \rightarrow 2Mn^{2+} + 8H_2O$$

Obtenemos la ecuación final:

$$10I^- + 10e^- + 16H^+ + 2MnO_4^- \rightarrow 5I_2 + 2Mn^{2+} + 10e^- + 8H_2O$$

Al cancelar los electrones, H_2O, H^+, OH^- que aparecen en ambos lados de la ecuación se obtiene la ecuación general:

$$10I^- + 16H^+ + 2MnO_4^- \rightarrow 5I_2 + 2Mn^{2+} + 8H_2O$$

□

Cálculos estequiométricos

Reactivos: véase la página 220

1. Dados los siguientes datos: M(C)= 12 u, M(H) = 1 u, M(O) = 16 u, encontrar la masa molecular de la glucosa cuya fórmula es $C_6H_{12}O_6$. Indica la opción que corresponde: ______.

▼ La respuesta es D.

Para encontrar la masa molecular, se suman las masas atómicas de todos los átomos presentes en la molécula, multiplicadas por el subíndice (número de átomos) correspondiente:

$$\text{M de } C_6H_{12}O_6 = 6(12\text{ u}) + 12(1\text{ u}) + 6(16\text{ u}) = 72\text{ u} + 12\text{ u} + 96 = 180\text{ u}.$$

El número calculado es la masa molecular correspondiente a un mol de ese compuesto.

□

2. Determinar la composición porcentual del $NaNO_3$, es decir, el porcentaje en que se encuentran presentes el Na, el N y el O, respectivamente, partiendo de los siguientes datos:

$$\mathrm{M(Na)} = 23\ \mathrm{u}, \quad \mathrm{M(N)} = 14\ \mathrm{u}, \quad \mathrm{M(O)} = 16\ \mathrm{u}.$$

Escribe la opción: ______.

▼ La respuesta es C.

- Se calcula la masa molecular del compuesto:

$$\mathrm{M(NaNO_3)} = 1(23\ \mathrm{u}) + 1(14\ \mathrm{u}) + 3(16\ \mathrm{u}) = 23\ \mathrm{u} + 14\ \mathrm{u} + 48 = 85\ \mathrm{u}.$$

- Se aplica la fórmula para cada elemento:

$$\text{Porcentaje del elemento} = \frac{\text{(átomos de ese elemento)(masa atómica del elemento)}}{\text{masa molecular del compuesto}} \times 100\,\%\,;$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
\text{Porcentaje de Na} &= 1 \times 23/85 \times 100 &&= 27.0\,\% \\
\text{Porcentaje de N} &= 1 \times 14/85 \times 100 &&= 16.5\,\% \quad + \\
\text{Porcentaje de O} &= 3 \times 16/85 \times 100 &&= 56.5\,\% \\
& && \overline{100\,\%\,.}
\end{aligned}$$

□

4. Lingüística del texto

4.1 Comprensión textual

Análisis y síntesis de textos

Reactivos: véase la página 221

1. Indica cuál es la síntesis más apropiada.

   ▼ La respuesta es E.

   Conviene que tengas presente que resumir no es cortar y pegar. Ésa es una tarea para quienes carecen de inteligencia y se llama plagio. Personas como tú, que aspiran a concluir una carrera universitaria, tienen mucho mayor potencial. Estas personas comprenden que la síntesis es una actividad que implica entender un texto y transcribir esta comprensión con las propias palabras. Algunos no pueden sintetizar porque nunca les enseñaron a hacerlo, probablemente.

   La respuesta correcta es la única que contiene los tres asuntos que aborda la lectura:

   a. La función de los herbicidas sintéticos.
   b. El papel de la rotación de cultivos.
   c. La definición del concepto.

   □

2. Señala el análisis más adecuado.

   ▼ La respuesta es E.

   Cualquier texto que pretenda analizarse, requiere en primer lugar de una lectura completa. Esta lectura tiene como propósito obtener una idea general del contenido del texto. Con esta idea, ya podremos determinar las partes del texto, y la jerarquía de éstas. Estos elementos de nuestro análisis nos permitirán iniciar nuestra síntesis.

   Algunas personas antes de tener una idea global del contenido del texto, proceden a subrayar las "ideas más importantes", para hacer su síntesis. El resultado posible es que señalen lo que a ellas les parece importante, que no siempre coincide con los temas importantes del texto. Señalar los asuntos importantes se debe hacer después de la primera lectura.

   La respuesta correcta es la única que hace referencia a los cinco temas del texto y, asimismo, describe cada uno de ellos. Las otras opciones no consideran la totalidad de los temas, o bien enfatizan asuntos que no son cruciales.

   □

3. Indica cuál es la síntesis más apropiada.

   ▼ La respuesta es E.

   Como se puede observar, todas las opciones contienen elementos del texto. Esto podría confundirte si no eres capaz de hacer un análisis correcto del texto. Ello no es sencillo, pero tampoco es imposible. En primer lugar se requiere de una técnica adecuada. Posteriormente se necesita de práctica, la cual, como tú mejor que nadie entenderás, se realiza únicamente con base en la disciplina y la tenacidad.

   La mejor síntesis se expresa en la opción E., ya que ésta reúne el tema de "la curiosidad del investigador" y el "procedimiento" que utilizó para indagar las "causas" del fenómeno. Las otras opciones, si bien contienen aspectos que se mencionan en el texto, no son las fundamentales.

   □

4. Señala el análisis más adecuado.

   ▼ La respuesta es B.

   Ten cuidado, la opción A. está construida en tal forma que parece ser la correcta. Sin embargo, no es así. El primer tema que se aborda en el texto es la descripción del investigador, no el asunto de los vencejos. Alguien que no haya leído el texto con la técnica adecuada hubiera cometido un error.

   La opción correcta es la B.; observa que las otras opciones alteran el orden de los asuntos contenidos en el texto, omiten algunos asuntos importantes, o agregan temas que no se abordan en el texto; esto es muy común de algunos lectores "rolleros" que agregan asuntos de su propia cosecha, los cuales no aparecen en el texto. En otras ocasiones, es el caso de lectores a quiénes se les ha enseñado a obtener las moralejas de los discursos o textos.

   □

5. Señala el análisis más adecuado del primer párrafo.

   ▼ La respuesta es E.

   En la respuesta se menciona el número de asuntos que trata el texto. Aunque dos opciones de respuesta coinciden con este número de temas, la enumeración de ellos no corresponde al texto. Una de estas opciones señala en primer lugar la ingeniería aeronáutica, y la otra la biología, ello no coincide con lo que se menciona en el texto.

   □

Identificación de la información y argumentos de un texto

Reactivos véase la página 225

1. ¿Cuál de los siguientes fragmentos del texto es un argumento?

   ▼ La respuesta es C.

   Todos nosotros discurrimos, inferimos y razonamos. Discurrir, inferir y razonar son actividades mentales que nos permiten ordenar las ideas, establecer relaciones y ampliar nuestros conocimientos. Algunas veces este razonar consiste en ordenar nuestros pensamientos con la finalidad de convencer a alguien de algo. Esta actividad mental se conoce como argumentar. Siendo repetitivos diríamos que esa operación consiste en presentar argumentos para convencer a otro de algo.

   Como puedes observar, la opción C. ofrece, mediante un hecho ("las lenguas, el inglés o el alemán, que hoy son utilizadas como medios de comunicación en el ámbito de la ciencia, hace poco tiempo que son consideradas adecuadas para ello"), un argumento que intenta convencernos de que todas las lenguas son iguales. Las otras opciones se caracterizan por ser informaciones. Revisa las nociones de argumento y de información, en la parte teórica: Identificación de la información.

   □

2. ¿Cuál de los siguientes fragmentos del texto es una inferencia?

   ▼ La respuesta es C.

   Recuerda que una inferencia es el acto de inferir. Por inferir entendemos sacar la conclusión de algo. De esta manera, si observas las diferentes opciones de repuesta que se muestran, te darás cuenta de que las opciones no correctas son un tipo de expresiones que tienen como propósito proporcionarnos conocimientos o ampliar los que tenemos. En cambio, la opción C. es una inferencia porque es una conclusión que se ha obtenido de una afirmación. En otras palabras, se dice que, si se proporcionan los medios, cualquier lengua puede ser empleada como vehículo de comunicación. Observa cómo esta respuesta es la única que puede adoptar la forma: si se cumple X, entonces se cumple Y. □

3. ¿Cuál de los siguientes fragmentos es una ilustración?

   ▼ La respuesta es B.

En esta opción de respuesta aparece un ejemplo que ilustra el significado en el texto la expresión: "modalidades de hablar". Cuando se habla de ilustrar entendemos: "aclarar un punto o materia con palabras, imágenes, o de otro modo". Las otras opciones de respuesta no tienen como propósito hacer alguna aclaración, tratan de lo que hemos llamado información.

□

4. ¿Cuál de los siguientes fragmentos es un juicio?

▼ La respuesta es B.

Observa que es la única opción en la que el autor emite una opinión personal. Como hemos visto en la parte teórica, un juicio consiste en dar una opinión, un parecer, o un dictamen. En esta opción aparece el enunciado mediante el cual el autor opina, emite un juicio, acerca de la "actitud ingenua" de algunas personas: señala que se trata de "otro aspecto de la misma actitud". Las otras opciones son informaciones.

□

5. Una de las expresiones del texto anterior puede presentarse así: si el hombre reconoce la existencia de otras lenguas, se hace consciente de su propia historicidad.

Esta nueva presentación es:

▼ La respuesta es E.

Ya hemos explicado que un argumento consiste en razonar de tal manera que ordenemos nuestros pensamientos con el propósito de convencer a otro de la bondad de nuestro punto de vista. La expresión que comentamos intenta convencernos del papel de las lenguas. Además de lo anterior, podemos observar que el modo de presentar el enunciado sigue la forma de una implicación $X \Rightarrow Y$, [113] que es la representación formal de un texto argumentativo.

□

4.2 Ortografía

Grafemas y fonemas

Reactivos: véase la página 228

1. ¿Qué fonemas corresponden a la grafía x?

▼ La respuesta es A.

Efectivamente, esos fonemas de la grafía x los escuchamos en las siguientes palabras: Xochimilco, Xola, México, exacto, respectivamente. Una parte de los problemas de ortografía en los escritos de algunos hispano hablantes se ocasiona por una relación desigual entre las grafías y los fonemas, es decir, no siempre entre unas y otros existe una relación de uno a uno, esto es, una grafía un fonema. Por ejemplo, el fonema /s/ lo representan tres grafías: z, s, c. Como se puede observar, en el ejemplo anterior la relación es 3:1. Tres grafías, un fonema. Por otro lado existen dos grafías que corresponden al fonema /b/, la b y la v.

□

2. ¿Cuál palabra está usando un fonema incorrectamente?

▼ La respuesta es B.

En efecto, emplear v como un fonema es incorrecto. Recordarás que hay diferencia entre una trascripción fonológica y una ortográfica. La transcripción fonológica la realizamos con los fonemas y la transcripción ortográfica, con las letras (grafías).

En español, existen dos grafías b, v, pero un solo fonema /b/. Veamos a continuación una transcripción ortográfica (a) y una transcripción fonológica (b).

113. $X \Rightarrow Y$ se lee X implica Y.

(a) Venancio vendía boinas bonitas, baleaba bravucones, botaba barquitos que navegaban a tumbos.

(b) /benánsio bendía bóinas bonítas baleába brabukónes botába barkítos ke nabegában a túmbos/.

Hay diferencias ¿no?

□

3. Señala la transcripción ortográfica de /bíno a mi kása kon su muxér/:

▼ La respuesta es C.

El fonema /b/ ha sido sustituido por la grafía v y en la transcripción ortográfica escribimos vino y casa porque son palabras graves que terminan en vocal; igualmente escribimos mujer sin tilde porque es una palabra aguda terminada en r; /x/se cambió por j; /k/ por c.

Consulta las reglas de acentuación en: La sílaba. Clasificación de las palabras.

□

4. La transcripción ortográfica de /wastepék/ es:

▼ La respuesta es A.

Los fonemas /wa/ equivalen a las grafías oa. El fonema /s/ es uno de los valores de la grafía x. El fonema /k/ equivale a la grafía c. La palabra Oaxtepec no lleva tilde, pues se trata de una palabra aguda terminada en c.

Consulta: La sílaba. Clasificación de las palabras.

□

5. La transcripción fonológica de aguacate es:

▼ La respuesta es A.

El fonema /w/ equivale a las grafías gu. El fonema /k/ a la grafía c. La palabra aguacate no lleva tilde pues se trata de una palabra grave terminada en vocal.

Consulta las reglas de acentuación en: La sílaba. Clasificación de las palabras.

□

La sílaba. Clasificación de las palabras

Reactivos: véase la página 229

1. Relaciona las columnas según la clase de palabra que corresponda (se han suprimido las tildes de la primera columna).

▼ La respuesta es E.

La última sílaba de dieciséis es tónica,[114] por lo tanto, es una palabra aguda;[115] la sílaba antes de la antepenúltima de réstamelo es tónica, entonces, es sobresdrújula;[116] la penúltima sílaba de mármol es tónica, entonces, es grave;[117] la antepenúltima sílaba de espíritu es tónica, por lo tanto, es esdrújula;[118] y la penúltima sílaba de árbol es tónica, es decir, es una palabra grave.

□

114. La sílaba tónica es aquella sobre la que recae el acento prosódico, es decir, la que con mayor intensidad se pronuncia es la tónica.

115. En las palabras agudas, la última sílaba es la tónica.

116. En las palabras sobresdrújulas, la sílaba antes de la antepenúltima es la tónica.

117. En las palabras graves, la penúltima sílaba es la tónica.

118. En las palabras esdrújulas, la antepenúltima sílaba es la tónica.

2. Selecciona el inciso que contenga las palabras escritas correctamente.

   ▼ La respuesta es A.

   Huida no lleva tilde, por tener su sílaba tónica en la penúltima sílaba y ser una palabra grave. Tránsito lleva tilde pues su sílaba tónica es la antepenúltima y es una palabra esdrújula. Póntelo lleva tilde porque su sílaba tónica es la antepenúltima y es una palabra esdrújula; Beatriz no lleva tilde, ya que su sílaba tónica es la última y es una palabra aguda. Léemelo lleva tilde, pues la sílaba antes de la antepenúltima es tónica, por lo que es sobreesdrújula.

   □

3. Relaciona las columnas según la veracidad de las oraciones.

   ▼ La respuesta es A.

   Las palabras agudas llevan tilde en la última sílaba cuando terminan en vocal, n o s. Las palabras esdrújulas siempre llevan tilde en la antepenúltima sílaba. En las palabras graves la penúltima sílaba es tónica, y llevan tilde cuando terminan en consonante que no sea n o s. Las palabras sobresdrújulas siempre llevan tilde en la sílaba antes de la antepenúltima.

   □

4. Selecciona la oración verdadera.

   ▼ La respuesta es D.

   En una palabra, la sílaba sobre la que recae el acento prosódico[119] es la tónica. Las otras oraciones son falsas, pues las palabras esdrújulas siempre llevan tilde, sin importar su terminación. Las palabras agudas llevan tilde cuando terminan en vocal, n o s. El español emplea en ciertos casos el acento gráfico o tilde (´).[120] Por último, cuando las palabras graves terminan en s precedidas de consonante sí llevan tilde.

   □

5. Selecciona el inciso que contenga únicamente palabras agudas.

   ▼ La respuesta es B.

   Re–loj, Pa–rís, te–lón, con–so–mé y ca–te–dral son, todas, palabras en las cuales la última sílaba es la tónica.

   □

Diptongos e hiatos

Reactivos: véase la página 231

1. Selecciona la oración verdadera.

   ▼ La respuesta es D.

   Un hiato es la secuencia de dos vocales contiguas (abiertas o cerradas) que forman parte de sílabas consecutivas.

   Ejemplos: te–a–tro, ca–en.

   □

2. Selecciona el inciso que contenga todas las palabras con diptongo.

   ▼ La respuesta es A.

   Recuerda que los diptongos se forman con dos vocales contiguas que se pronuncian en una misma sílaba, y para esto se deben cumplir las siguientes condiciones:

119. El acento prosódico es la mayor intensidad con la que se pronuncia una sílaba dentro de una palabra aislada o un monosílabo dentro de su contexto fónico. Por ello también se llama acento de intensidad.

120. Tilde: símbolo colocado sobre la vocal de la sílaba tónica de la palabra según las reglas de acentuación.

a. Que estén juntas una vocal abierta (fuerte)[121] y una cerrada (débil),[122] o viceversa, siempre que la cerrada no sea tónica.[123]

   Son diptongos con estas características: ai, au, ei, eu, oi, ia, ie, io, ua, ue, uo.

b. Que se combinen dos vocales cerradas distintas.

   Son diptongos con estas características: ui, iu. La h intercalada entre dos vocales no impide que éstas formen diptongo.

□

3. Relaciona las columnas con base en la separación silábica.

   ▼ La respuesta es B.

   - Diurético lleva un diptongo, pues contiene dos vocales cerradas en una sola sílaba (diu–ré–ti–co).
   - Coartada contiene un hiato ya que presenta dos vocales abiertas distintas que forman parte de sílabas consecutivas (co–ar–ta–da).
   - Púa está formada por una vocal cerrada tónica + una vocal abierta átona que forman parte de sílabas consecutivas (pú–a). En consecuencia tiene un hiato.
   - Oiga presenta un diptongo porque está formada por una vocal abierta y una cerrada que se pronuncian en una misma sílaba (oi–ga).
   - Búho tiene un hiato pues está formada por dos vocales distintas (cerrada y abierta) que forman parte de sílabas consecutivas (bú–ho).

□

4. Selecciona el inciso que contenga las palabras escritas correctamente.

   ▼ La respuesta es B.

   - Ahínco presenta hiato pues contiene una vocal abierta átona y una vocal cerrada tónica, y la regla indica que estas palabras siempre llevan tilde en la vocal tónica (a–hín–co).
   - Mío y sonríe tienen hiato pues llevan una vocal cerrada tónica y una vocal abierta átona, y la regla indica que estas palabras siempre llevan tilde en la vocal tónica (mí–o, son–rí–e).
   - Suave tiene un diptongo (una vocal cerrada átona y una vocal abierta tónica), por esto no lleva tilde (sua–ve).
   - Zoólogo presenta un hiato formado por dos vocales iguales (zo–ó-lo-go), y estos hiatos siguen las reglas generales de acentuación. Aquí, comprobamos que la palabra es esdrújula, de ahí que lleve tilde .

□

5. Selecciona el inciso que contenga todas las palabras con hiato.

   ▼ La respuesta es C.

   Los hiatos son la secuencia de dos vocales contiguas que forman parte de sílabas consecutivas. Existen tres tipos de hiatos:

   a. Combinación de dos vocales iguales.
   b. Vocal abierta + vocal abierta distintas.
   c. Vocal abierta átona + vocal cerrada tónica o viceversa.

121. Las vocales fuertes o abiertas son: a, e, o.

122. Las vocales débiles o cerradas son: i, u.

123. Para revisar el concepto de vocal tónica en las palabras, ver la sección: La sílaba. Clasificación de las palabras.

Recuerda que las reglas de acentuación de estas palabras son:

1. Los hiatos formados por dos vocales iguales o por dos vocales distintas abierta + abierta siguen las reglas generales de acentuación.
2. Los hiatos formados por vocal abierta átona + vocal cerrada tónica o por vocal cerrada tónica + vocal abierta átona siempre llevan tilde, independientemente de las reglas de acentuación. Es importante que recuerdes que la h intercalada entre dos vocales no implica que éstas formen hiato. Tampoco impide que el hiato con h intercalada lleve tilde si es preciso.

□

Acentuación diacrítica

Reactivos: véase la página 234

1. Relaciona las columnas según la categoría gramatical a la que pertenezcan.

   ▼ La respuesta es B.

   Según las reglas de acentuación de diacríticos, él con tilde equivale a un pronombre personal,[124] tu sin tilde es un posesivo,[125] mas sin tilde es una conjunción adversativa,[126] de sin tilde equivale a una preposición,[127] té con tilde corresponde a un sustantivo (con significado de planta, bebida u hoja).

   □

2. Elige la oración escrita correctamente.

   ▼ La respuesta es E.

   Recuerda que te no lleva tilde cuando equivale a un pronombre personal,[128] mas no lleva tilde pues en esta oración está funcionando como conjunción adversativa,[129] y sólo lleva tilde, ya que está desempeñando la función de adverbio, es decir, equivale a solamente.

   □

3. Selecciona la oración verdadera.

   ▼ La respuesta es A.

   La tilde diacrítica es aquella que permite distinguir palabras homófonas que pertenecen a diferentes categorías gramaticales. Los monosílabos son palabras de una sílaba que no llevan tilde. Los demostrativos éste, ése, aquél, con sus femeninos y plurales, sí llevan tilde cuando funcionan como pronombres; y cuando la palabra aun equivale a hasta, también, incluso o siquiera, se debe escribir siempre sin tilde.

   □

4. Selecciona la oración escrita correctamente.

   ▼ La respuesta es C.

   En la oración ejemplificada, la palabra esta se escribe sin tilde ya que está funcionando como adjetivo, pues determina la palabra situación; cómo lleva tilde por tratarse de un interrogativo; sólo lleva tilde porque cumple la función de adverbio; sé se escribe con tilde por tratarse de la forma del verbo saber.

   □

---

124. Pronombre personal. Designa personas, animales o cosas mediante cualquiera de las tres personas gramaticales.
125. El posesivo indica la posesión, propiedad o pertenencia a una o varias personas, o cosas, de lo significado por el sustantivo a que se refiere.
126. Conjunción adversativa. Partícula invariable que relaciona palabras y oraciones para indicar oposición o contrariedad entre los elementos que une.
127. Preposición. Palabra invariable que sirve para relacionar vocablos.
128. Pronombre personal. Designa personas, animales o cosas mediante cualquiera de las tres personas gramaticales.
129. Véase nota 126.

5. Relaciona las columnas según la categoría gramatical a la que pertenezcan.

▼ La respuesta es D.

Según las reglas de acentuación de diacríticos:

a. Éste se escribe con tilde cuando se trata de un pronombre.
b. Qué lleva tilde cuando equivale a un exclamativo.
c. La palabra el no lleva tilde si funciona como artículo.
d. Tu no lleva tilde cuando se trata de un posesivo.
e. Sí lleva tilde si funciona como adverbio de afirmación.

□

4.3 Semántica del texto

Análisis del discurso

Reactivos: véase la página 236

1. En el siguiente texto, los enunciados están desordenados. Ordénalos con base en el número que los antecede:

▼ La respuesta es C.

Este reactivo muestra que un texto o discurso no sólo debe de tener enunciados correctos. Es imprescindible que todos los enunciados de un texto estén relacionados y además que conserven un orden. Esto es similar al orden de las palabras dentro de un enunciado. Por ejemplo: *el tunas vecina mi en compró María mercado*. Aunque todas son palabras que reconocemos, no están ordenadas pues el enunciado no queda claro.

El texto no podría iniciar con 1. ya que 2. constituye un enunciado con una temática más general, del que lógicamente se desprendería 1. Ese mismo razonamiento habría que aplicar, para considerar que 4. es el enunciado con el que debería iniciar el texto. Observa que contiene un par de palabras que resultan el centro de todo el párrafo: caminar y ejercicio. Así las cosas la opción correcta es C. Ensaya con las otras opciones y te darás cuenta de que el resultado es un discurso muy poco comprensible.

□

2. La expresión: "caminar dos o tres días" se halla vinculada cohesivamente con la frase:

▼ La respuesta es D.

Una serie de enunciados vinculados adecuadamente constituyen una unidad superior que se denomina discurso o texto. Los discursos logran la vinculación de sus enunciados mediante un procedimiento que se conoce con el nombre de cohesión. La cohesión se realiza mediante la unión de un referente[130] con su cohesivo.[131]

La opción correcta no puede ser E., ya que "además de barato" se halla vinculado a "ejercicio", en general. A., B., y C. tampoco son correctas porque A. se vincula con el máximo y mínimo de duración. B. se relaciona con "Todos los adultos interesados. . . " y C. se refiere a "sudar". La "prescripción gratuita" se refiere a la frecuencia con la que hay que realizar el ejercicio, es decir: "caminar dos o tres días".

□

130. El referente es una palabra con significado propio, generalmente un sustantivo. Por ejemplo: *ciruelas, plumas, libro,* etcétera.

131. El cohesivo es una palabra que está vinculada con el referente, en general son los pronombres. Por ejemplo: *–Pásame mi libro. –¿Cuál libro? –Ése*. En este diálogo ése es el cohesivo, su referente es libro.

3. Indica cuál de las siguientes es una deixis lingüística.

   ▼ La respuesta es A.

   En el enunciado: ¿Cuántas veces le han dicho que caminar es un magnífico ejercicio, además de barato?, le es un elemento deíctico. La deixis en una función que connecta discurso y contexto.

   □

Coherencia y cohesión

Reactivos: véase la página 237

1. Con base en las palabras escritas con color, indica cuál es la combinación que relaciona correctamente las dos columnas:

   ▼ La respuesta es C.

   - Observa que nos únicamente puede vincularse con e.
   - El número del pronombre ésta es singular, su género es femenino; la única que cumple estas condiciones es marea roja, por tanto, 2. debe ir con d.
   - Por una razón similar, 3. va con c.
   - Los concuerda en género y número con a., por ello elegimos 4.a.
   - Con base en la misma argumentación, 5. corresponde a b.

   □

2. Las relaciones que se establecen en los textos o discursos, como las del reactivo anterior, permiten:

   ▼ La respuesta es D.

   Ello se debe a la noción cohesión que estudiamos en esta parte y que hemos definido así: es un mecanismo propio de las lenguas oral y escrita, que consiste en la relación de un par de elementos. A uno se denomina cohesivo, y a otro referente. Así las cosas, podemos afirmar que la cohesión es el vínculo que se establece, en los discursos orales o escritos, entre un cohesivo y su referente. Los cohesivos más frecuentes en la lengua española son los pronombres.

   □

3. En el siguiente discurso aparece el cohesivo "estos productos", identifica el referente.

   ▼ La respuesta es C.

   - No puede ser combustibles porque en el texto se señala: además de los combustibles. Si el referente fuera combustibles, no estaría antes la palabra además.
   - No podría ser tampoco jarabe y miel, ya que éstos podrían ser fuentes, y no derivados del petróleo.
   - Poliéster y diesel tampoco sería la opción correcta, ya que éstos se obtienen, según el texto, de la hmf.
   - Dos sustancias tiene como referente poliéster y diesel.

   Consulta la noción referente en la sección Coherencia y cohesión.

   □

4.4 Sintaxis del texto

Oración y frase

Reactivos: véase la página 240

1. Selecciona la oración en la cual exista coordinación entre sus elementos.

   ▼ La respuesta es B.

   Pues es la única oración la que existe concordancia de persona y número entre todos sus elementos.

   - En la oración: el prólogo, o prefacio, son un texto en el que se menciona la importancia de la publicación de una obra, de sus ventajas y bondades, el sujeto es singular (el prólogo o prefacio), por lo tanto el verbo debería estar en singular (es), no en plural como en este caso (son).
   - La oración: el prólogo, o prefacio, es un texto en el que se mencionan la importancia de la publicación de una obra, de sus ventajas y bondades, el sujeto es singular (el prólogo o prefacio), entonces el segundo verbo debería concordar en número con el sujeto, es decir, estar en singular (menciona) y no en plural (mencionan).
   - La oración: el prólogo, o prefacio, es un texto en el que se mencionaba la importancia de la publicación de una obra, de sus ventajas y bondades, presenta una discordancia entre los tiempos verbales, ya que el primer verbo está en presente (es) y el segundo en copretérito (mencionaba), en este ejemplo la conjugación verbal debería estar en presente en ambos verbos.
   - La oración: el prólogo, o prefacio, es un texto en el que se mencionan la importancia de la publicación de unas obra, de sus ventajas y bondades, existe contrariedad de número, ya que el sujeto es singular (el prólogo o prefacio), y el verbo aparece en plural (mencionan) cuando debería estar en singular (menciona); asimismo, el adjetivo de obra aparece en plural (unas), cuando debería estar en singular (una), para que así el adjetivo concordara no sólo en género, sino en número con el sustantivo.

   □

2. Selecciona la opción que representa una oración.

   ▼ La respuesta es D.

   Recuerda que la oración es la construcción máxima en la que se establecen relaciones entre unidades menores (tanto de tipo sintáctico, como las frases, como de tipo morfológico, es decir, las palabras). Es la construcción que no forma parte de ninguna otra y su núcleo es el verbo o perífrasis verbal;[132] por si solo, sin intervención de sujeto, éste puede constituir una oración, y leyeron es un verbo conjugado en segunda persona del plural y es una oración.

   □

3. Selecciona la opción que representa una frase.

   ▼ La respuesta es A.

   Una frase es la unión de palabras que carecen de verbo; y la frase este acontecimiento está formada por un adjetivo y sustantivo, es decir, carece de verbo; mientras que los otros incisos tienen verbos en sus estructuras, por lo tanto son oraciones.

   □

4. Selecciona el predicado de la oración: los alumnos tienen que asistir a asesorías.

   ▼ La respuesta es A.

132. Las perífrasis verbales equivalen a una sola idea verbal, se forman con dos o más verbos que en ocasiones pueden unirse mediante una palabra de enlace. El primer verbo se conjuga y funciona como auxiliar, el segundo se encuentra en infinitivo, gerundio o participio, aunque ocasionalmente puede estar conjugado; ejemplo: *acaba de irse*, *voy a tener que correrlo*.

El núcleo del predicado está formado por un verbo o perífrasis verbal, y la opción del inciso A. constituye una perífrasis verbal.

□

5. Selecciona la oración que esté escrita en masculino de la tercera persona del singular.

▼ La respuesta es B.

Recuerda que en español hay tres personas gramaticales, que tienen formas específicas para el singular y el plural.[133]

1. Él es un pronombre que pertenece a la tercera persona singular masculino, y concuerda con el verbo se fue, mismo que está conjugado en tercera persona del singular.
2. Emitieron se encuentra en tercera persona del plural.
3. Escribió está en femenino tercera persona del singular.
4. Estaban consternados es una perífrasis verbal conjugada en tercera persona del plural.
5. Tienen está conjugado en tercera persona del plural.

El inciso B. es el único que reúne las características pedidas.

□

Sujeto y predicado

Reactivos: véase la página 243

1. Selecciona la oración cuyo significado sea correcto.

▼ La respuesta es E.

Una de las reglas básicas del sujeto es que su núcleo siempre debe concordar con el verbo en persona y número. Si el núcleo del sujeto no concordara con el verbo en número, la oración no tendría sentido.

□

2. Selecciona el sujeto de la oración: “Los diputados, senadores y gobernadores fueron destituidos de sus cargos”.

▼ La respuesta es A.

Según su composición, el sujeto puede ser complejo, es decir, puede estar formado por una combinación de palabras o sintagmas nominales. También, recuerda que el verbo debe concordar en persona y número con el sujeto, y el verbo de esta oración (fueron) está conjugado en tercera persona del plural, por lo que el sujeto debe ser plural, y en este caso, tanto los diputados, senadores, como gobernadores fueron destituidos.

□

3. Selecciona el predicado de la oración: “Las elecciones fueron reprogramadas para el sábado siguiente”.

▼ La respuesta es D.

Recuerda que el predicado puede estar formado por un verbo o perífrasis verbal, y en ocasiones va acompañado por una serie de complementos cuya función es la de aportar un tipo particular de información. Entonces, el predicado es todo lo que se dice del sujeto, es decir, “fueron reprogramadas para el sábado siguiente”.

□

133.

	Singular	*Plural*
Primera pesona	yo	nosotros / nosotras
Segunda persona	tú / vos / usted	vosotros / vosotras / ustedes
Tercera persona	Él / ella / ello	ellos / ellas

4. Relaciona las columnas según el tipo de sujeto.

   ▼ La respuesta es E.

   - El sujeto de la primera oración (nosotros) es simple, pues está formado por una palabra.
   - El sujeto de la segunda oración (los actores) es nominal, ya que su núcleo es un sustantivo.
   - El sujeto de la tercera oración (tercera persona del singular) es tácito, debido a que el sujeto no está expreso.
   - El sujeto de la cuarta oración (Pedro) es agente, porque el sujeto es quien protagoniza la acción.
   - El sujeto de la quinta oración (los donativos) es paciente, ya que es quien recibe la acción, aparece siempre en oraciones pasivas, las cuales requieren, generalmente, de la preposición por.

   □

5. Selecciona la oración escrita en voz pasiva.

   ▼ La respuesta es E.

   En las oraciones pasivas el paciente recibe la acción, y requieren generalmente de la preposición por, y el inciso E. es el único que cuenta con la preposición por, entonces, quedan descartadas las otras opciones.

   □

4.5 Puntuación

Los signos de puntuación

Reactivos: véase la página 246

1. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados de manera adecuada.

   ▼ La respuesta es B.

   El punto se usa al finalizar una oración, como después de (vida), los dos puntos se emplean para introducir ejemplos, y la coma se usa para separar elementos. En cambio, en los otros incisos se emplea coma para separar el sujeto del predicado, lo cual ahí es incorrecto.

   □

2. En el espacio señalado, selecciona la oración que requiera de coma (,).

   ▼ La respuesta es E.

   La coma se emplea en las enumeraciones; salvo excepciones como en incisos, que van separados por comas, nunca se usará coma para separar el sujeto del predicado, como erróneamente se observa en A., B., C. y D.

   □

3. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados correctamente.

   ▼ La respuesta es C.

   Se deben utilizar dos puntos para introducir ejemplos, enumeraciones, listados, etc., y la opción C. es la única en la que se emplea este signo de puntuación, entonces, se descartan las opciones restantes.

   □

4. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados correctamente.

   ▼ La respuesta es C.

   Ya que se trata de una oración con sujeto complejo, y las reglas de puntuación indican que entre el sujeto y el predicado no debe existir coma, por lo que las otras opciones quedan descartadas.

   □

5. Relaciona las columnas según los signos de puntuación que correspondan a los espacios señalados.

▼ La respuesta es A.

El espacio señalado en el primer ejemplo da inicio a una enumeración, y la reglas de puntuación indican que los dos puntos se utilizan para introducir enumeraciones. El segundo ejemplo consta de más de una oración y, por lo tanto, incluye ya alguna coma, por lo que se emplea punto y coma. En el espacio señalado en el tercer ejemplo se requiere de coma, pues ésta se emplea para separar frases u oraciones. El cuarto ejemplo requiere punto, por ser el final de una abreviatura. En el quinto ejemplo se deben emplear puntos suspensivos, ya que éstos se requieren cuando se deja sin terminar una frase.

□

6. Selecciona la oración que requiera coma (,) en el espacio señalado.

▼ La respuesta es C.

Uno de los usos de la coma es cuando se omite el verbo, y esta característica únicamente la presenta esta opción.

□

7. Selecciona la oración que requiera punto (.) en los espacios señalados.

▼ La respuesta es C.

Se usa punto al final de una oración gramatical, y en este ejemplo el espacio señalado indica el final de la oración, ya que la siguiente expresión inicia con mayúscula.

□

8. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados correctamente.

▼ La respuesta es E.

Pues es la única opción que no separa el sujeto del predicado, que usa coma para las enumeraciones, que utiliza el punto al final de la abreviatura (etc.) y después de la palabra ella emplea coma para continuar con la oración. Así, las demás opciones quedan descartadas.

□

9. Selecciona la oración que tenga los signos de puntuación colocados correctamente.

▼ La respuesta es B.

Puesto que es la única opción que no emplea signos ortográficos para separar el sujeto del predicado; después de punto inicia con mayúscula; emplea dos puntos para introducir ejemplos, y se vale de comas para enumeraciones; finalmente emplea punto final para concluir la oración.

□

4.6 Manejo de vocabulario

Morfología flexiva y derivativa

Reactivos: véase la página 250

1. Señala las palabras que se modificaron por el empleo de la morfología derivativa

▼ La respuesta es C.

Frutero y frutería son palabras derivadas de fruta. Pero el significado cambió: fruta (fruto comestible de ciertas plantas cultivadas), frutero (persona que vende fruta), frutería (tienda o puesto donde se vende fruta).

Se puede observar que tienen en común el morfema[134] frut–. Se puede afirmar que frutero y frutería son palabras en las que se ha empleado la morfología derivativa.

□

2. Indica cuáles son los morfemas raíz de las palabras de las "opciones de respuesta" del enunciado anterior.

▼ La respuesta es E.

En efecto, frutero y frutería derivan de frut–. Asimismo fruta y fruto. Compramos, compro y compraría derivan de compr–. Las otras opciones de respuesta presentan morfemas flexivos o derivativos, es decir no son morfemas raíz. Compr– y frut– son morfemas raíz, posibilitan la flexión[135] o la derivación.[136]

□

3. Relaciona las columnas siguientes:

▼ La respuesta es A.

La morfología flexiva permite conjugar verbos. Para producir palabras con base en un morfema raíz se emplea la morfología derivativa. El morfema lava–, permite construir palabras como lavadero, lavabo, lavandera. Consecuentemente, –dero, –bo y –ndera son morfemas derivativos. Las palabras am–o, am–as, am–amos, am–an ilustran el caso de los morfemas flexivos.

□

Sinónimos y antónimos

Reactivos: véase la página 252

1. Identifica los sinónimos. Relaciona las columnas.

▼ La respuesta es C.

Las palabras ruborizar y avergonzar son sinónimos porque tienen un significado parecido y la misma categoría gramatical. Cuesta, entendida como subida, y pendiente están en el mismo caso. Presagio–vaticinio y comentar–hablar, también.

□

2. Identifica los antónimos. Relaciona las columnas.

▼ La respuesta es D.

Obligado–optativo, exigencia–debilidad, destruir–crear, desaliñado–pulcro, ordenado–caótico son antónimos. En esas parejas, la palabras pertenecen a la misma categoría gramatical, pero significan lo opuesto.

□

---

134. Morfema en lingüística es una unidad mínima analizable que posee sólo significado gramatical. Ejemplos: *de, no, yo, le, el libro*, *cant–ar*, *casa–s*, *cas–ero*.

135. La morfología flexiva permite modificar el tiempo, el número y persona. Por ejemplo:(a) *am–o*, (b) *am–aste*, (c) *am–aremos*. Observa que (a) es el tiempo presente del verbo amar, primera persona singular. (b), el pretérito del verbo amar, segunda persona singular. (c), tiempo futuro, primera persona plural.

136. La morfología derivativa permite la construcción de nuevas palabras. Por ejemplo: *niña*, *niñera*, *niñita*, *niñerías*.

5. Razonamiento matemático

5.1 Sucesiones numéricas

Reactivos: véase la página 256

1. Proporciona el siguiente elemento de la sucesión:

$$5, \quad 9, \quad 13, \quad 17, \quad ?, \quad \cdots$$

▼ La respuesta es C.

Nos damos cuenta, prestando atención, de que los cuatro primeros términos de la sucesión siguen la lógica de que un término se obtiene sumándole 4 al anterior, es decir:

$$a_n = a_{n-1} + 4.$$

Por lo tanto el quinto término de la sucesión es $a_5 = a_4 + 4 = 17 + 4 = 21$.

Este razonamiento es válido siempre y cuando supongamos que la sucesión es aritmética. Pueden existir otros razonamientos, por *ejemplo*, suponer que la sucesión consiste es repetir infinitamente estos cinco primeros términos proporcionados. Con este razonamiento el siguiente término sería 5 (que no es la respuesta solicitada, ni se encuentra entre las opciones).

□

2. Proporciona el siguiente elemento de la sucesión:

$$-1, \quad -2, \quad -4, \quad -8, \quad ?, \quad \cdots$$

▼ La respuesta es A.

Nos damos cuenta, prestando atención, que los cuatro primeros términos de la sucesión siguen la lógica de que un término se obtiene multiplicando por 2 el anterior, es decir:

$$a_n = a_{n-1} * 2.$$

Por lo tanto el quinto término de la sucesión es $a_5 = a_4 * 2 = (-8) * 2 = -16$.

Este razonamiento es válido siempre y cuando supongamos que la sucesión es geométrica. Pueden existir otros razonamientos, por *ejemplo*, suponer que la sucesión es recursiva, de la siguiente manera:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -2, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} - (n-2), \text{ si } n \geq 3.$$

Así:

$$\begin{aligned} a_3 = &\quad a_1 + a_2 - (3-2) = -1 + (-2) - 1 = -4; \\ a_4 = &\quad a_2 + a_3 - (4-2) = -2 + (-4) - 2 = -8; \end{aligned}$$

por lo tanto, siguiendo esta lógica:

$$a_5 = \quad a_3 + a_4 - (5-2) = -4 + (-8) - 3 = -15,$$

que no es alguna de las opciones presentadas.

□

3. Proporciona los siguientes dos elementos de la sucesión:

$$5, \quad -2 \quad 9, \quad -4 \quad 13, \quad -8 \quad 17, \quad ?, \quad ? \quad \cdots$$

▼ La respuesta es A.

Nos damos cuenta, prestando atención, de que los términos impares de la sucesión siguen esta lógica: un término se obtiene sumándole cuatro al anterior; por otro, lado los términos pares de la sucesión siguen esta otra lógica: un término se obtiene multiplicando por 2 el anterior, es decir:

$$5, \quad -2, \quad 9, \quad -4, \quad 13, \quad -8, \quad 17, \quad ?, \quad ?, \cdots$$

$+4 \qquad +4 \qquad +4 \qquad +4$

$*2 \qquad *2 \qquad *2$

Siguiendo esta lógica vemos que:

$$a_8 = a_6 \cdot 2 = -8 \cdot 2 = -16; \qquad a_9 = a_7 + 4 = 17 + 4 = 21.$$

□

4. Calcular el quinto elemento de la sucesión definida recusivamente de la siguiente manera:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 3, \quad a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2}; \text{ si } n \geq 3.$$

▼ La respuesta es C.

Calculamos los términos usando la regla de la sucesión:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -1;\\
a_2 &= 3;\\
a_3 &= \frac{a_1 \cdot a_2}{2} = \frac{(-1)(3)}{2} = -\frac{3}{2};\\
a_4 &= \frac{a_2 \cdot a_3}{2} = \frac{(3)(-\frac{3}{2})}{2} = -\frac{9}{4};\\
a_5 &= \frac{a_3 \cdot a_4}{2} = \frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{9}{4})}{2} = \frac{27}{16}.
\end{aligned}$$

□

5.2 Razonamiento aritmético

Reactivos: véase la página 257

1. Actualmente, la suma de las edades de 4 estudiantes es de 105. ¿Cuánto sumaban sus edades hace cinco años?: ________.

▼ La respuesta es B.

Hace cinco años, cada uno de los estudiantes tenía 5 años menos.

Por esta razón, la suma de las edades de los cuatro estudiantes hace 5 años era:

$$105 - (5)(4) = 85.$$

□

2. Pedro y Juan compraron una bolsa con 60 caramelos. Pedro aportó \$9 y Juan \$6. Si deciden repartirse los caramelos en función de la cantidad que cada uno aportó, ¿qué cantidad de caramelos obtiene Juan?: ________ .

▼ La respuesta es E.

En este problema se debe conocer primero el costo de la bolsa de caramelos; luego qué porcentaje representa la cantidad aportada por Pedro y qué porcentaje es la cantidad de Juan, de ese costo total.

Ya que Pedro aportó \$9 y Juan \$6, se concluye que la bolsa de caramelos costó \$15.
Por haber aportado Pedro \$9 de los \$15, entonces:

$$\left(\frac{9}{15}\right)(100\%) = 60\%\,;$$

éste es el porcentaje que Pedro aportó. Por haber aportado Juan \$6 de los \$15, entonces:

$$\left(\frac{6}{15}\right)(100\%) = 40\%\,;$$

que es el porcentaje que Juan aportó.

Si deciden repartirse los caramelos en función de la cantidad que cada uno aportó, entonces a Pedro le corresponde el 60% de los 60 caramelos y a Juan el resto, es decir, el 40%. Esto es:

Para Pedro

$$\left(\frac{60}{100}\right)(60 \text{ caramelos}) = 36 \text{ caramelos.}$$

Para Juan

$$\left(\frac{40}{100}\right)(60 \text{ caramelos}) = 24 \text{ caramelos.}$$

□

3. Un vendedor compra una caja de 100 discos compactos a un precio de \$300. ¿A qué precio tiene que vender cada decena de discos para tener una gananacia total del 25%?: ________ .

▼ La respuesta es B.

Ya que el vendedor debe obtener una ganancia total del 25%, después de vender los 100 discos compactos debe tener:

$$\begin{pmatrix}\text{Costo de caja}\\ \text{de 100 discos}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{25\% del costo de la}\\ \text{caja de 100 discos}\end{pmatrix} = (\$300) + \left(\frac{25}{100}\right)(300) =$$
$$= (300) + (75) = 375.$$

Si al final de la venta debe obtener \$375, entonces el precio de cada disco debe ser de \$3.75 lo cual implica que cada decena de discos la debe vender a \$37.50.

□

4. El 60% de estudiantes de un grupo aprobó el curso. El 75% de los aprobados obtuvo una calificación mayor o igual que 7. Si el grupo estuvo conformado por 60 estudiantes, ¿cuántos obtuvieron una calificación menor que 7?: ________ .

▼ La respuesta es B.

En este problema se tiene que calcular el número de estudiantes que aprobó el curso.

Si el grupo estuvo conformado por 60 estudiantes y el 60% de éstos aprobó el curso, entonces el número de aprobados es:

$$\left(\frac{60}{100}\right)(60 \text{ estudiantes}) = 36 \text{ estudiantes.}$$

El enunciado del problema indica que el 75% de los aprobados (es decir, de los 36 estudiantes) obtuvo una calificación mayor o igual que 7. El 75% de los 36 estudiantes es:

$$\left(\frac{75}{100}\right)(36 \text{ estudiantes}) = 27 \text{ estudiantes.}$$

Así concluimos que 27 estudiantes de los 60 obtuvieron una calificación mayor o igual que 7 y que el resto, es decir, 33 estudiantes, obtuvieron una calificación menor que 7, incluyendo a los reprobados.

□

5. Hace 3 años la edad de un padre era 4 veces la edad de su hija. Si actualmente el padre tiene 51 años, ¿cuál es la edad actual de la hija?: ________ .

▼ La respuesta es B.

Para resolver este problema se tiene que conocer la edad que tenía la hija hace 3 años.

Si actualmente el padre tiene 51 años, hace tres años tenía 48. Si en aquella época (hace 3 años) la edad del padre era cuatro veces la edad de su hija, entonces la hija tenía 12 ya que

$$(12)(4) = 48; \text{ o bien } \frac{48}{4} = 12.$$

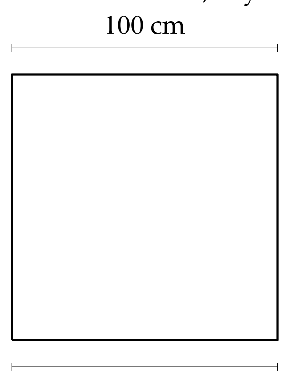
Si hace 3 años la hija tenía 12 años, entonces la edad actual de ella es 15 años.

□

6. Con 25 mosaicos cuadrados se cubre un metro cuadrado (m^2). ¿Cuántos centímetros (cm) mide el lado de cada mosaico?: ________ .

▼ La respuesta es B.

- La figura muestra un cuadrado de lado 1 m o 100 cm, cuya área es 1 m^2 o 10 000 cm^2.



Si 25 mosaicos cuadrados cubren un metro cuadrado, entonces cada mosaico cubre:

$$\frac{10\,000}{25} = 400 \text{ cm}^2, \text{ es decir,}$$

cada mosaico cuadrado tiene un área de 400 cm^2.

Por otra parte, se sabe que el área A de un cuadrado está dada por la fórmula:

$$A = \ell^2\,,$$

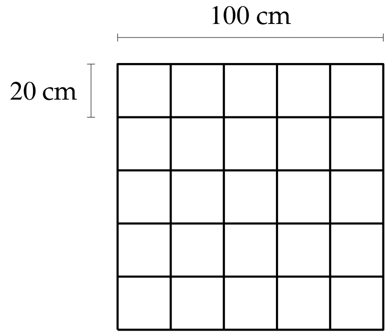
donde ℓ es el lado del cuadrado.

Con esta expresión se puede calcular la medida del lado de cada mosaico si se considera que el área de cada uno es de 400 cm^2.

Esto es:

$$400 = \ell^2 \;\Rightarrow\; \ell = \sqrt{400} \;\Rightarrow\; \ell = 20 \text{ cm.}$$

- Otra manera de calcular la longitud del lado de cada mosaico cuadrado sería representar 25 mosaicos cuadrados distribuidos en un cuadrado de lado 1 m o 100 cm. Esta forma se muestra en la siguiente figura.



Si el lado del cuadrado en donde se encuentran los 25 mosaicos tiene una longitud de 1 m o 100 cm, se puede concluir que la longitud del lado de cada mosaico es de 20 cm.

□

7. Tres listones miden, respectivamente, $2\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{5}$, $3\frac{1}{2}$ cm. Si éstos se colocan uno a continuación del otro, ¿Cuánto miden los tres listones?: ________ .

▼ La respuesta es E.

En este problema se tiene que sumar las longitudes de los listones, esto es, se debe realizar la siguiente operación:

$$2\frac{1}{3} + 4\frac{3}{5} + 3\frac{1}{2}.$$

$2\frac{1}{3}$ se lee dos enteros un tercio, y representa $2 + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$.

De igual manera:

$$4\frac{3}{5} = 4 + \frac{3}{5} = \frac{20+3}{5} = \frac{23}{5};$$
$$3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Por lo tanto:

$$2\frac{1}{3} + 4\frac{3}{5} + 3\frac{1}{2} = \frac{7}{3} + \frac{23}{5} + \frac{7}{2} = \frac{70+138+105}{30} = \frac{313}{30}.$$

Para expresar $\frac{313}{30}$ con su parte entera, y con su fracción, se realiza la división, es decir:

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 10 \\ \cline{2-2} 30 & 313 \\ & \ \ 13 \\ & \ \ 13 \end{array} \Rightarrow \frac{313}{30} = 10 + \frac{13}{30} = 10\frac{13}{30}.$$

En términos generales, la notación usual es:

$$\begin{array}{r|l} & \text{cociente} \\ \cline{2-2} \text{Divisor} & \text{dividendo} \\ & \text{residuo} \end{array} \Rightarrow \frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}} = \boxed{\text{cociente}}\,\boxed{\frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}}$$

Por lo tanto, los tres listones miden

$$\frac{313}{30}\text{ cm} = 10\frac{13}{30}\text{ cm} \approx 10.43\text{ cm}.$$

□

8. Al sumar dos números se obtienen $16\frac{4}{5}$. Si uno de los números es 9.36, ¿cuál es el otro número?: ________.

▼ La respuesta es B.

Es conveniente primeramente expresar las cantidades en forma de fracción $\left(\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}}\right)$, esto es:

$$16\frac{4}{5} = 16 + \frac{4}{5} = \frac{80+4}{5} = \frac{84}{5};$$
$$9.36 = 9 + 0.36 = 9\frac{36}{100} = 9 + \frac{36}{100} = \frac{900+36}{100} = \frac{936}{100}.$$

El enunciado del problema señala que al sumar dos números se obtiene $\frac{84}{5}$ y que uno de los números es $\frac{936}{100}$. Ya que se trata de calcular el otro número, la expresión que nos permite esto es:

$$\frac{936}{10} + (\text{otro número}) = \frac{84}{5},$$

de donde

$$(\text{otro número}) = \frac{84}{5} - \frac{936}{100} = \frac{1680-936}{100} = \frac{744}{100}.$$

Por otra parte

$$\text{el otro número} = \frac{744}{100} = 7.44 = 7 + 0.44 = 7 + \frac{44}{100} = 7 + \frac{11}{25} = 7\frac{11}{25}.$$

□

9. De un lote de 20 frascos con miel, cada uno pesa 6.35 kg. Si cada frasco vacío pesa 650 g y el kilo de miel tiene un valor de \$45, ¿cuánto cuesta el total de la miel del lote?: ________.

▼ La respuesta es B.

Para saber cuánto cuesta la miel contenida en los 20 frascos que conforman el lote, se tiene que calcular primero los kilogramos de miel.

Dado que cada frasco con miel pesa 6.35 kg y que cada frasco vacío pesa 650 g, se tiene que la miel en cada frasco pesa:

$$(6.35\text{ kg}) - (650\text{ g}) = (6.35\text{ kg}) - (0.650\text{ kg}) = 5.7\text{ kg}.$$

Ya que el lote está conformado por 20 frascos, los kilogramos de miel en el lote son:

$$(20)(5.7\text{ kg}) = 114\text{ kg}.$$

Si el kilo de miel tiene un valor de \$45, la miel del lote tiene un valor de:

$$(114\text{ kg})(\$45) = \$5\,130.$$

□

10. Un barco en el que se encuentran 30 personas lleva provisiones para 45 días. Si el número de personas aumenta en 6, ¿cuántos días durarán las provisiones?: ________.

▼ La respuesta es B.

Suponiendo una ración diaria por persona, para 30 personas son necesarias 30 raciones por día, y para 45 días son necesarias un total de:

$$(45 \text{ días})\,(30 \text{ raciones/día}) = 1\,350 \text{ raciones.}$$

Al aumentar en 6 el total de personas en el barco, el total de raciones (1 350) deberá ser repartido entre las 36 personas, para así saber el total de días con raciones para todos:

$$\frac{1\,350 \text{ raciones}}{36 \text{ raciones/día}} = \frac{150}{4} \text{ días} = 37.5 \text{ días.}$$

Por lo tanto, se tendrán raciones para 37 días.

□

5.3 Razonamiento algebraico

Reactivos: véase la página 260

1. Pepe tiene 52 años y su hermano Jorge 48. ¿Cuántos años hace que la edad de Jorge era $\dfrac{9}{10}$ de la de Pepe?: ________.

▼ La respuesta es B.

¿Qué se quiere en el problema? Calcular cuántos años han transcurrido desde que la edad de Jorge era igual a $\dfrac{9}{10}$ de la edad de Pepe.

¿Cuál es la incógnita? $x =$ número de años transcurridos.

¿Cómo resolver el problema? Calculando el valor de x, de la siguiente manera:

Ahora, Pepe tiene 52 años y Jorge 48. Hace x años, Pepe tenía $52 - x$ años y Jorge $48 - x$.

Pero, hace x años, la edad de Jorge era $\dfrac{9}{10}$ de la de Pepe; entonces: $48 - x = \dfrac{9}{10}(52 - x)$.

De donde,

$$10(48 - x) = 9(52 - x) \;\Rightarrow\; 480 - 10x = 468 - 9x \;\Rightarrow\; -10x + 9x = 468 - 480 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -x = -12 \;\Rightarrow\; x = 12.$$

Por lo tanto, han transcurrido 12 años.

Verificamos que $x = 12$ sea la solución del problema. Hace 12 años, Pepe tenía $52 - 12 = 40$ años y Jorge tenía $48 - 12 = 36$ años. Y debido a que:

$$\frac{9}{10}\big(\text{edad de Pepe}\big) = \frac{9}{10}(40) = 36 = \text{edad de Jorge},$$

entonces $x = 12$ es, en efecto, la solución del problema.

□

2. La suma de las edades de 3 personas es 155 años. La mayor tiene 24 años más que la menor y la mediana 7 años menos que la mayor. ¿Cuál es la edad de la persona mayor?: ________.

▼ La respuesta es E.

¿Qué se requiere en el problema? Calcular la edad de la persona mayor.

¿Cuál es la incógnita? x = edad de la persona mayor.

¿Cómo resolver el problema? Calculando el valor de x, de la siguiente manera:

Como la mayor tiene 24 años más que la menor, entonces la menor tiene 24 años menos que la mayor; es decir: edad de la menor $= x - 24$.

Como la mediana tiene 7 años menos que la mayor, entonces: edad de la mediana $= x - 7$.

Y debido a que la suma de las edades es 155 años, entonces,

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\text{edad de la}\\ \text{mayor}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{edad de la}\\ \text{mediana}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{edad de la}\\ \text{menor}\end{pmatrix} = 155 \Rightarrow\\
&\Rightarrow x + (x - 7) + (x - 24) = 155 \Rightarrow 3x - 31 = 155 \Rightarrow\\
&\Rightarrow 3x = 155 + 31 \Rightarrow x = \frac{186}{3} \Rightarrow\\
&\Rightarrow x = 62.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la persona mayor tiene 62 años.

Verificamos la solución:

Edad de la persona mayor	$= x = 62$ años.
Edad de la persona mediana	$= x - 7 = 62 - 7 = 55$ años.
Edad de la persona menor	$= x - 24 = 62 - 24 = 38$ años.
Suma de las edades	$= 62 + 55 + 38 = 155$ años.

□

3. Ana tiene \$4 700 en billetes de \$200 y de \$50. Si ella tiene 40 billetes en total, ¿Cuántos billetes de \$50 tiene?: ________.

▼ La respuesta es D.

¿Qué se quiere en el problema? Calcular el número de billetes de \$50 que tiene Ana.

¿Cuál es la incógnita? x = total de billetes de \$50.

¿Cómo calcular el valor de x? De la siguiente manera.

Como Ana tiene x billetes de \$50 y en total tiene 40 billetes, entonces ella tiene $40 - x$ billetes de \$200.

Y debido a que la cantidad total que tiene Ana es de \$4 700, entonces,

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\text{cantidad en}\\ \text{billetes de \$50}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{cantidad en}\\ \text{billetes de \$200}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad}\\ \text{total}\end{pmatrix} \Rightarrow\\
&\Rightarrow x(\$50) + (40 - x)(\$200) = \$4\,700 \Rightarrow 50x + 8\,000 - 200x = 4\,700 \Rightarrow\\
&\Rightarrow 50x - 200x = 4\,700 - 8\,000 \Rightarrow -150x = -3\,300 \Rightarrow\\
&\Rightarrow x = \frac{3\,300}{150} \Rightarrow x = 22.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, Ana tiene 22 billetes de \$50. Verificamos la solución.

Total de billetes de \$50:	$x = 22$.
Total de billetes de \$200:	$40 - x = 40 - 22 = 18$.
Dinero en billetes de \$50:	$22(\$50) = \$1\,100$.
Dinero en billetes de \$200:	$18(\$200) = \$3\,600$.
Total de dinero:	$\$1\,100 + \$3\,600 = \$4\,700$.

□

4. María pidió un préstamo de \$100 000 por un año, una parte a un banco con una tasa de interés de 30% anual y el resto a un amigo con una tasa de 15% anual. Al final del año, María pagó \$21 000 de intereses. ¿Qué cantidad pidió prestada a su amigo?: ________.

▼ La respuesta es E.

¿Qué se quiere en el problema? Calcular la cantidad que María pidió prestada a su amigo.

¿Cuál es la incógnita? $x =$ total de pesos que María pidió a su amigo.

¿Cómo resolvemos el problema? Calculamos el valor de x, de la siguiente manera:

Como el préstamo total fue de 100 000 pesos y a su amigo le pidió x pesos, entonces María pidió al banco un préstamo de $(100\,000 - x)$ pesos.

Luego, los intereses pagados por María fueron,

a su amigo: 15% de $x = 0.15x$;
al banco: 30% de $(100\,000 - x) = 0.3(100\,000 - x)$.

Y debido a que María pagó un total de \$21 000 por intereses, entonces

$$0.15x + 0.3(100\,000 - x) = 21\,000 \Rightarrow 0.15x + 30\,000 - 0.3x = 21\,000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0.15x - 0.3x = 21\,000 - 30\,000 \Rightarrow -0.15x = -9\,000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{9\,000}{0.15} \Rightarrow x = 60\,000.$$

Por lo tanto, María pidió \$60 000 a su amigo y al banco \$40 000.

Verificamos el resultado,

$$0.15x + 0.3(100\,000 - x) = 0.15(60\,000) + 0.3(100\,000 - 60\,000) =$$
$$= 0.15(60\,000) + 0.3(40\,000) = 9\,000 + 12\,000 = 21\,000.$$

□

5. Norma invirtió la mitad de su dinero con un interés de 8% y una cuarta parte con interés de 6%. Si al final del año recibió \$3 300 de intereses, ¿qué cantidad invirtió con interés de 8%?: ________.

▼ La respuesta es A.

¿Qué se quiere en éste problema? Determinar la cantidad de dinero que Norma invirtió con interés 8%.

¿Cuál es la incógnita? Por la información dada en el problema, podemos elegir como incógnita a la cantidad de dinero que tenía Norma para invertir.

Esto es: $w =$ dinero total para invertir.

¿Cómo resolver este problema? De la siguiente manera.

Norma invirtió la mitad de w con interés de 8%, entonces los intereses ganados, en este caso, fueron:

$$8\% \text{ de } \left(\frac{w}{2}\right) = (0.08)\left(\frac{w}{2}\right) = (0.04)w, \text{ pesos.}$$

Norma invirtió la cuarta parte de w con interés de 6%, entonces los intereses ganados, en este caso, fueron:

$$6\% \text{ de } \left(\frac{w}{4}\right) = (0.06)\left(\frac{w}{4}\right) = (0.015)w, \text{ pesos.}$$

Como Norma recibió \$3 300 de intereses, entonces:

$$(0.04)w + (0.015)w = 3\,300 \;\Rightarrow\; (0.04 + 0.015)w = 3300 \;\Rightarrow\; (0.055)w = 3\,300 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; w = \frac{3\,300}{0.055} \;\Rightarrow\; w = 60\,000.$$

Por lo tanto, Norma tenía \$60 000 para invertir. De éstos, la mitad (\$30 000) invirtió con interés de 8% y una cuarta parte (\$15 000) invirtió con interés de 6%.

Verificamos.

$$(8\% \text{ de } \$30\,000) + (6\% \text{ de } \$15\,000) = (0.08)(\$30\,000) + (0.06)(\$15\,000) =$$
$$= \$2\,400 + \$\,900 = \$3\,300.$$

□

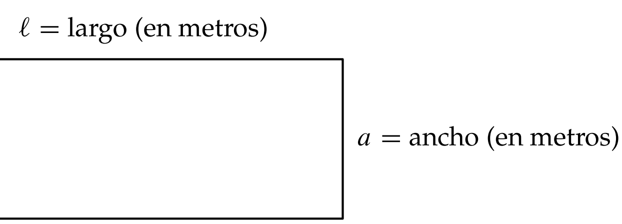
6. Un terreno rectangular tiene de largo 4 m menos que el triple de su ancho. Si el área del terreno es de 160 m^2 ¿cuántos metros mide de largo el terreno?: ________ .

▼ La respuesta es B.

¿Qué se quiere en el problema? Calcular lo largo de un terreno rectangular.

¿Cuál es la incógnita? ℓ = largo del terreno.

Para resolver el problema, consideramos la siguiente figura rectangular:



El área A de este rectángulo es: $A = \ell a$.

Como el largo es 4 m menos que el triple de su ancho, entonces: $\ell = 3a - 4$.

Utilizando $\ell = 3a - 4$ en el área $A = \ell a$:

$$A = \ell a = (3a - 4)a = 3a^2 - 4a, \text{ en m}^2.$$

Y debido a que el área del terreno es de 160 m^2, entonces: $3a^2 - 4a = 160$.

Resolviendo esta ecuación cuadrática calcularemos el ancho a del terreno y luego utilizaremos la igualdad $\ell = 3a - 4$ para tener el valor de ℓ.

$$3a^2 - 4a = 160 \Rightarrow 3a^2 - 4a - 160 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-160)}}{2(3)} =$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 1\,920}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{1\,936}}{6} = \frac{4 \pm 44}{6}.$$

De aquí se obtienen dos valores para a:

$$a_1 = \frac{4+44}{6} = \frac{48}{6} = 8 \qquad \& \qquad a_2 = \frac{4-44}{6} = \frac{-40}{6} = -\frac{20}{3}.$$

Ahora, como a es una longitud, entonces debe ser positiva y no puede ser negativa. Por esta razón se descarta $a_2 = -\frac{20}{3}$ y nos quedamos con el número $a_1 = 8$.

Podemos decir entonces que el ancho del terreno es: $a = 8$ m.

Por lo tanto, lo largo del terreno es

$$\ell = 3a - 4 = 3(8) - 4 = 24 - 4 = 20 \Rightarrow \ell = 20 \text{ m}.$$

Verificamos el resultado.

$$\ell = 20 \text{ m} = 3(8 \text{ m}) - 4 = 3(a) - 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ largo} = 3(\text{ancho}) - 4 = \text{triple del ancho, menos 4 m}.$$

Y además

$$\text{Área} = \ell a = (20 \text{ m})(8 \text{ m}) = 160 \text{ m}^2.$$

□

7. Rafael compró cierto número de libros y pagó \$2 000 y cierto número de plumas por las que pagó \$2 000. Cada libro costó \$50 más que cada pluma y el número de plumas excedió al de libros en 2. ¿Cuántos libros compró?: ________.

▼ La respuesta es A.

¿Qué se requiere en el problema? Determinar el número de libros que compró Rafael.

¿Cuál es la incógnita? ℓ = total de libros comprados.

¿Cómo calculamos el valor de ℓ? Como sigue. Sean:

$$\ell = \text{total de libros comprados;}$$
$$p = \text{total de plumas compradas.}$$

Como se compraron ℓ libros con \$2 000, entonces el costo de cada libro fue: $C_\ell = \frac{2\,000}{\ell}$ pesos.

Como se compraron p plumas con \$2 000, entonces el costo de cada pluma fue: $C_p = \frac{2\,000}{p}$ pesos.

Ahora bien, ya que cada libro costó \$50 más que cada pluma, entonces:

$$C_\ell = C_p + 50 \Rightarrow \frac{2\,000}{\ell} = \frac{2\,000}{p} + 50.$$

Y como el número de plumas excedió al de libros en 2, entonces: $p = \ell + 2$.

Tenemos así un par de ecuaciones

$$\frac{2\,000}{\ell} = \frac{2\,000}{p} + 50 \qquad \& \qquad p = \ell + 2.$$

Utilizando la segunda en la primera se obtiene

$$\frac{2\,000}{\ell} = \frac{2\,000}{\ell+2} + 50 \Rightarrow \frac{2\,000}{\ell} = \frac{2\,000 + 50(\ell+2)}{\ell+2} \Rightarrow 2\,000(\ell+2) = \ell(2\,000 + 50\ell + 100) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\,000\ell + 4000 = 2\,000\ell + 50\ell^2 + 100\ell \Rightarrow 50\ell^2 + 100\ell - 4000 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 50(\ell^2 + 2\ell - 80) = 0 \Rightarrow \ell^2 + 2\ell - 80 = 0,$$

la cual es una ecuación cuadrática para ℓ y que resolvemos factorizando.

$$\ell^2 + 2\ell - 80 = 0 \Rightarrow (\ell+10)(\ell-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ell + 10 = 0 \\ \ell - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_1 = -10; \\ \ell_2 = 8. \end{cases}$$

Se descarta el valor $\ell_1 = -10$ por ser negativo y nos quedamos con $\ell_2 = 8$. Usando este valor, $p = \ell + 2 = 8 + 2 = 10$.

Concluimos que Rafael compró 8 libros y 10 plumas.

Verificamos la solución obtenida.

Como $p = 10$, $\ell = 8$, lo cual es correcto, pues el total de plumas compradas excedió en 2 al total de libros.

Además, el costo de cada libro fue:

$$C_\ell = \frac{2\,000}{\ell} = \frac{2\,000}{8} = 250 \text{ pesos;}$$

y el costo de cada pluma fue:

$$C_p = \frac{2\,000}{p} = \frac{2\,000}{10} = 200 \text{ pesos;}$$

por lo que, cada libro costó \$50 más que cada pluma.

□

8. Luis compró 20 litros (ℓ) de jugos, de naranja y de mandarina. Cada litro de jugo de naranja cuesta \$14 y el de mandarina \$18. Si por los 20 ℓ pagó \$312 ¿Cuántos litros de jugo de mandarina compró?: ________.

▼ La respuesta es C.

¿Qué se desea en el problema? Determinar el número de litros de mandarina que compró Luis.

¿Cuál es la incógnita? m = total de litros de jugo de mandarina.

¿Cómo calculamos el valor de m? De la siguiente manera. Sean:

$$m = \text{total de litros de jugo de mandarina;}$$
$$n = \text{total de litros de jugo de naranja.}$$

Como Luis compró 20 ℓ de jugos, entonces: $m + n = 20$.

Ahora, m litros de mandarina a \$18 cada litro, tienen un costo de: $m(\$18) = 18m$ pesos; y n litros de naranja a \$14 cada litro, tienen un costo de: $n(\$14) = 14n$ pesos.

Luego, el costo total (en pesos) es: $18m + 14n$.

Y debido a que Luis pagó \$312, entonces:

$$18m + 14n = 312.$$

Se tiene entonces el par de ecuaciones $\begin{cases} m + n = 20; \\ 18m + 14n = 312. \end{cases}$

Sistema de ecuaciones que resolvemos de la siguiente manera:

De la primera ecuación ($m + n = 20$), se tiene:

$$n = 20 - m.$$

Utilizando esta igualdad en la segunda ecuación, se obtiene:

$$18m + 14(20 - m) = 312 \Rightarrow 18m + 280 - 14m = 312 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4m = 312 - 280 = 32 \Rightarrow m = \frac{32}{4} = 8.$$

Concluimos que Luis compró $m = 8\,\ell$ de jugo de mandarina y, en consecuencia, $n = 12\,\ell$ de jugo de naranja.

Verificamos la solución.

El costo total de $8\,\ell$ de jugo de mandarina, a \$18 por litro, más $12\,\ell$ de jugo de naranja, a \$14 por litro, nos da:

$$8(\$18) + 12(\$14) = \$144 + \$168 = \$312.$$

Resultado que coincide con lo estipulado en el problema.

$\square$

9. Ana le dice a Juan: si me das la mitad del dinero que tienes y 60 pesos más, tendré 4 veces lo que tu tendrás, y Juan le contesta: mejor dame 80 pesos y tendré 310 pesos más que tú. ¿Cuánto dinero tiene Juan?: ________ .

▼ La respuesta es D.

¿Qué se pide en el problema? Determinar cuánto dinero tiene Juan.

¿Cuál es la incógnita? J = dinero que tiene Juan.

¿Cómo calcular el valor de J? De la siguiente manera. Sean:

$$J = \text{dinero que tiene Juan;}$$
$$A = \text{dinero que tiene Ana.}$$

Algebrizamos el problema paso a paso.

Ana le dice a Juan: si me das la mitad del dinero que tienes $\left(\frac{1}{2}J\right)$ y 60 pesos más $(+60)$, tendré $\left(A + \frac{1}{2}J + 60\right)$ cuatro veces los que tu tendrás $\left(J - \frac{1}{2}J - 60\right)$. Esto es:

$$\left(A + \frac{1}{2}J + 60\right) = 4\left(J - \frac{1}{2}J - 60\right).$$

Juan le contesta a Ana: mejor dame 80 pesos $(+80)$ y tendré $(J + 80)$ entonces 310 pesos más de lo que tu tendrás $(A - 80)$. Esto es: $J + 80 = (A - 80) + 310$.

Luego, se tiene un sistema de dos ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} A+\dfrac{1}{2}J+60 & = 4\left(J-\dfrac{1}{2}J-60\right) \\ J+80 & = (A-80)+310 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+\dfrac{1}{2}J+60 & = 2J-240 \\ J+80 & = A+230 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+\frac{1}{2}J-2J & = -240-60 \\ J-A & = 230-80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A-\dfrac{3}{2}J & = -300 \\ -A+J & = 150 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rl} A-\frac{3}{2}J = & -300 \\ -A+\quad J = & 150 \\ \hline -\frac{1}{2}J = & -150 \end{array} + \qquad \Rightarrow J = 300.$$

Con $J = 300$ y con $-A+J = 150$, $A = J-150 = 150$.

Por lo tanto, Juan tiene \$300 y Ana tiene \$150.

Verificamos el resultado obtenido.

Ana le dice a Juan: si me das la mitad del dinero que tienes $\left[\dfrac{1}{2}(300) = 150\right]$ y 60 pesos más $(+60)$ tendré $(150+150+60 = 360)$ cuatro veces lo que tu tendrás $(300-150-60 = 90)$.

Esto es:

$$360 = 4(90) = 360.$$

Como se afirma en el problema.

□

10. Tenemos $60\,\ell$ de una solución que contiene 20% de cierto ácido. ¿Cuántos litros de agua deben agregarse a esta solución para reducir la concentración del ácido al 15%?: ________ .

▼ La respuesta es D.

¿Qué se pide en el problema? Determinar cuantos litros de agua deben agregarse a $60\,\ell$ de una solución ácida para reducir la concentración del ácido del 20% al 15%.

¿Cuál es la incógnita? $x =$ litros de agua que se deben agregar.

¿Cómo se determina el valor de x?, de la siguiente manera:

Como el 20% de 60 es $\dfrac{20}{100}(60) = (0.20)(60) = 12$, entonces en los $60\,\ell$ de solución (con el 20% de ácido) se tienen $12\,\ell$ de ácido.

Al agregar x litros de agua (sin ácido) a los $60\,\ell$ de solución, se obtienen $(60+x)$ litros de una nueva solución con los mismos $12\,\ell$ de ácido. Entonces, la concentración de ácido en la nueva solución es: $\dfrac{12}{60+x}$.

Para que esta concentración sea del 15% se debe cumplir que:

$$\frac{12}{60+x} = \frac{15}{100};$$

de donde:

$$15(60+x) = (12)100 \Rightarrow 60+x = \frac{1\,200}{15} \Rightarrow x = 80-60 \Rightarrow x = 20.$$

Por lo tanto, se deben agregar $x = 20\,\ell$ de agua.

Verificamos.

Al agregar $20\,\ell$ de agua a los $60\,\ell$ de solución, se obtienen $80\,\ell$ de una nueva solución que contiene $12\,\ell$ de ácido. Entonces la concentración de ácido en la nueva solución es:

$$\frac{12}{60+20} = \frac{12}{80} = \frac{3}{20} = 0.15.$$

Lo cual representa el 15% de la nueva solución.

□

11. Tenemos $80\,\ell$ de una solución que contiene 10% de cierta tintura. ¿Cuántos litros de tintura deben agregarse a esta solución para aumentar la concentración de la tintura al 25%?: ________.

▼ La respuesta es E.

¿Qué se pide en el problema? Determinar cuántos litros de tintura deben agregarse a $80\,\ell$ de una solución para aumentar la concentración de tintura del 10% al 25%.

¿Cuál es la incógnita? $x =$ litros de tintura que se agregan.

¿Cómo determinar el valor de x? De la siguiente manera.

Como el 10% de 80 es $(0.1)(80) = 8$, entonces en los $80\,\ell$ de solución (con el 10% de tintura) hay $8\,\ell$ de tintura.

Al agregar x litros de tintura (sin agua) a los $80\,\ell$ de solución, se obtienen $(80 + x)$ litros de una nueva solución con $(8 + x)$ litros de tintura. Entonces la concentración de tintura en la nueva solución es: $\dfrac{8+x}{80+x}$.

Para que esta concentración sea del 25% debe ocurrir que:

$$\frac{8+x}{80+x} = \frac{25}{100};$$

de donde:

$$\frac{8+x}{80+x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(8+x) = 80 + x \Rightarrow 4x - x = 80 - 32 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{3} \Rightarrow x = 16.$$

Concluimos que se deben agregar $x = 16\,\ell$ de tintura.

Verificamos.

Al agregar $16\,\ell$ de tintura a los $80\,\ell$ de solución (que contenía $8\,\ell$ de tintura), se obtienen $96\,\ell$ de solución con $8 + 16 = 24\,\ell$ de tintura. La concentración de tintura en la nueva solución es:

$$\frac{8+16}{80+16} = \frac{24}{96} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Lo cual representa el 25%.

□

12. En un tanque hay $250\,\ell$ de solución con un 15% de alcohol y en otro tanque hay otra solución, pero con un 60% de alcohol.

¿Cuántos litros de la solución más concentrada de alcohol se deben agregar al otro tanque para que la concentración aumente hasta 40%?: ________.

▼ La respuesta es A.

¿Qué se quiere en el problema? Determinar cuántos litros de la solución más concentrada de alcohol se deben agregar a los $250\,\ell$ de la solución menos concentrada, para aumentar la concentración de ésta del 15% al 40%.

¿Cuál es la incógnita en este problema?

$$x = \text{litros de la solución más concentrada que deben agregarse.}$$

¿Cómo calcular el valor de x? De la siguiente manera.

Como el 15% de 250 es $(0.15)(250) = 37.5$, entonces en los $250\,\ell$ de solución (con el 15% de alcohol) se tienen $37.5\,\ell$ de alcohol.

Como el 60% de x es $(0.6)x$, entonces en x litros de solución (con el 60% de alcohol) se tienen $(0.6)x$ litros de alcohol.

Luego, al agregar x litros de la solución más concentrada a los $250\,\ell$ de la solución menos concentrada, se obtienen $(250 + x)$ litros de una nueva solución con $[37.5 + (0.6)x]$ litros de alcohol.

La concentración de alcohol en la nueva solución es:

$$\frac{37.5 + (0.6)x}{250 + x}.$$

Y para que esta concentración sea del 40%, se debe cumplir la igualdad:

$$\frac{37.5 + (0.6)x}{250 + x} = \frac{40}{100}.$$

De donde:

$$\frac{37.5 + (0.6)x}{250 + x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5[37.5 + (0.6)x] = 2(250 + x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 187.5 + 3x = 500 + 2x \Rightarrow 3x - 2x = 500 - 187.5 \Rightarrow x = 312.5\,.$$

Concluimos que se deben agregar $x = 312.5\,\ell$ de la solución mas concentrada.

Verificamos.

Al agregar $312.5\,\ell$ de la solución con 60% de alcohol a los $250\,\ell$ de solución con 15% de alcohol, obtenemos $250 + 312.5 = 562.5\,\ell$ de una nueva solución que contiene

$$(0.15)(250) + (0.6)(312.5) = 37.5 + 187.5 = 225 \text{ litros de alcohol.}$$

La concentración de alcohol en esta nueva solución es:

$$\frac{225}{562.5} = 0.4.$$

Lo cual representa el 40% de la nueva solución.

□

13. Pedro puede pintar una casa en 10 días y Pablo puede hacerlo en 15 días. Si Pedro y Pablo pintaran juntos la casa, ¿cuántos días tardarían?: ________.

▼ La respuesta es A.

¿Qué se pide en el problema? Calcular el número de días que tardarán Pedro y Pablo en pintar juntos una casa.

¿Cuál es la incógnita? $x =$ total de días pintando juntos.

¿Cómo calcular el valor de x? En este tipo de problemas se debe considerar que si una persona invierte n días en realizar un trabajo, entonces en 1 día realiza $\frac{1}{n}$ del trabajo total. Con esto en mente, resolvemos el problema.

Como Pedro puede pintar una casa en 10 días, entonces en 1 día pintaría $\frac{1}{10}$ de la casa. Así también, si Pablo puede pintar la casa en 15 días, entonces en 1 día pintaría $\frac{1}{15}$ de la casa.

Por lo tanto, en x días, Pedro pintaría $x\left(\frac{1}{10}\right)$ de la casa y Pablo pintaría $x\left(\frac{1}{15}\right)$ de la casa.

Pero si en x días pintan 1 casa entera, entonces

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 1;$$

de donde se obtiene que

$$\frac{3x + 2x}{30} = 1 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{5} \Rightarrow x = 6.$$

Concluimos que Pedro y Pablo, juntos, pintan una casa en 6 días.

Verificamos.

En 6 días, Pedro pinta $6\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ de una casa, Pablo pinta $6\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ de una casa y juntos pintan: $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$ casa.

□

14. Juan y José, si trabajasen juntos, tardarían 6 días en terminar de pintar una casa. Si Juan trabaja solo, tardará 15 días en pintarla, ¿cuántos días tardaría José en pintar él solo la casa?: ________.

▼ La respuesta es A.

¿Qué se pide en el problema? Calcular los días que tardaría José en pintar (él solo) una casa.

¿Cuál es la incógnita? $n =$ total de días invertidos por José.

¿Cómo calcular el valor de n?

Como a Juan le toma 15 días pintar 1 casa, entonces en 1 día pinta $\frac{1}{15}$ de una casa.

Si a José le tomara n días pintar 1 casa, entonces en 1 día pintaría $\frac{1}{n}$ de una casa.

Luego, en 6 días, Juan pintaría $6\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ de una casa, José pintaría $6\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{6}{n}$ de una casa, y juntos pintarían $\left(\frac{2}{5} + \frac{6}{n}\right)$ de una casa.

Ahora, si en 6 días juntos pintan 1 casa, debe cumplirse que: $\dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{n} = 1$.

De aquí se tiene que

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{n} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{6}{n} = 1 - \frac{2}{5} \;\Rightarrow\; \frac{6}{n} = \frac{3}{5} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 3n = 6(5) \;\Rightarrow\; n = \frac{30}{3} \;\Rightarrow\; n = 10.$$

Concluimos que José tardaría $n = 10$ días en pintar solo una casa.

Verificamos.

José pintaría $\dfrac{1}{10}$ de casa en 1 día y $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ de casa en 6 días. Juan pintaría $\dfrac{1}{15}$ de una casa en 1 día y $\dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$ de una casa en 6 días. Por lo tanto, José y Juan juntos en 6 días pintarían:

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) \text{ de una casa } = \frac{5}{5} = 1 \text{ casa.}$$

□

15. Rubén puede pintar una casa en el triple de tiempo que le tomaría a Eduardo hacerlo. Trabajando juntos pueden pintar la casa en 9 días. ¿Cuántos días le tomaría a Eduardo?: ________.

▼ La respuesta es A.

¿Qué se quiere en el problema? Determinar el número de días que tardaría Eduardo en pintar solo una casa.

¿Cuál es la incógnita? $n =$ total de días invertidos por Eduardo.

¿Cómo determinar el valor de n?

Si Eduardo pinta una casa en n días y Rubén tarda el triple de tiempo que Eduardo, entonces Rubén pinta una casa en $3n$ días. Luego, en 1 día, Eduardo pinta $\dfrac{1}{n}$ de una casa y Rubén pinta $\dfrac{1}{3n}$ de una casa.

Por lo tanto, en 9 días, Eduardo pinta $9\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{9}{n}$ de una casa, Rubén pinta $9\left(\dfrac{1}{3n}\right) = \dfrac{3}{n}$ de una casa, y juntos pintan $\dfrac{9}{n} + \dfrac{3}{n} = \dfrac{12}{n}$ de una casa.

Ahora, como en 9 días juntos pintan 1 casa, entonces debe cumplirse que $\dfrac{12}{n} = 1$.

De aquí $n = 12$.

Concluimos que para pintar una casa, Eduardo tarda $n = 12$ días y Rubén tarda $3n = 36$ días.

Verificamos.

Si para pintar una casa, Eduardo tarda 12 días y Rubén 36 días, entonces en 1 día, Eduardo pinta $\dfrac{1}{12}$ de casa y Rubén $\dfrac{1}{36}$ de casa.

Por lo tanto, en 9 días, Eduardo pinta $9\left(\dfrac{1}{12}\right) = \dfrac{3}{4}$ de casa, Rubén pinta $9\left(\dfrac{1}{36}\right) = \dfrac{1}{4}$ de casa, y juntos pintan $\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)$ de casa $= 1$ casa.

Como se asegura en el problema.

□

5.4 Razonamiento geométrico

Reactivos: véase la página 263

1. La figura siguiente corresponde a un rectángulo; si su perímetro es $P = 28$ cm, su área (A) es: ______.

▼ La respuesta es A.

El perímetro de este rectángulo es,

$$P = 2(2x) + 2\left(\frac{3}{2}x\right) = 4x + 3x = 7x.$$

Y debido a que $P = 28$ cm, entonces:

$$7x = 28 \text{ cm} \Rightarrow x = 4 \text{ cm}.$$

Por otra parte, el área de este rectángulo es:

$$A = (2x)\left(\frac{3}{2}x\right) = 3x^2 \Rightarrow A = 3(4 \text{ cm})^2 = 3(16 \text{ cm}^2) \Rightarrow A = 48 \text{ cm}^2.$$

□

2. La figura siguiente corresponde a un rectángulo. Si su área es $A = 60\,\text{cm}^2$, su perímetro (P) es: ______.

▼ La respuesta es A.

El área de este rectángulo es,

$$A = \left(\frac{5}{2}x\right)\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{5}{3}x^2.$$

Por otra parte, $A = 60$ cm^2. Entonces,

$$\frac{5}{3}x^2 = 60 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{5}(60) = 36 \Rightarrow x = 6 \text{ cm}.$$

Además, el perímetro de este rectángulo es:

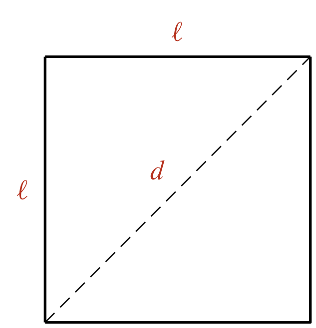
$$P = 2\left(\frac{5}{2}x\right) + 2\left(\frac{2}{3}x\right) = 5x + \frac{4}{3}x = \frac{19}{3}x \Rightarrow P = \frac{19}{3}(6 \text{ cm}) = 19(2 \text{ cm.}) \Rightarrow P = 38 \text{ cm}.$$

□

3. Un cuadrado tiene un área de 36 cm^2. La longitud de su diagonal es: ______.

▼ La respuesta es E.

Consideramos el siguiente cuadrado, que tiene lados de longitud ℓ y diagonal de longitud d.



El área de este cuadrado es $A = \ell^2$ y, debido a que $A = 36\ \text{cm}^2$, entonces $\ell^2 = 36\ \text{cm}^2 \Rightarrow \ell = 6$ cm. Además, por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 = 2(36\ \text{cm}^2) = 72\ \text{cm}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{72}\ \text{cm} = \sqrt{(36)(2)}\ \text{cm} \Rightarrow d = 6\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

□

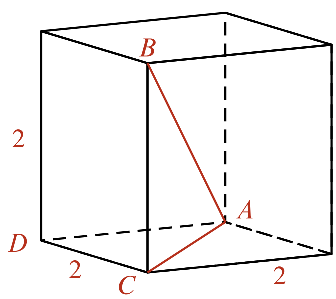
4. Si el volumen de un cubo es $8\ \text{m}^3$, entonces la longitud de cualquiera de sus diagonales es: ________.

▼ La respuesta es A.

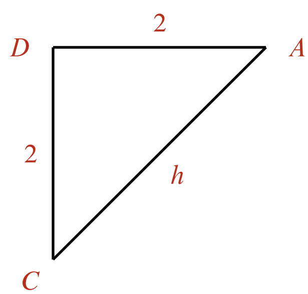
El volumen de un cubo de arista ℓ es $V = \ell^3$. Como en este caso el volumen es $V = 8\ \text{m}^3$, entonces $\ell^3 = 8^3$, por lo que $\ell = 2$ m.

Ahora bien, una diagonal de un cubo (poliedro) es un segmento de recta que une dos vértices que no están en la misma cara de dicho cubo.

A continuación se muestra un cubo con aristas de longitud $\ell = 2$:



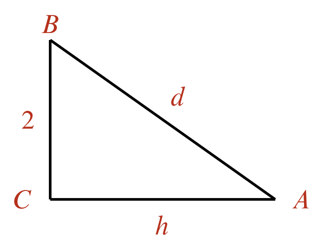
Notamos que la diagonal $\overline{AB}$ al ser proyectada a la base del cubo genera el segmento de recta $\overline{AC}$, el cual es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud $\ell = 2$ m.



Primero calculemos la longitud h de la hipotenusa $\overline{AC}$. Por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow h^2 = 8 \Rightarrow h = \sqrt{8} = \sqrt{4(2)} \Rightarrow h = 2\sqrt{2}\ \text{m}.$$

Luego calculamos las longitud d de la diagonal $\overline{AB}$, notando que ésta es la hipotenusa de otro triángulo rectángulo.



De nuevo, por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow d^2 = 8 + 4 = 12 \Rightarrow d = \sqrt{12} = \sqrt{4(3)} \Rightarrow d = 2\sqrt{3}\text{ m.}$$

Por tanto, la longitud de la diagonal $\overline{AB}$ es:

$$d = 2\sqrt{3}\text{ m.}$$

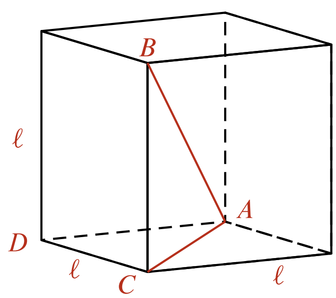
□

5. Si la longitud de la diagonal de un cubo es 6 m, entonces el área de la superficie de dicho cubo es: ________.

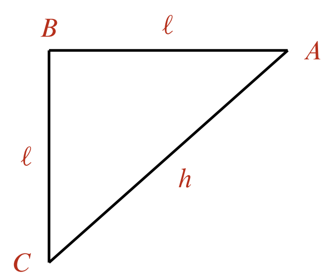
▼ La respuesta es D.

La diagonal de un cubo (poliedro) es el segmento de recta que une dos vértices que no están en una misma cara de dicho cubo.

A continuación se muestra un cubo con aristas de longitud ℓ:



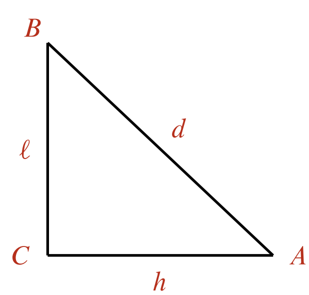
Notamos que la diagonal $\overline{AB}$ al ser proyectada a la base del cubo genera el segmento de recta $\overline{AC}$, el cual es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud ℓ.



Primero calculamos la longitud h de la hipotenusa $\overline{AC}$. Por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow h^2 = 2\ell^2 \Rightarrow h = \sqrt{2\ell^2} \Rightarrow h = \sqrt{2}\ell.$$

Luego calculamos la longitud d de la diagonal $\overline{AB}$, considerando que ésta es la hipotenusa de otro triángulo rectángulo.



De nuevo, por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = h^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 + \ell^2 \Rightarrow 3\ell^2$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{2\ell^2} = \sqrt{3}\ell \Rightarrow d = \sqrt{3}\ell.$$

Como en este problema la longitud de la diagonal es $d = 6$ m, entonces: $\sqrt{3}\ell = 6$. De donde,

$$\ell = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{(2)(3)}{\sqrt{3}} = 2\frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, el área total del cubo es:

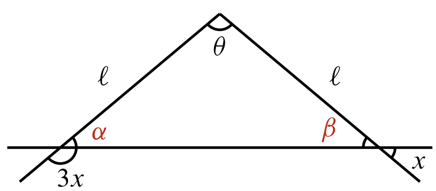
$$A = 6\ell^2 = 6(2\sqrt{3})^2 = 6(4)(3)\text{ m}^2 \Rightarrow A = 72\text{ m}^2.$$

□

6. En la figura siguiente, el valor del ángulo θ es: ________.

▼ La respuesta es C.

Consideremos ángulos auxiliares α y β en el triángulo de la figura:



Donde notamos que el triángulo es isósceles por tener dos lados de igual longitud ℓ. Aquí se tiene lo siguiente:

$\beta = x$, por ser ángulos opuestos por el vértice.

$\alpha = \beta$, por ser isósceles el triángulo.

$3x + \alpha = 180°$, por ser ángulos suplementarios.

Entonces,

$$180° = 3x + \beta = 3x + x = 4x.$$

De donde: $x = \dfrac{180°}{4} = 45°$, luego

$$\beta = 45° \quad \& \quad \alpha = 45°.$$

Además, por ser ángulos internos de un triángulo, $\theta + \alpha + \beta = 180°$. Por lo tanto:

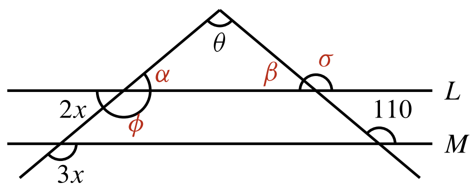
$$\theta = 90°.$$

□

7. En la siguiente figura, las rectas L, M son paralelas; por lo tanto la medida del ángulo θ es: ________.

▼ La respuesta es C.

Consideramos los ángulos auxiliares de la figura,



donde notamos lo siguiente: por ser ángulos correspondientes,

$$\phi = 3x \quad \& \quad \sigma = 110^\circ.$$

Y por ser ángulos suplementarios:

$$2x + \phi = 180^\circ \quad \& \quad \beta + \sigma = 180^\circ.$$

Entonces,

$$2x + 3x = 180^\circ \quad \& \quad \beta + 110^\circ = 180^\circ.$$

Es decir,

$$5x = 180^\circ \quad \& \quad \beta = 180^\circ - 110^\circ.$$

De donde:

$$x = 36^\circ \quad \& \quad \beta = 70^\circ.$$

Por otra parte, por ser ángulos opuestos por el vértice, $\alpha = 2x$. Luego, $\alpha = 72^\circ$.

Además, por ser ángulos internos de un triángulo,

$$\theta + \alpha + \beta = 180^\circ \;\Rightarrow\; \theta + 72^\circ + 70^\circ = 180^\circ \;\Rightarrow\; \theta = 180^\circ - 142^\circ \;\Rightarrow\; \theta = 38^\circ.$$

□

8. La figura siguiente corresponde a una ventana rectangular coronada con un semicírculo. Si el perímetro de esta ventana es $P = 2(10 + \pi)$ m, entonces el área de la misma es: ________.

▼ La respuesta es C.

El área de esta ventana es igual a la suma de las áreas del rectángulo y del semicírculo. El área del rectángulo es:

$$A_R = (2x)(4x) = 8x^2.$$

El área del semicírculo de radio x es:

$$A_C = \frac{1}{2}\pi x^2.$$

Luego el área total de la ventana es:

$$A = A_R + A_C = 8x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 = \left(8 + \frac{\pi}{2}\right) x^2.$$

Ahora, para conocer el valor de x utilizamos la información que se tiene sobre el perímetro P de la ventana. Por una parte se sabe que $P = 2(10 + \pi)$ m y por otra parte:

$$P = 1(2x) + 2(4x) + \pi x = 10x + \pi x = (10 + \pi)x.$$

Entonces:

$$(10 + \pi)x = 2(10 + \pi) \;\Rightarrow\; x = 2 \text{ m}.$$

Por lo tanto el área de la ventana es:

$$A = \left(8 + \frac{\pi}{2}\right) x^2 = \left(8 + \frac{\pi}{2}\right) (2)^2 = \left(8 + \frac{\pi}{2}\right) 4 = 32 + 2\pi.$$

Esto es:

$$A = 2(16 + \pi)\ \mathrm{m}^2.$$

□

9. La figura siguiente corresponde a una ventana rectangular coronada con un semicírculo. Si el área de esta ventana es $A = 2(16 + \pi)\ \mathrm{m}^2$, entonces el perímetro de la misma es: ________.

▼ La respuesta es C.

El perímetro de la ventana es la suma de la longitud de tres lados del rectángulo mas la longitud del semicírculo de radio $\dfrac{x}{2}$:

$$P = 2x + x + 2x + \left(\frac{x}{2}\right)\pi = 5x + \frac{\pi}{2}x = \left(5 + \frac{\pi}{2}\right) x.$$

Para conocer el valor de x, utilizamos la información que se tiene sobre el área de la ventana. Por una parte se sabe que dicha área es:

$$A = 2(16 + \pi)\ \mathrm{m}^2.$$

Y por otra parte se tiene que,

$$A = (2x)x + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2x^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \left(2 + \frac{\pi}{8}\right) x^2.$$

Entonces debe cumplirse:

$$\left(2 + \frac{\pi}{8}\right) x^2 = 2(16 + \pi)\ \mathrm{m}^2 \Rightarrow \left(\frac{16 + \pi}{8}\right) x^2 = 2(16 + \pi)\ \mathrm{m}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 16\frac{(16 + \pi)}{(16 + \pi)}\ \mathrm{m}^2 \Rightarrow x^2 = 16\ \mathrm{m}^2 \Rightarrow x = 4\ \mathrm{m}.$$

Por lo tanto el perímetro de la ventana es:

$$P = \left(5 + \frac{\pi}{2}\right) x = \left(5 + \frac{\pi}{2}\right) 4 = 20 + 2\pi.$$

Esto es:

$$P = 2(10 + \pi)\ \mathrm{m}.$$

□

10. La figura siguiente corresponde a una ventana rectangular coronada con un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana es $P = 28$ m, entonces el área de la misma es: ________.

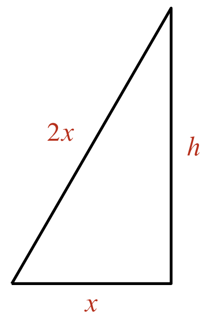
▼ La respuesta es C.

El área de la ventana es igual a la suma de las áreas del rectángulo y del triángulo.

El área del rectángulo es:

$$A_R = (2x)(4x) = 8x^2.$$

Para determinar el área del triángulo equilátero, utilizamos la siguiente figura:



Donde por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + x^2 = (2x)^2 \Rightarrow h^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow h = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x.$$

El área del triángulo equilátero que tiene base de longitud $2x$, altura $h = \sqrt{3}x$, es:

$$A_T = \frac{1}{2}(2x)(\sqrt{3}x) = \sqrt{3}x^2.$$

Luego el área de la ventana es:

$$A = A_R + A_T = 8x^2 + \sqrt{3}x^2 = (8 + \sqrt{3})x^2.$$

Para conocer el valor de x utilizamos la información que se tiene sobre el perímetro P de la ventana. Por una parte se sabe que $P = 28$ m y por otra parte que:

$$P = 3(2x) + 2(4x) = 6x + 8x = 14x.$$

Entonces:

$$14x = 28 \text{ m, de donde } x = 2 \text{ m.}$$

Por lo tanto, el área de la ventana es:

$$A = (8 + \sqrt{3})x^2 = (8 + \sqrt{3})(2)^2 = (8 + \sqrt{3})4.$$

Esto es,

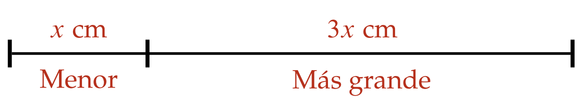
$$A = 4(8 + \sqrt{3}) \text{ m}^2.$$

□

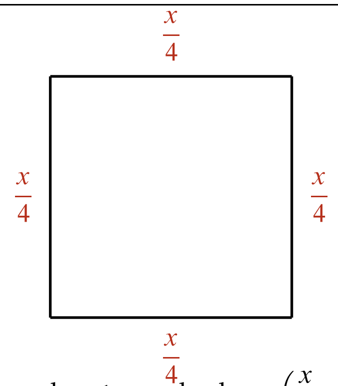
11. Un alambre de ℓ cm de longitud se divide en 2 pedazos, de manera que el pedazo más largo mide el triple que el más corto. Con el más largo se construye un triángulo equilátero y con el más corto un cuadrado. Si el área del cuadrado es de 100 cm^2, entonces el área del triángulo es: ________ .

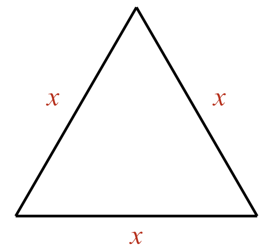
▼ La respuesta es C.

Independientemente de la longitud ℓ del alambre, es importante resaltar que al dividirlo en dos pedazos, el más grande mide 3 veces más que el pequeño. Entonces si suponemos que la longitud del menor es x, la longitud del más grande es $3x$. Esto es:



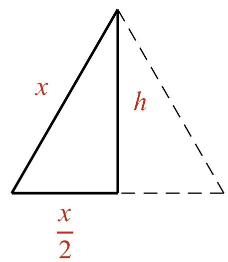
Al construir un cuadrado con x cm de alambre, resulta un cuadrado con $\frac{x}{4}$ cm de lado y al construir un triángulo equilátero con $3x$ de alambre, resulta un triángulo con x cm de lado.





El área de este cuadrado es $\left(\frac{x}{4}\text{ cm}\right)^2 = \frac{x^2}{16}\text{ cm}^2$, y como dicha área es $A = 100\text{ cm}^2$:

$$\frac{x^2}{16} = 100 \Rightarrow x^2 = 1\,600 \Rightarrow x = \sqrt{1\,600} \Rightarrow x = 40\text{ cm}.$$



Ahora, el triángulo tiene base de longitud x cm y altura:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x\text{ cm}.$$

Por lo tanto, el área del triángulo es:

$$A_t = \frac{xh}{2} = \frac{x}{2}h = \frac{x}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(40)^2\text{ cm}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1\,600)\text{ cm}^2 = \sqrt{3}(400)\text{ cm}^2 =$$
$$= 400\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

□

12. La siguiente figura corresponde a una caja con base y tapa cuadradas y caras laterales rectangulares. La longitud de la altura es igual al perímetro de la base. Si el volumen de la caja es de 32 m^3, entonces el área de la superficie total de la caja es: ________.

▼ La respuesta es C.

Si la longitud h de la altura es igual al perímetro de la base cuadrada de lado x, entonces $h = 4x$. El volumen de la caja es:

$$V = x^2h = x^2(4x) = 4x^3.$$

Y debido a que dicho volumen es $V = 32\text{ m}^3$, entonces:

$$4x^3 = 32\text{ m}^3 \Rightarrow x^3 = 8\text{ m}^3 = (2\text{ m})^3 \Rightarrow x = 2\text{ m}.$$

Ahora, el área de la superficie total de la caja es igual a la suma de las áreas de la base, la tapa y las caras laterales rectangulares. El área de esta caja es:

$$A = x^2 + x^2 + 4xh = 2x^2 + 4x(4x) = 2x^2 + 16x^2 = 18x^2.$$

Por lo tanto, por ser $x = 2$ m, el área de la superficie total de la caja es:

$$A = 18(2\text{ m})^2 = 18(4\text{ m}^2) = 72\text{ m}^2.$$

□

13. La siguiente figura corresponde a un tanque de almacenamiento formado por un cilindro circular recto coronado con una semiesfera. La altura y el diámetro del cilindro tienen longitudes iguales. Si el área lateral del cilindro es de 400π m^2, entonces el volumen total del tanque es: ________.

▼ La respuesta es C.

Si la altura y el diámetro del cilindro miden x m cada uno, entonces la altura h y el radio r del cilindro miden: $h = x$ m; $r = \dfrac{x}{2}$ m. El área lateral de este cilindro es $A = 2\pi rh$; y debido a que dicha área es $A = 400\pi$ m^2, entonces:

$$2\pi rh = 400\pi \ \Rightarrow 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)x = 400\pi \ \Rightarrow \ x^2\pi = 400\pi \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 400 \ \Rightarrow \ x = 20\text{ m}.$$

Ahora, el volumen de este cilindro es igual a la suma de los volúmenes del cilindro $V_c = \pi r^2 h$ y de la semiesfera $V_s = \pi\frac{2}{3}r^3$; es decir:

$$V = V_c + V_s = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 x + \frac{2}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{4}x^3 + \frac{\pi}{12}x^3 = \frac{\pi}{3}x^3.$$

Y debido a que $x = 20$ m, el volumen de este cilindro es:

$$V = \frac{\pi}{3}x^3 = \frac{\pi}{3}(20\text{ m})^3 = \frac{\pi}{3}(8\,000\text{ m}^3).$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{8\,000}{3}\pi\text{ m}^3.$$

□

14. La siguiente figura corresponde a una caja con base y tapa cuadradas y caras laterales rectangulares. Si la longitud de la altura es igual al perímetro de la tapa y el área total de la superficie de la caja es 72 m^2, entonces el volumen de la caja es: ________.

▼ La respuesta es C.

Si la longitud h de la altura es igual al perímetro de la tapa cuadrada de lado x, entonces: $h = 4x$. El area total de la superficie de la caja es igual a la suma de las áreas de la base, la tapa y las caras laterales rectangulares. Es decir:

$$A = x^2 + x^2 + 4xh = 2x^2 + 4x(4x) = 2x^2 + 16x^2 = 18x^2.$$

Y debido a que dicha área total es $A = 72$ m^2, entonces:

$$18x^2 = 72\text{ m}^2 \Rightarrow x^2 = 4\text{ m}^2 \Rightarrow x = 2\text{ m}.$$

Ahora, el volumen de esta caja es:

$$V = x^2 h = x^2(4x) = 4x^3.$$

Por lo tanto, dado que $x = 2$ m, el volumen de esta caja es:

$$V = 4(2\text{ m})^3 = 4(8\text{ m}^3) = 32\text{ m}^3.$$

□

15. Se tiene la esfera de radio R, e inscrito en ella un cono recto circular de altura $H = \dfrac{4}{3}R$. Si el radio de la esfera es 3, entonces el volumen de la esfera que esta fuera del cono es: ________ .

▼ La respuesta es C.

Como $H = \dfrac{4}{3}R$ y como $R = 3$, entonces $H = \dfrac{4}{3}(3) = 4$.

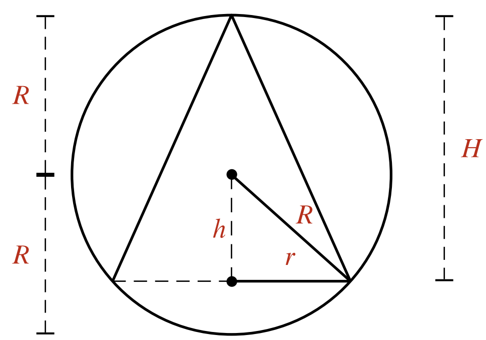
El volumen de la esfera de radio $R = 3$ es:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = \frac{4}{3}\pi(27) = 36\pi.$$

El volumen del cono recto circular de altura H y radio r (de la base circular) es:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi r^2(4) = \frac{4}{3}\pi r^2.$$

Donde el radio r de la base circular es desconocido. Para determinar el valor de r, proyectamos en un plano (por ejemplo, una pared) la esfera con el cono inscrito:



Aquí notamos que $h = H - R = 4 - 3 = 1$. Además, en el triángulo rectángulo de catetos h, r, y con hipotenusa R:

$$r^2 = R^2 - h^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \Rightarrow r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Luego, como el volumen de este cono es:

$$V_c = \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi(8) = \frac{32}{3}\pi.$$

Por lo tanto, el volumen de la esfera que esta fuera del cono es:

$$V = V_e - V_c = 36\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{108\pi - 32\pi}{3} = \frac{76}{3}\pi.$$

□

Bibliografía

Matemática

[1] Baldor, Aurelio, *Aritmética*,
Grupo Editorial Patria, segunda edición, México, 2007.

[2] —— *Álgebra*,
Grupo Editorial Patria, segunda edición, México, 2007.

[3] —— *Geometría y trigonometría*,
Grupo Editorial Cultural, segunda edición, México, 2008.

[4] Granville, William Anthony, *Cálculo diferencial e integral*,
Editorial Limusa, primera edición, México, 2008.

[5] Lehmann, Charles H., *Geometría analítica*,
Editorial Limusa, primera edición, México, 2008.

Física

[6] Alvarenga, B. y A. Máximo, *Física general con experimentos sencillos*,
Editorial Oxford, México, 2002.

[7] Hewitt, Paul G., *Física conceptual*,
Pearson Educación, novena edición, México, 2004.

[8] Pérez Montiel, Héctor, *Física general* (Serie bachiller),
Grupo Editorial Patria, cuarta edición, México, 2011.

[9] Serway, R.A. y J.S. Faughn, *Fundamentos de física*,
Thomson, volumen 1, octava impresión, México, 2010.

[10] Tippens, P.E. *Física, conceptos y aplicaciones*,
McGraw-Hill Interamericana, volumen 1, séptima edición, México, 2010.

Química

[11] Brown–LeMAY–Bursten, *Química, la ciencia central*,
Pearson Prentice–Hall, novena edición, México, 2004.

[12] Chang, Raymond, *Química general para bachillerato*,
Mc Graw Hill, cuarta edición, México, 2008.

[13] Laurel, Dingrado, Kathleen V. Gregg, Nicholas Hainen y Cheryl Wistrom, *Química, materia y cambio*,
Mc Graw Hill, primera edición, México, 2002.

[14] Recio, Francisco, *Química inorgánica. Bachillerato*, Mc Graw Hill, cuarta edición, México, 2008.

[15] Whitten, Kenneth W., Davis Raymond E., *Química*, Cengage Learning Editores, octava edición, México, 2008.

Razonamiento verbal

[16] Cassany, Daniel, *Taller de textos / Leer, escribir y comentar en el aula*, (Papeles de Pedagogía), Paidós, Barcelona, 2007, 192 págs.

[17] Cohen, Sandro, *Redacción sin dolor*, Planeta, quinta edición, México, 2010.

[18] Real Academia Española, *Diccionario esencial de la lengua española*, Espasa Calpe, Madrid, 2006.

[19] ——(y Asociación de Academias de la Lengua Española), *Ortografía de la lengua española*, Espasa Calpe, Madrid, 2010.

[20] Sáinz de Roles, Federico Carlos, *Diccionario español de sinónimos y antónimos*, (Colección Obras de Consulta), Aguilar, Madrid, 1994, 1 148 págs.

Otras obras de consulta

[21] Espinosa Herrera, Ernesto Javier (coord.) *et al*., *Autoevaluación I*, Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), México 2011.

[22] Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), *Guía de estudio para el examen de selección*, UAM, México 2011.

El libro *A tiempo* se terminó de imprimir en el mes de mayo de 2013, en los talleres de Impresos Diforms, S.A. de C.V, Calle Poniente 116, núm. 243, Colonia Capultitlán, Delegación Gustavo A. Madero. Fue compuesto con las familias MathTime Profesional y Palatino de Latex. Interiores en papel bond de 90 gramos y forros de cartulina sulfurada de 12 puntos.

El tiraje constó de 3 000 ejemplares, más sobrantes para reposición.