CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E0100, TRIMESTRE 01-I, 05/04/2001

(A) Primer parcial

(1) Una compañía que fabrica escritorios los vende a \$200 cada uno. Si se fabrican y venden x escritorios cada semana, el gasto total por la producción y la venta (semanal) viene dado por la función:

$$G(x) = x^2 + 40x + 1500,$$

considerando que siempre se vende toda la producción semanal.
¿Cuántos escritorios se deben fabricar semanalmente para que haya ganancia?

(2) Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t - 11}$ & $g(u) = |\, 2u - 1 \,|$,
obtener: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y los dominios de las funciones $f \circ g$ & $g \circ f$.

(3) Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar 12 000 pies^3 de agua. El concreto para construir la base y los lados tiene un costo de \$100.00 por pies^2 y el material para construir la tapa cuesta \$200.00 por pies^2.
Obtenga el costo de la construcción de la cisterna en función de la longitud x del lado de la base cuadrada.

(4) Determinar dominio, raíces, un esbozo de la gráfica de la función y su rango.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |\, x + 3 \,| & \text{si } -3 < x < 1; \\ 1 + 2x - x^2 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

(B) Segundo parcial

(1) Para la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}$$

Determinar:
(a) Dominio, raíces e intervalos de continuidad
(b) Discontinuidades y su clasificación
(c) Asíntotas verticales y horizontales
(d) Un esbozo de la gráfica

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right).$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 6} + x \right).$

---

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(4) Trace la gráfica de una función f que tenga una discontinuidad removible en $x = -2$ y que además satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{llll} f(0) = 3; & f(4) = 0; & f(6) = 0; & \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2; & \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \infty; & \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2. \end{array}$$

(5) Calcule los valores a & b de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1; \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \le x < 2; \\ 3x & \text{si } x \ge 2\,, \end{cases}$$

sea continua en todos los reales.

(C) Tercer parcial

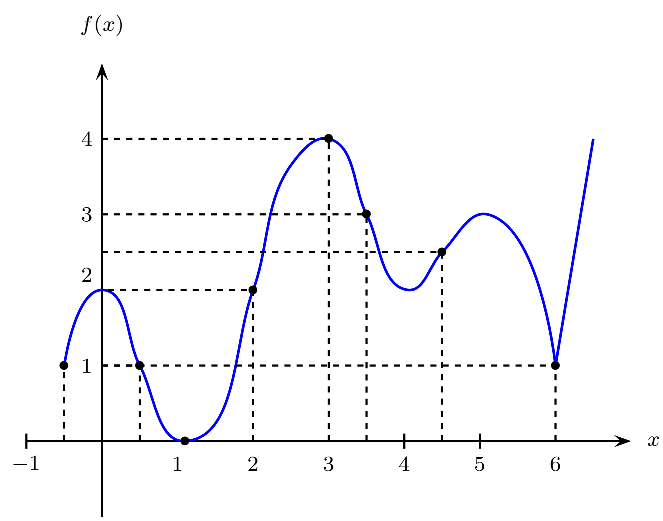
(1) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2y - y^3 = 8$, en el punto $(-3, 1)$.

(2) Para la función $f(x) = (x^2 - 4)^3$

determine:

(a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. Los extremos relativos
(b) Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo. Los puntos de inflexión
(c) La gráfica

(3) A partir de la gráfica dada de f, cuyo dominio es $[-0.5, \infty)$



Determine:

(a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento
(b) Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo
(c) Los máximos y mínimos relativos, los máximos y mínimos absolutos y los puntos de inflexión

(4) Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. (Por consiguiente, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo.) Si el perímetro de la ventana es de 30 cm solamente, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) Una compañía que fabrica escritorios los vende a \$200 cada uno. Si se fabrican y venden x escritorios cada semana, el gasto total por la producción y la venta (semanal) viene dado por la función:

$$G(x) = x^2 + 40x + 1500,$$

considerando que siempre se vende toda la producción semanal.
¿Cuántos escritorios se deben fabricar semanalmente para que haya ganancia?

▼ Al vender x escritorios a \$200 cada uno, se obtiene un ingreso semanal de

$$I(x) = 200x\,.$$

La ganancia o la pérdida que se tenga semanalmente, depende de la diferencia (D) entre I & G

$$\begin{aligned} D(x) &= I(x) - G(x) = 200x - (x^2 + 40x + 1500) = \\ &= 200x - x^2 - 40x - 1500 = -x^2 + 160x - 1500\,. \end{aligned}$$

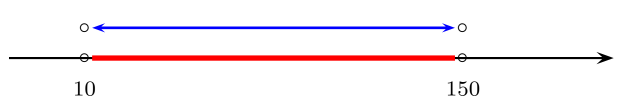
Si $D(x) > 0$, entonces hay ganancias; si $D(x) < 0$, hay pérdidas y si $D(x) = 0$, entonces no hay ganancias ni pérdidas.

$$\begin{aligned} D(x) > 0 &\Leftrightarrow -x^2 + 160x - 1500 > 0 \Leftrightarrow (-1)(-x^2 + 160x - 1\,500) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 160x + 1\,500 < 0 \Leftrightarrow (x - 10)(x - 150) < 0\,. \end{aligned}$$

Desigualdad que se cumple cuando

$$\begin{array}{ccc} x - 10 < 0 \ \&\ x - 150 > 0 & \text{o bien} & x - 10 > 0 \ \&\ x - 150 < 0; \\ x < 10 \ \&\ x > 150 & \text{o bien} & x > 10 \ \&\ x < 150; \\ x \text{ no existe} & \text{o bien} & 10 < x < 150\,. \end{array}$$

Es decir, $D(x) > 0$ cuando $10 < x < 150$.
Esto es, hay ganancia cuando el total x de escritorios fabricados está entre 10 y 150.



$\square$

(2) Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t - 11}$ & $g(u) = |\,2u - 1\,|$,
obtener: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y los dominios de las funciones $f \circ g$ & $g \circ f$.

▼ Para las funciones $f(t) = \sqrt{t - 11}$ & $g(u) = |\,2u - 1\,|$ se tienen:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(|\,2x - 1\,|) = \sqrt{|\,2x - 1\,| - 11}\,.$$

Y su dominio es:

$$
\begin{aligned}
D_{f\circ g} &= \left\{\, x \,\middle|\, x \in D_g \;\&\; g(x) \in D_f \,\right\} = \\
&= \left\{\, x \,\middle|\, |\,2x-1\,| \in \mathbb{R} \;\&\; \sqrt{|\,2x-1\,|-11} \in \mathbb{R} \,\right\} = \\
&= \left\{\, x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \;\&\; |\,2x-1\,|-11 \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \,\middle|\, |\,2x-1\,| \geq 11 \,\right\} = \\
&= \left\{\, x \,\middle|\, 2x-1 \leq -11 \text{ o bien } 2x-1 \geq 11 \,\right\} = \\
&= \left\{\, x \,\middle|\, 2x \leq -10 \text{ o bien } 2x \geq 12 \,\right\} = \left\{\, x \,\middle|\, x \leq -5 \text{ o bien } x \geq 6 \,\right\} = \\
&= (-\infty, -5] \bigcup [6, +\infty) = \mathbb{R} - (-5, 6).
\end{aligned}
$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = |\,2f(x)-1\,| = \left|\,2\sqrt{x-11}-1\,\right| .$$

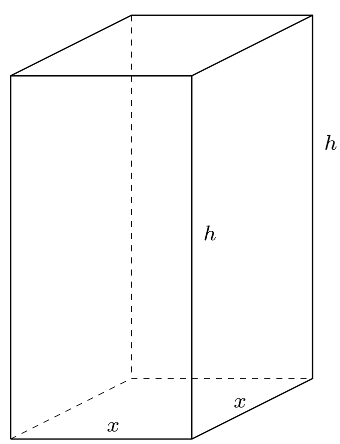
Y su dominio es:

$$
\begin{aligned}
D_{g\circ f} &= \left\{\, x \,\middle|\, x \in D_f \;\&\; f(x) \in D_g \,\right\} = \\
&= \left\{\, x \,\middle|\, \sqrt{x-11} \in \mathbb{R} \;\&\; \left|\,2\sqrt{x-11}-1\,\right| \in \mathbb{R} \,\right\} = \\
&= \left\{\, x \,\middle|\, \sqrt{x-11} \in \mathbb{R} \,\right\} = \left\{\, x \,\middle|\, x-11 \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \,\middle|\, x \geq 11 \,\right\} = \\
&= [11, +\infty) .
\end{aligned}
$$

□

(3) Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar 12 000 pies^3 de agua. El concreto para construir la base y los lados tiene un costo de \$100.00 por pies^2 y el material para construir la tapa cuesta \$200.00 por pies^2.
Obtenga el costo de la construcción de la cisterna en función de la longitud x del lado de la base cuadrada.

▼ Veamos el correspondiente dibujo:



El área de la tapa es

$$x^2\text{pies}^2 \text{ (}x\text{ en pies) y su costo es entonces } 200x^2 \text{ pesos.}$$

El costo de la base es $100x^2$ pesos.
El área de las cuatro caras laterales es $4xh$ pies^2, y el costo $400xh$ pesos; pero, x & h están relacionados pues el volumen de la cisterna, 12 000 pies^3, es igual al área de la base x^2 por la altura h:

$$V = 12\,000 = x^2 h\,,$$

y de aquí que

$$h = \frac{12\,000}{x^2}\,;$$

y por último, el costo de la construcción como función de x es

$$C(x) = 200x^2 + 100x^2 + 400x\frac{12\,000}{x^2} = 300x^2 + \frac{4\,800\,000}{x}\,.$$

□

(4) Determinar dominio, raíces, un esbozo de la gráfica de la función y su rango.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |\,x+3\,| & \text{si } -3 < x < 1; \\ 1 + 2x - x^2 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

▼ Si $x > -3$, entonces $x + 3 > 0$, por lo que

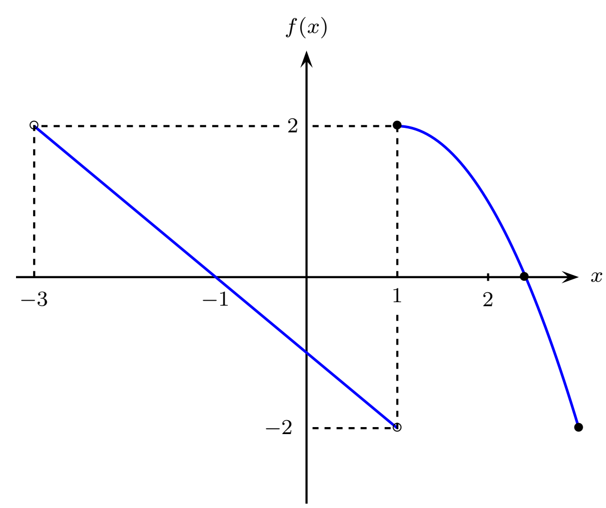
$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x+3) & \text{si } -3 < x < 1; \\ 1 + 2x - x^2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 < x < 1; \\ 1 + 2x - x^2 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Su dominio: $D_f = (-3, +\infty)$.
Raíces: Como $-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ es una raíz de f y como

$$1 + 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\,,$$

las raíces son $x = -1$ & $x = 1 + \sqrt{2}$.
Un esbozo de la gráfica de la función $f(x)$:



Entonces $-x^2 + 2x + 1 = -(x^2 - 2x + 1) + 2 = -(x-1)^2 + 2 \Rightarrow y = -x^2 + 2x + 1$ es una parábola de vértice $(1, 2)$ que dirige su concavidad hacia abajo y tiene rango $\mathbb{R}_f = (-\infty, 2]$.

□

(B) Segundo parcial

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}$, determinar:

(a) Dominio, raíces e intervalos de continuidad

▼ Dominio:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - x - 2 = 0 \right\},$$

pero

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ o bien } x = 2\,,$$

luego entonces,

$$D_f = \mathbb{R} - \{ -1, 2 \}\,.$$

Para calcular las raíces, vemos que:

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ o bien } x = -3\,,$$

pero, como $-1 \notin D_f$, $x = -3$ es la única raíz de $f(x)$.

La función $f(x)$ es continua en su dominio: $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 2) \bigcup (2, \infty)$.

□

(b) Discontinuidades y su clasificación

▼ Ahora:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+3}{x-2}, \text{ en su dominio;}$$
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x+3}{x-2} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}\,;$$

luego, en $x = -1$ la función tiene una discontinuidad removible, ya que si definimos $f(-1) = -\dfrac{2}{3}$, $f(x)$ resultaría continua en -1.

Vemos también que:

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty,$$

en $x = 2$, la función tiene una discontinuidad infinita.

□

(c) Asíntotas verticales y horizontales

▼ Por lo anterior, inferimos que $x = 2$ es la única asíntota vertical de la función. Para obtener las horizontales, calculemos

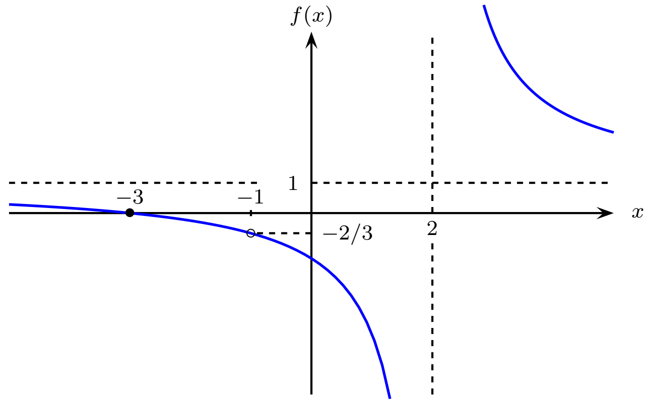
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x-2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1;$$

obtenemos que $y = 1$ es asíntota horizontal.

□

(d) Un esbozo de la gráfica

▼ Ésta es la gráfica de la función $f(x)$:



□

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

▼ Un poco de álgebra

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}=\frac{x^2+x+1-3}{x^3-1}=\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=$$
$$=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{x^2+x+1}\ \text{si } x\neq 1\,.$$

Luego

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1\,.$$

□

(3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+6}+x\right)$.

▼ Racionalizando,

$$\sqrt{x^2+2x+6}+x=\frac{x^2+2x+6-x^2}{\sqrt{x^2+2x+6}-x}=\frac{2x+6}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}-x}=$$
$$=\frac{2x+6}{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-x}=\frac{2x+6}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-x}\,;$$

si $x<0$, como va a ser el caso, entonces

$$\frac{2x+6}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1\right)}=\frac{-2-\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1}\,,$$

por lo que

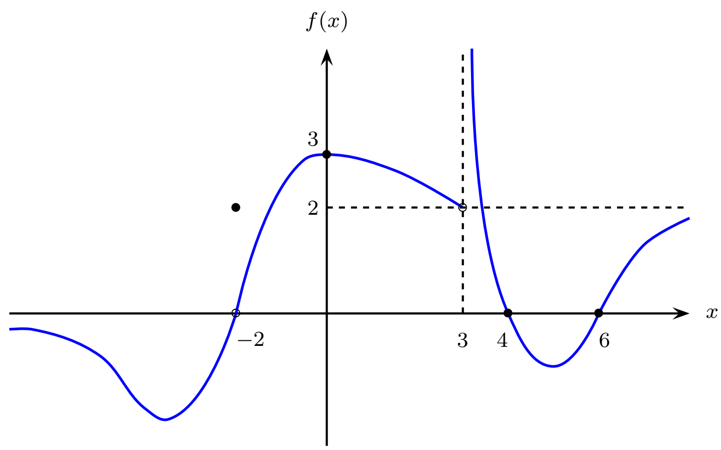
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+6}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2-\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1}=\frac{-2-0}{1+1}=-\frac{2}{2}=-1.$$

□

(4) Trace la gráfica de una función f que tenga una discontinuidad removible en $x=-2$ y que además satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{rrrr} f(0)=3; & f(4)=0; & f(6)=0; & \\ \lim\limits_{x\to3^-}f(x)=2; & \lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\infty; & \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0; & \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2. \end{array}$$

▼ Una posible gráfica de la función $f(x)$ que satisfaga todas esas condiciones es:



En nuestra gráfica vemos que $f(-2)=2$, pero $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=0$.

□

(5) Calcule los valores a & b de modo que la función

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<1;\\ ax^2+b & \text{si } 1\le x<2;\\ 3x & \text{si } x\ge 2\,, \end{cases}$$

sea continua en todos los reales.

▼ Claramente la función es continua en $(-\infty,1)\,,[1,2)$ y en $[2,+\infty)$, por lo que necesitamos comprobar que sea continua en $x=1$ y en $x=2$. Para ello se tiene que cumplir que

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=a+b,\text{ que es } f(1)$$

y que

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=6,\text{ que es } f(2)\,.$$

De aquí tenemos que

$$2=a+b\,,\ \text{ de la primera condición,}$$

y que

$$4a+b=6\,,\ \text{de la segunda condición.}$$

Esto es, tenemos que resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para hallar a & b.

$$\begin{cases} a+b=2; \\ 4a+b=6\,. \end{cases}$$

Restando la primera de la segunda tenemos que $3a=4$; entonces, $a=\dfrac{4}{3}$ & $b=2-a$, de la primera ecuación, por lo que $b=2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{6-4}{3}=\dfrac{2}{3}$.

□

(C) Tercer parcial

(1) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2y-y^3=8$, en el punto $(-3,1)$.

▼ Efectivamente, el punto $(-3,1)$ pertenece a la curva, pues sus coordenadas $x=-3$ & $y=1$ satisfacen la ecuación, ya que $(-3)^2\times 1-1^3=9\times 1-1=9-1=8$.
Para calcular la pendiente de la recta tangente, derivemos implícitamente la ecuación, donde estamos suponiendo que y es una función derivable de x. Tenemos

$$\begin{aligned} &2xy+x^2y'-3y^2y'=0\Rightarrow \\ &\Rightarrow y'(x^2-3y^2)=-2xy\Rightarrow \\ &\Rightarrow y'=\frac{2xy}{3y^2-x^2}\,. \end{aligned}$$

Esto es, para cualquier punto de la curva donde $3y^2-x^2\neq 0$; en particular en el punto $(-3,1)$, tenemos que la pendiente es

$$y'(-3,1)=\frac{2(-3)1}{3(1)^2-(-3)^2}=\frac{-6}{3-9}=\frac{-6}{-6}=1$$

y que la ecuación de la tangente es

$$y-1=1(x+3)\Rightarrow y=x+3+1\Rightarrow y=x+4\,.$$

□

(2) (a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. Los extremos relativos

▼ Calculemos:

$$f'(x)=3(x^2-4)^2 2x=6x(x+2)^2(x-2)^2\,.$$

Los puntos críticos están en $x=-2,0$ y en 2.
$f'(x)>0$ si $x>0 (x\neq 2)$, luego $f(x)$ es creciente en $[0,2]$ y en $[2,+\infty)$ también en $[0,+\infty)$
$f'(x)<0$ si $x<0 (x\neq -2)$, luego $f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-2]$ y en $[-2,0]$ también en $(-\infty,0)$
Entonces el único extremo relativo es $(0,-64)$, donde la función pasa de ser decreciente a ser creciente luego es un mínimo.

□

(b) Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo. Los puntos de inflexión

▼ Calculemos la derivada de $f'(x)=6x(x^2-4)^2$:

$$\begin{aligned} f''(x)&=6(x^2-4)^2+6x\times 2(x^2-4)\times 2x=6(x^2-4)(x^2-4+4x^2)= \\ &=6(x^2-4)(5x^2-4)=6(x+2)(x-2)(\sqrt{5}x+2)(\sqrt{5}x-2)\,. \end{aligned}$$

La segunda derivada se hace 0 en ± 2 y en $\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.89$, y su signo está dado en la tabla siguiente:

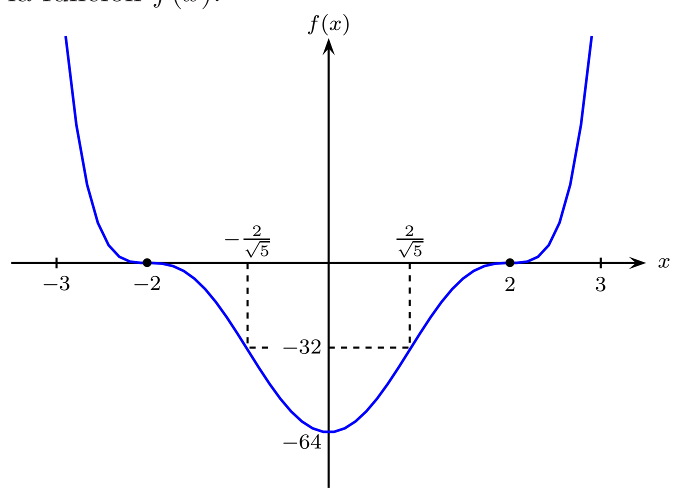
Intervalo	Signo de $x+2$	$\sqrt{5}x+2$	$\sqrt{5}x-2$	$x-2$	$f''(x)$	$f(x)$ es cóncava hacia
$x < -2 \left(< -\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{5}} < 2\right)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	arriba
$-2 < x < -\frac{2}{\sqrt{5}} \left(< \frac{2}{\sqrt{5}} < 2\right)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	abajo
$\left(-2 < -\frac{2}{\sqrt{5}} <\right) \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 2$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	abajo
$\left(-2 < -\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{5}} <\right) 2 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	arriba

Vemos entonces que en $\left(-2, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 2\right)$ la función es cóncava hacia abajo y que en $(-\infty, -2)$ y $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $(2, +\infty)$ lo es hacia arriba y que los puntos $(\pm 2, 0)$ & $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-16^3}{125}\right) \approx (\pm 0.89, -32.77)$ son de inflexión.

Tenemos además que $f(0) = -64$ & $f(\pm 4) = 1\,728$. □

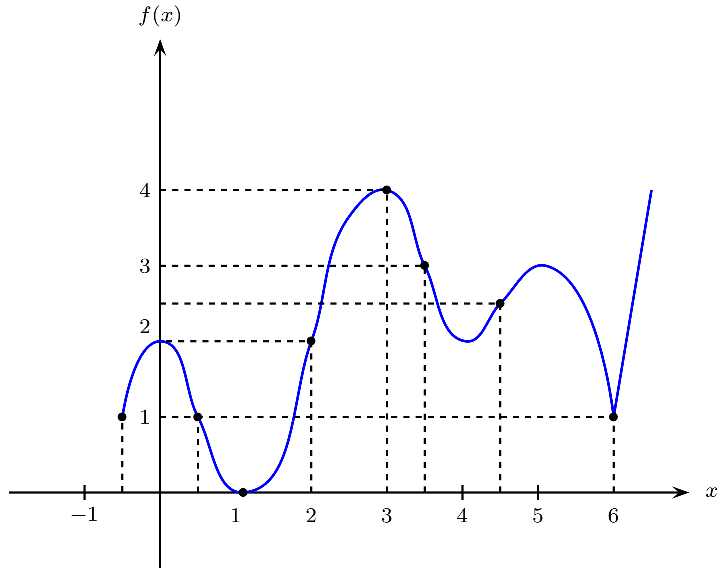
(c) La gráfica

▼ Tenemos la gráfica de la función $f(x)$:



Todo concuerda con que $f(x)$ es par. □

(3) A partir de la gráfica que vemos a continuación, cuyo dominio es $[-0.5, \infty)$,



determine:

(a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento

▼ La función $f(x)$ es creciente en $[-0.5, 0]\,, [1, 3]\,, [4, 5]$ y en $[6, +\infty)$;
la función $f(x)$ es decreciente en $[0, 1]\,, [3, 4]$ y en $[5, 6]$. □

(b) Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo

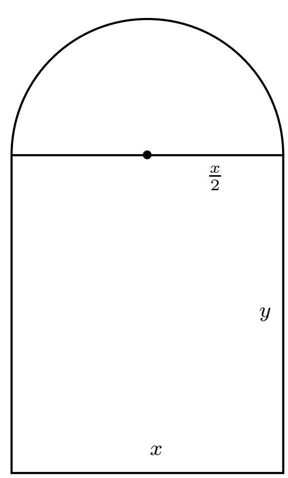
▼ La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $[0.5, 2]$ y en $[3.5, 4.5]$;
la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $[-0.5, 0.5]\,, [2, 3.5]\,, [4.5, 6]$ y en $[6, +\infty)$. □

(c) Los máximos y mínimos relativos, los máximos y mínimos absolutos y los puntos de inflexión

▼ Los máximos relativos son $(0, 2)\,, (3, 4)$ y $(5, 3)$.
Los mínimos relativos son $(-0.5, 1)$, $(1, 0)$, $(4, 2)$ y $(6, 1)$.
No tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto es $(1, 0)$.
Los puntos de inflexión son $(0.5, 1)\,, (2, 2)\,, (3.5, 3)$ & $(4.5, 2.5)$. □

(4) Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. (Por consiguiente, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo.) Si el perímetro de la ventana es de 30 cm solamente, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

▼ Usaremos el dibujo siguiente:



Queremos que el área de la ventana
$$A = xy + \frac{1}{2}\pi\frac{x^2}{4}$$
sea máxima.
Sabemos que el perímetro de la ventana es
$$P = x + 2y + \frac{\pi}{2}x = 30\,,$$
luego
$$y = \frac{30 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x}{2} = 15 - \frac{2+\pi}{4}x\,,$$
y el área queda, como función de la única variable x,
$$A(x) = \left(15 - \frac{2+\pi}{4}x\right)x + \frac{\pi}{8}x^2 = 15x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 =$$
$$= 15x - \frac{4+2\pi-\pi}{8}x^2 = 15x - \frac{\pi+4}{8}x^2\,,$$
cuyos puntos críticos los calculamos igualando a cero la derivada:
$$A'(x) = 15 - \frac{\pi+4}{4}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15\times 4}{\pi+4} = \frac{60}{\pi+4}\,.$$
Como $A''(x) = -\frac{\pi+4}{4} < 0$, se trata de un máximo y como
$$y = 15 - \frac{2+\pi}{4}\frac{60}{\pi+4} = 15 - \frac{15(\pi+2)}{\pi+4} = \frac{15\pi+60-15\pi-30}{\pi+4} = \frac{30}{\pi+4}\,,$$
entonces $y = \frac{x}{2}$.

$\square$