CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E1000

(A) Primer parcial

(1) El largo de un jardín rectangular mide 5 m más que el doble del ancho. El área del jardín debe ser por lo menos de 25 m^2, determine el intervalo de variación del ancho del jardín, si este ancho no puede exceder los 10 metros.

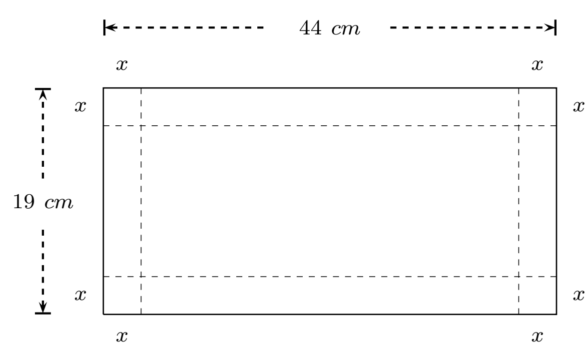
(2) Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } -4 < x \leq -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 3 \\ (x-4)^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Obtenga dominio, rango, raíces y un bosquejo de la gráfica de $g(x)$
(b) Grafique la función $h(x) = g(x+3) - 2$, a partir de la gráfica del inciso (a)

(3) Sean $f(v) = v^2 - 2v - 3$ & $g(u) = \sqrt{3-u}$.
Determine
(a) Los dominios de f y g respectivamente
(b) $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$, indicando el dominio en cada caso

(4) De una pieza rectangular de cartón que mide 44 cm de largo y 19 cm de ancho se va a construir una caja sin tapa. Se cortarán cuatro cuadrados de x cm de lado, como se muestran en la figura, y luego se doblarán sobre las líneas punteadas por formar la caja. Exprese el volumen de esta caja como función de x.



(B) Segundo parcial

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3}$ determine:
(a) Dominio y raíces
(b) Puntos de discontinuidad y su clasificación. Intervalos de continuidad
(c) Asíntotas verticales y horizontales
(d) Esbozo gráfico y rango

(2) Sea $(-\infty, 4) - \{-4\}$ el dominio de f. Trace una posible gráfica de f que cumpla con todas las condiciones siguientes:

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(a) Los puntos $(-3,2)$, $(-5,0)$, $(1,0)$ & $(3,0)$ están en la gráfica de f
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$
(c) $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=+\infty$
(d) $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-2$

A partir de la gráfica determine y clasifique los puntos de discontinuidad de f.

(3) Verifique que la ecuación $x^3-4x-2=0$ tiene una raíz real en el intervalo $[2,3]$ y determine un intervalo de longitud $1/4$ que contenga a dicha raíz.

(4) Determine los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en todo su dominio.

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{si } x=-3;\\ 9-x^2 & \text{si } x\neq\pm 3;\\ b & \text{si } x=3.\end{cases}$$

(C) Tercer parcial

(1) Obtener la ecuación de la recta normal a la curva $\sqrt{3x^2y^3+2x^2-y}=4+2x$ en el punto $(-1,1)$.

(2) Para la función $f(x)=3x^5-5x^3-1$, obtener:
(a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
(b) Máximos y mínimos relativos
(c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo
(d) Puntos de inflexión
(e) Con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función (Nota: No calcule las raíces de f).

(3) Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla a una velocidad de 500 millas/h y pasa sobre una estación de radar. Encuentre la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando el avión está a 2 millas de la estación.

(4) Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal con tapa que tenga una superficie total de 80 cm^2. Determine sus dimensiones de modo que tenga el mayor volumen posible.

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) El largo de un jardín rectangular mide 5 m más que el doble del ancho. El área del jardín debe ser por lo menos de 25 m^2, determine el intervalo de variación del ancho del jardín, si este ancho no puede exceder los 10 metros.

▼ Si lo ancho mide x m, entonces lo largo mide $2x+5$ m y el área es $A = x(2x+5)$ m^2. Debido a que el área debe ser por lo menos 25 m^2, tenemos que $A \geq 25$. Luego entonces,

$$A \geq 25 \Rightarrow x(2x+5) \geq 25 \Rightarrow 2x^2+5x-25 \geq 0.$$

¿Cuál es el conjunto solución de esta desigualdad?

Vemos primero que la igualdad $2x^2+5x-25=0$ se cumple cuando

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+200}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{-5 \pm 15}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{-5+15}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \& \quad x_2 = \frac{-5-15}{4} = \frac{-20}{4} = -5.$$

Ubicando estos números en la recta numérica, obtenemos los intervalos

$$(-\infty, -5)\,, \ \left(-5, \frac{5}{2}\right) \ \& \ \left(\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

El signo de $2x^2+5x-25 = 2(x+5)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$ nos lo da entonces la tabla:

	Signo de		
Intervalo	$x+5$	$x-\frac{5}{2}$	$2x^2+5x-25$
$x < -5 \ \left(< \frac{5}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
$-5 < x < \frac{5}{2}$	$+$	$-$	$-$
$(-5 <)\, \frac{5}{2} < x$	$+$	$+$	$+$

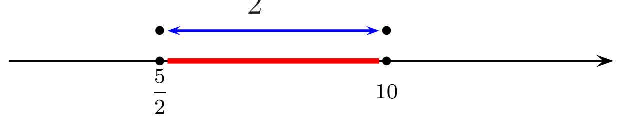
Se tiene pues que la desigualdad $2x^2+5x-25 \geq 0$ se cumple en el conjunto

$$(-\infty, -5] \bigcup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

Ahora bien, en el contexto del problema, x representa el total de metros que mide lo ancho del jardín, por lo cual debe ser $x > 0$. Esto nos lleva a considerar solamente al intervalo $\left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$ como conjunto solución de la desigualdad $2x^2+5x-25 \geq 0$.

Pero debido a que lo ancho no puede exceder los 10 m, entonces debe ser $x \leq 10$.

Por lo tanto, la solución del problema es: $\dfrac{5}{2} \leq x \leq 10$.



□

(2) Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } -4 < x \leq -1; \\ -1 & \text{si } -1 < x < 3; \\ (x-4)^2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

(a) Encuentre: dominio y raíces; la gráfica de la función y el rango

▼ Dominio:

Ya que $g(x) = 2x - 4$ para $x \in (-4, -1]$, $g(x) = -1$ para $x \in (-1, 3)$ & $g(x) = (x-4)^2$ para $x \in [3, +\infty)$, entonces el dominio de la función g es

$$D_g = (-4, -1] \bigcup (-1, 3) \bigcup [3, +\infty) = (-4, +\infty) .$$

Raíces:

$$g(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2, \text{ pero } x = 2 \notin (-4, -1] \ ;$$

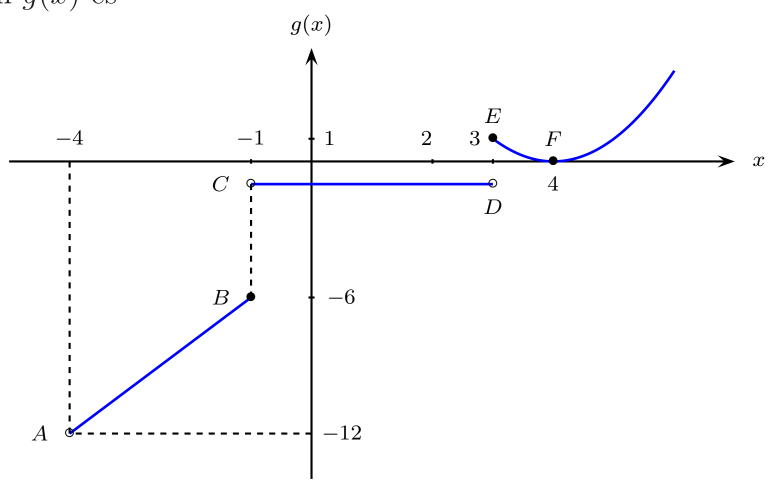
$g(x) = -1$ no tiene raíces;

$$g(x) = (x-4)^2 = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \ \& \ \ x = 4 \in [3, +\infty) \ .$$

Luego entonces, sólo se tiene una raíz: $x = 4$.

Calculamos los valores de $g(x)$ en los extremos de cada intervalo: $A = (-4, -12)$, $B = (-1, -6)$, $C = (-1, -1)$, $D = (3, -1)$, $E = (3, 1)$ y $F = (4, 0)$.

La gráfica de la función $g(x)$ es



Rango:

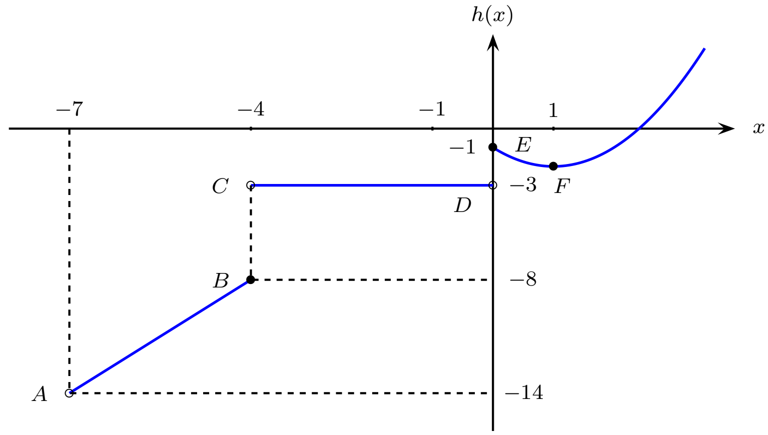
El rango de la función es $R_g = (-12, -6] \bigcup \{-1\} \bigcup [0, +\infty)$.

□

(b) Grafique la función $h(x) = g(x + 3) - 2$, a partir de la gráfica del inciso (a)

▼ La gráfica de la función $h(x) = g(x + 3) - 2$ se obtiene trasladando a la gráfica de g primero 3 unidades hacia la izquierda y luego 2 unidades hacia abajo. Entonces,

$$\begin{array}{lll} A(-4, -12) & \rightarrow A'(-7, -12) & \rightarrow A''(-7, -14); \\ B(-1, -6) & \rightarrow B'(-4, -6) & \rightarrow B''(-4, -8); \\ C(-1, -1) & \rightarrow C'(-4, -1) & \rightarrow C''(-4, -3); \\ D(3, -1) & \rightarrow D'(0, -1) & \rightarrow D''(0, -3); \\ E(3, 1) & \rightarrow E'(0, 1) & \rightarrow E''(0, -1); \\ F(4, 0) & \rightarrow F'(1, 0) & \rightarrow F''(1, -2). \end{array}$$



□

(3) Sean $f(v) = v^2 - 2v - 3$ & $g(u) = \sqrt{3-u}$.
Determine:

(a) El dominio de f & g respectivamente

▼ Dominios:

$f(v) = v^2 - 2v - 3$ es una función polinomial, por lo cual su dominio es $D_f = \mathbb{R}$.

El dominio de la función $g(u) = \sqrt{3-u}$ es

$$D_g = \left\{ u \in \mathbb{R} \;\middle|\; g(u) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sqrt{3-u} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ u \in \mathbb{R} \;\middle|\; 3-u \geq 0 \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R} \;\middle|\; 3 \geq u \right\} =$$
$$= \left\{ u \in \mathbb{R} \;\middle|\; u \leq 3 \right\} = (-\infty, 3] \,.$$

□

(b) $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$, indicando el dominio en cada caso

▼ Calculamos:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{3-x}) =$$
$$= (\sqrt{3-x})^2 - 2\sqrt{3-x} - 3 = 3 - x - 2\sqrt{3-x} - 3 =$$
$$= -x - 2\sqrt{3-x};$$

$$D_{f\circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; g(x) \in \mathbb{R} \,\&\, f[g(x)] \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in D_g \,\&\, g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 3 - x \geq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq 3 \right\} = (-\infty, 3] \,;$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2 - 2x - 3) = \sqrt{3 - (x^2 - 2x - 3)} =$$
$$= \sqrt{3 - x^2 + 2x + 3} = \sqrt{-x^2 + 2x + 6};$$

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in D_f \;\&\; f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 2x - 3 \in (-\infty, 3] \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 2x - 3 \leq 3 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 2x - 6 \leq 0 \right\} .$$

Ahora bien, $x^2 - 2x - 6 = 0$ cuando

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7};$$

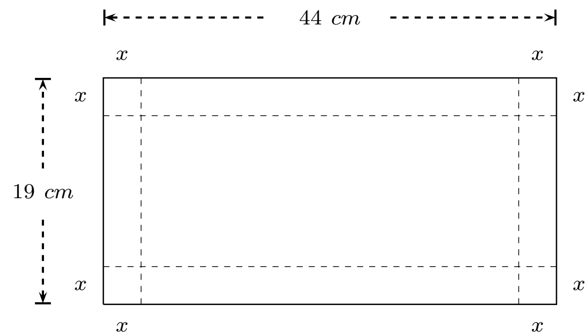
además, $x^2 - 2x - 6 < 0$ cuando $1 - \sqrt{7} < x < 1 + \sqrt{7}$.

Luego entonces

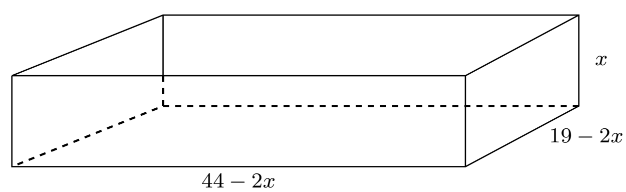
$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 2x - 6 \le 0 \right\} = [1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}].$$

□

(4) De una pieza rectangular de cartón que mide 44 cm de largo y 19 cm de ancho se va a construir una caja sin tapa. Se cortarán cuatro cuadrados de x cm de lado, como se muestran en la figura, y luego se doblarán sobre las líneas punteadas por formar la caja. Exprese el volumen de esta caja como función de x.



▼ La caja se ve así:



Si a los 44 cm de largo le quitamos x cm de cada lado, entonces queda una longitud igual a $44-2x$ cm. Si a los 19 cm de ancho le quitamos x cm de cada lado, entonces queda una longitud igual a $19-2x$ cm. Al cortar los cuadraditos y doblar el cartón, se obtiene una caja de altura x, anchura $19-2x$ y largo $44-2x$, centímetros.
Por lo tanto, el volumen de la caja es:

$$V = x(19-2x)(44-2x) \text{ cm}^3.$$

Es decir,

$$V(x) = 4x^3 - 126x^2 + 836x \text{ cm}^3.$$

□

(B) Segundo parcial

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$, determine:

(a) Dominio y raíces

▼ Por ser f una función racional su dominio es

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^2+4x+3=0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, (x+3)(x+1)=0 \right\};$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{-3,-1\}.$$

Ahora raíces:

Para $f(x) = 0$, es necesario que $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ o bien que $x = 2$. Es decir, $f(x)$ sería 0 en $x = -3$ y en $x = 2$. Pero $x = -3$ no está en el dominio de f. Luego entonces, f tiene solamente una raíz, que es $x = 2$.

□

(b) Puntos de discontinuidad y su clasificación. Intervalos de continuidad

▼ Discontinuidad:

Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3, -1\}.$$

Es decir, f es continua en los intervalos

$$(-\infty, -3), \ (-3, -1) \text{ y } (-1, +\infty).$$

Luego entonces, f tiene discontinuidades en $x = -3$ y en $x = -1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3} f(x) &= \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x\to -3} \frac{x-2}{x+1} = \\ &= \frac{-3-2}{-3+1} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f \text{ tiene en } x = -3\text{, una discontinuidad removible;} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x+1} = \text{“}\left(\frac{-3}{0}\right)\text{”}.$$

Ya que $\lim\limits_{x\to -1}(x-2) = -1-2 = -3$ & $\lim\limits_{x\to -1}(x+1) = -1+1 = 0$, entonces

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x+1} = +\infty \text{ o bien } -\infty.$$

Por lo cual, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ no existe. Esto es, f tiene en $x = -1$ una discontinuidad esencial.

□

(c) Asíntotas verticales y horizontales

▼ Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-2}{x+1} = +\infty$; ya que $x - 2 \to -3 < 0$ & $x + 1 \to 0$ con $x + 1 < 0$ cuando $x \to -1^-$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-2}{x+1} = -\infty$; ya que $x - 2 \to -3 < 0$ & $x + 1 \to 0$ con $x + 1 > 0$ cuando $x \to -1^+$

Luego entonces la recta $x = -1$ es una asíntota vertical y además es la única.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

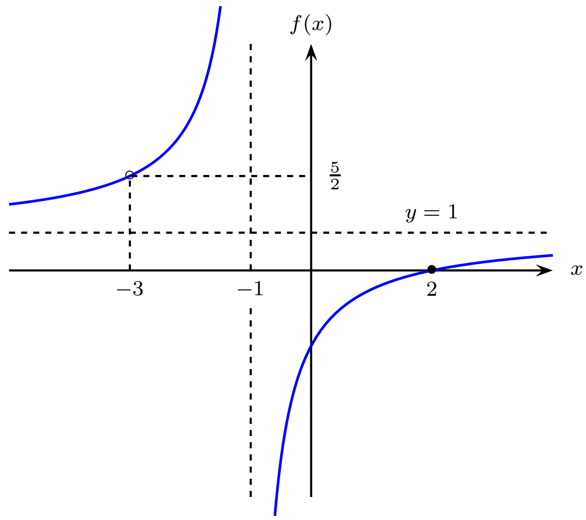
Así también, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

Por lo tanto, la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal de f.

□

(d) Esbozo gráfico y rango

▼ La gráfica de $f(x)$ es:



El rango de la función es:

$$R_f = (-\infty, 1) \bigcup \left(1, \frac{5}{2}\right) \bigcup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right);$$
$$R_f = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{5}{2}\right\}.$$

Observe que $\dfrac{5}{2} \notin R_f$, pues

$$f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 5x^2 + 20x + 15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 18x + 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -3,$$

pero $x = -3 \notin D_f$.

$\square$

(2) Sea $(-\infty, 4) - \{-4\}$ el dominio de f. Trace una posible gráfica de f que cumpla con todas las condiciones siguientes:

(a) Los puntos $(-3, 2)$, $(-5, 0)$, $(1, 0)$ & $(3, 0)$ están en la gráfica de f

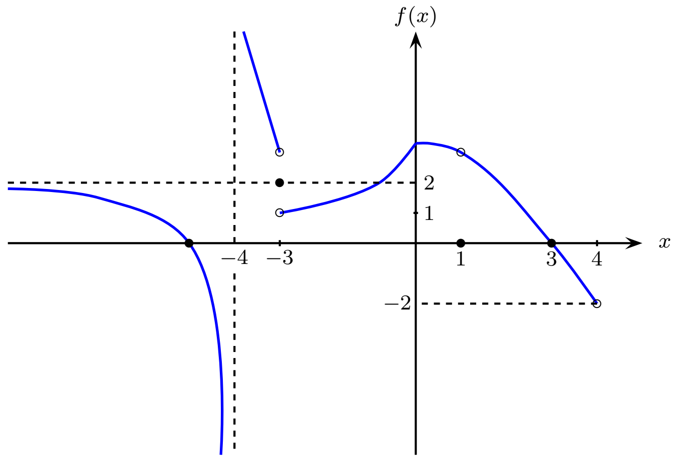
(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

(c) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$

(d) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -2$

A partir de la gráfica determine y clasifique los puntos de discontinuidad de f.

▼ Una gráfica posible de $f(x)$ es la siguiente



La función f tiene discontinuidades en:
$x = -4$, que es infinita; $x = -3$, que es esencial; $x = 1$, que es removible.

□

(3) Verifique que la ecuación $x^3 - 4x - 2 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo $[2, 3]$ y determine un intervalo de longitud $1/4$ que contenga a dicha raíz.

▼ La función polinomial $f(x) = x^3 - 4x - 2$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular es continua en el intervalo cerrado $[2, 3]$. Además

$$f(2) = 2^3 - 4(2) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2 < 0;$$
$$f(3) = 3^3 - 4(3) - 2 = 27 - 12 - 2 = 13 > 0.$$

Por ser f continua en el intervalo $[2, 3]$, $f(2) < 0$ & $f(3) > 0$, se puede asegurar (por el teorema del Valor Intermedio [TVI]) la existencia de al menos un $c \in (2, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

Notamos que la longitud del intervalo $(2, 3)$ es 1.

El punto medio del intervalo $(2, 3)$ es $\dfrac{5}{2}$ y además

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{5}{2}\right) - 2 = \frac{125}{8} - 10 - 2 = \frac{125 - 96}{8} = \frac{29}{8} > 0.$$

Por ser f continua en el intervalo $\left[2, \dfrac{5}{2}\right]$, $f(2) < 0$ & $f\left(\dfrac{5}{2}\right) > 0$, se puede asegurar, por el TVI, la existencia de al menos un $c \in \left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

Notemos que la longitud del intervalo $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ es $\dfrac{1}{2}$.

El punto medio del intervalo $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ es $\dfrac{9}{4}$ y además

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^3 - 4\left(\frac{9}{4}\right) - 2 = \frac{729}{64} - 9 - 2 = \frac{729 - 704}{64} = \frac{25}{64} > 0.$$

Por ser f continua en el intervalo cerrado $\left[2, \dfrac{9}{4}\right]$, $f(2) < 0$ & $f\left(\dfrac{9}{4}\right) > 0$, se puede asegurar, por el TVI, la existencia de al menos un $c \in \left(2, \dfrac{9}{4}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

Además la longitud del intervalo $\left(2, \dfrac{9}{4}\right)$ es $\dfrac{1}{4}$.

Por lo tanto:

En el intervalo $\left[2, \dfrac{9}{4}\right]$ de longitud $\dfrac{1}{4}$ existe al menos una raíz real x tal que $x^3 - 4x - 2 = 0$.

$\square$

(4) Determine los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = -3; \\ 9 - x^2 & \text{si } x \neq \pm 3; \\ b & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

▼ Debemos analizar la función f sólo en torno a los números $x = -3$ & $x = 3$.

(a) La función f es continua en $x = -3$ si

$$\lim_{x \to -3} f(x) = f(-3) \Leftrightarrow \lim_{x \to -3} (9 - x^2) = a \Leftrightarrow 9 - (-3)^2 = a \Leftrightarrow a = 0.$$

(b) La función f es continua en $x = 3$ si

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x \to 3} (9 - x^2) = b \Leftrightarrow 9 - (3)^2 = b \Leftrightarrow b = 0.$$

Luego entonces, f es continua en todo su dominio ($\mathbb{R}$) cuando $a = 0 = b$.

$\square$

(C) Tercer parcial

(1) Obtener la ecuación de la recta normal a la curva $\sqrt{3x^2y^3 + 2x^2 - y} = 4 + 2x$ en el punto $(-1, 1)$.

▼ Tenemos que:

$$\sqrt{3x^2y^3 + 2x^2 - y} = 4 + 2x \Rightarrow 3x^2y^3 + 2x^2 - y = (4 + 2x)^2.$$

Suponemos que $y = g(x)$ y derivamos implícitamente respecto a x toda la ecuación:

$$3\frac{d}{dx}(x^2y^3) + 2\frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}(4 + 2x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\left[x^2 3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3\right] + 2(2x) - \frac{dy}{dx} = 2(4 + 2x)2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2y^2\frac{dy}{dx} + 6xy^3 + 4x - \frac{dy}{dx} = 16 + 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (9x^2y^2 - 1)\frac{dy}{dx} = 16 + 8x - 4x - 6xy^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{16 + 4x - 6xy^3}{9x^2y^2 - 1}.$$

Valuando en el punto $(-1, 1)$ se obtiene la pendiente m_T de la recta tangente a la curva en el punto $(-1, 1)$.

$$m_T = \frac{16 + 4(-1) - 6(-1)(1)^3}{9(-1)^2(1)^2 - 1} = \frac{16 - 4 + 6}{9 - 1} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}\,.$$

La pendiente de la recta normal es $m_n = -\dfrac{4}{9}$.
La ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{4}{9}(x+1) \Rightarrow y = -\frac{4}{9}x - \frac{4}{9} + 1 \Rightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{5}{9}\,.$$

□

(2) Para la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$, obtener:

(a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

▼ Para esto, calculamos:

$$\begin{aligned} f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1 &\Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 15x^2; \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 15x^2 = 0 &\Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 15x^2(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = -1 \text{ o bien } x = 1. \end{aligned}$$

Entonces, $f'(x) = 0$ en $x = -1$, $x = 0$ y en $x = 1$.

Tomamos valores de prueba en cada uno de los intervalos obtenidos y vemos el signo de $f'(x)$:

Intervalo	Valor de prueba	$f'(x)$	f es
$-\infty < x < -1$	-2	$+$	creciente
$-1 < x < 0$	$-\frac{1}{2}$	$-$	decreciente
$0 < x < 1$	$\frac{1}{2}$	$-$	decreciente
$1 < x < +\infty$	2	$+$	creciente

□

(b) Máximos y mínimos relativos

▼ Aplicando el criterio de la primera derivada y la tabla anterior, podemos afirmar que:

(i) en $x = -1$ se tiene un máximo relativo;
(ii) en $x = 1$ se tiene un mínimo local;
(iii) en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo local.

□

(c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo

▼ Para esto, calculamos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 15x^4 - 15x^2 &\Rightarrow f''(x) = 60x^3 - 30x; \\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 30x = 0 &\Leftrightarrow 30x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 30x(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o bien } x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Tomamos valores de prueba en cada uno de los intervalos obtenidos y vemos el signo de $f''(x)$

Intervalo	Valor de prueba	$f''(x)$ es	f es cóncava
$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-$	hacia abajo
$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	$-\frac{1}{2}$	$+$	hacia arriba
$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$-$	hacia abajo
$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$	1	$+$	hacia arriba

□

(d) Puntos de inflexión

▼ Utilizando la tabla anterior se puede afirmar que f tiene puntos de inflexión en:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x = 0 \text{ y en } x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

□

(e) Con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función

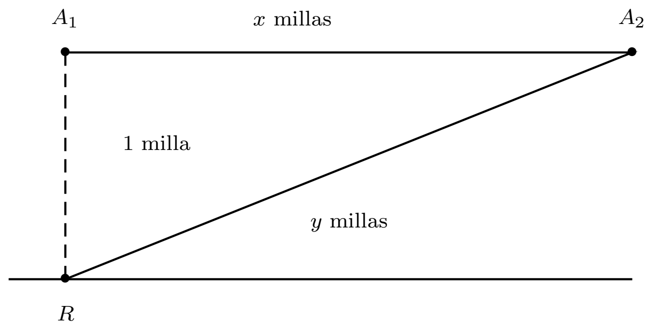
▼ Un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es x

$$\begin{aligned}
&A = [-1, f(-1)] = (-1, 1);\\
&B = [1, f(1)] = (1, -3);\\
&I_1 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = (-0.7071, 0.2374);\\
&I_2 = [0, f(0)] = (0, -1);\\
&I_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = (0.7071, -2.2374).
\end{aligned}$$

□

(3) Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla a una velocidad de 500 millas/h y pasa sobre una estación de radar. Encuentre la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando el avión está a 2 millas de la estación.

▼ Usamos la figura siguiente:



Por el teoréma de Pitágoras $y^2 = x^2 + 1^2$; donde y, x dependen del tiempo t. Derivando implícitamente respecto a t

$$\frac{d}{dt}y^2 = \frac{d}{dt}(x^2+1) \Rightarrow 2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}.$$

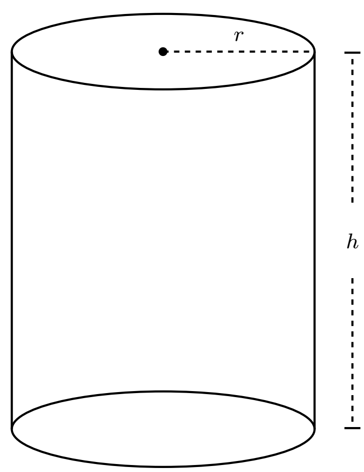
Donde $\dfrac{dx}{dt} = 500$ millas/h.
Considerando que cuando $y = 2$, se tiene que $x^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$, entonces:

$$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2\frac{dy}{dt} = \sqrt{3}(500) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{500\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3} \approx 433 \Rightarrow \frac{dy}{dt} \approx 433 \text{ millas/h}.$$

□

(4) Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal con tapa que tenga una superficie total de 80 cm^2. Determine sus dimensiones de modo que tenga el mayor volumen posible.

▼ La figura del cilindro:



Se desea maximizar el volumen $V = \pi r^2 h$.
Se sabe que el área total $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ debe ser igual a 80 cm^2.
Es decir, se sabe que $2\pi r^2 + 2\pi rh = 80$.
Luego entonces, se tiene en el problema:
(a) una función $V = \pi r^2 h$;
(b) una ecuación $2\pi r^2 + 2\pi rh = 80$.

De la ecuación despejamos una de las variables (la que nos convenga) para sustituirla en la función. Conviene despejar h.

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 80 \Rightarrow \pi r^2 + \pi rh = 40 \Rightarrow \pi rh = 40 - \pi r^2 \Rightarrow h = \frac{40 - \pi r^2}{\pi r}.$$

Sustituyendo en V obtenemos:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{40 - \pi r^2}{\pi r} \right) = r(40 - \pi r^2) \Rightarrow V(r) = 40r - \pi r^3 \leftarrow \text{, función a maximizar.}$$

$$\begin{aligned} V'(r) =& 40 - 3\pi r^2; \\ V'(r) =& 0 \Leftrightarrow 40 - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{40}{3\pi} \approx 4.2441 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = \pm\sqrt{4.2441} \approx \pm 2.0601. \end{aligned}$$

En el contexto del problema se ignora el valor negativo de r y sólo nos importa $r_1 \approx 2.0601$:

$$V'(r) = 40 - 3\pi r^2 \Rightarrow V''(r) = -6\pi r;$$
$$V''(r_1) \approx -6\pi r_1 = -6\pi(2.0601) < 0.$$

Luego entonces, la función $V(r)$ tiene un máximo cuando $r = 2.0601$.
La altura h del cilindro es

$$h_1 = \frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} = \frac{40 - \pi(2.0601)^2}{\pi(2.0601)} \approx 4.1203.$$

Por lo tanto, las dimensiones del cilindro con volumen máximo son

$$r_1 \approx 2.0601 \text{ cm } \ \& \ h_1 \approx 4.1203 \text{ cm}.$$

Observamos que $h_1 = 2r_1$, pues

$$\frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} = 2r_1 \Leftrightarrow 40 - \pi r_1^2 = 2\pi r_1^2 \Leftrightarrow 40 = 3\pi r_1^2 \Leftrightarrow r_1^2 = \frac{40}{3\pi}, \text{ que es el caso.}$$

□