CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E1100

(A) Primer parcial

(1) Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$h = -16t^2 + 320t$$

(a) Determina el dominio de $h(t)$
(b) ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1 536 pies sobre el suelo?

(2) Sean

$$f(x) = \sqrt{x-1} \;\&\; g(x) = |\,3x+2\,|$$

Determine:
(a) Los dominios de f y g respectivamente
(b) $f \circ g$ & $g \circ f$, indicando el dominio en cada caso

(3) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x < -1 \\ 2x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Grafique:
(a) $f(x)$
(b) $g(x) = f(x-2) + 5$
(c) $h(x) = |\,f(x)\,|$

(4) Una lata tiene capacidad de 1 dm^3 y forma de un cilindro circular recto. Exprese el área de la superficie de la lata como función de su radio.

(B) Segundo parcial

(1) Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$h = -16t^2 + 320t$$

(a) Encuentre las velocidades promedio durante los intervalos $[3,4], [3.5,4], [4,5], [4,4.5]$
(b) Calcule $v(4)$, usando que su velocidad en el instante $t = a$ segundos es

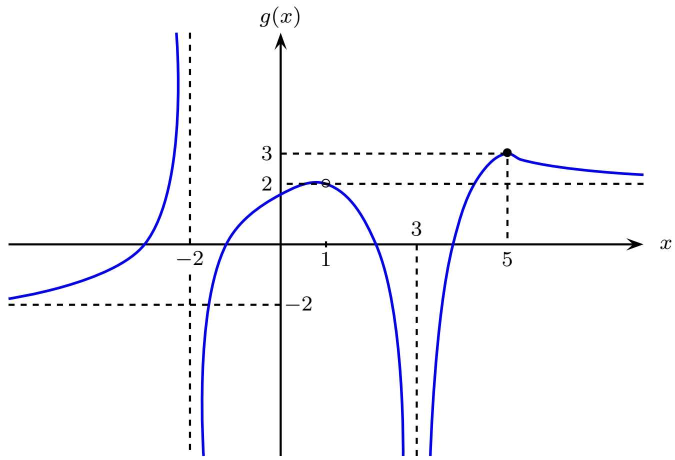
$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{h(t) - h(a)}{t - a}$$

(2) Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4}$
Determine:
(a) Dominio y raíces
(b) Puntos de discontinuidad y su clasificación

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(c) Asíntotas verticales y horizontales
(d) Gráfica

(3) A partir de la gráfica de la función $g(x)$ que observamos a continuación



determine:

$$\lim_{x\to -2^-} g(x); \qquad \lim_{x\to -2^+} g(x); \qquad \lim_{x\to -2} g(x);$$
$$\lim_{x\to 1} g(x); \qquad \lim_{x\to -\infty} g(x); \qquad \lim_{x\to \infty} g(x).$$

Puntos de discontinuidad y su clasificación.
Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

(4) Determine un intervalo de longitud 1/4 en el que la ecuación

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

tenga una raíz.

(5) Determine los valores a, b para que la función $f(x)$ sea continua en todo número real

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x \le -2; \\ x^2-1 & \text{si } -2 < x \le 3; \\ x-b & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

(C) Tercer parcial

(1) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $2x^3y + 3xy^3 = 5$, en el punto $(1,1)$.

(2) Para la función $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$,
Obtener: dominio, raíces, intervalos de continuidad, asíntotas horizontales y verticales , intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos y su clasificación, intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, puntos de inflexión. Con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

(3) Suponga que un incendio forestal se propaga en la forma de un círculo cuyo radio cambia a razón de 1.8 m/min. ¿A qué razón está creciendo el área de la región incendiada cuando el radio alcanza 60 m?

(4) Se va a construir una pista de carreras con la forma de dos segmentos rectos y paralelos conectados por semicírculos en los extremos. Si el perímetro de la pista será de 400 m, ¿cuáles deberán ser sus dimensiones para que el área delimitada sea máxima?

(5) En la figura siguiente se muestra la gráfica de la temperatura T como función del tiempo t, en un periodo de dos días de primavera en la ciudad de Monterrey, empezando desde las 0 horas del primer día. Considerando lo que sucede sólo el primer día contesta lo siguiente:

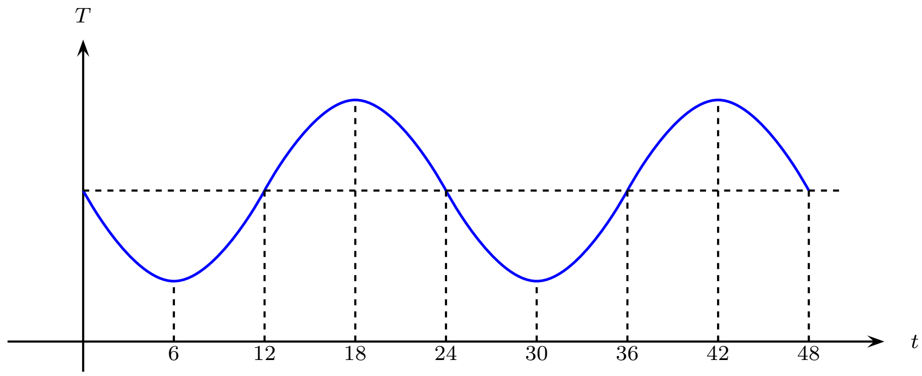
(a) ¿En qué intervalos de tiempo la razón de cambio T con respecto a t es positiva?

(b) ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura está bajando?

(c) ¿En qué intervalos la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo?
¿Qué puede decir acerca de la razón de cambio de T con respecto a t en dichos intervalos?

(d) ¿En qué valores de t se localizan los puntos de inflexión y cómo los interpreta en términos de la temperatura?

(e) Finalmente, explica con palabras el comportamiento de la temperatura durante los dos días.



Respuestas

(A) Primer parcial

(1) Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$h = -16t^2 + 320t.$$

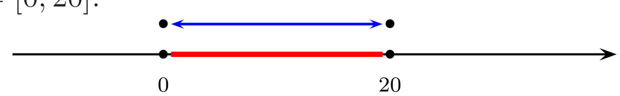
(a) Determina el dominio de $h(t)$

▼ La función distancia es $h = -16t^2 + 320t$.

El dominio D_h de la función h es

$$\begin{aligned} D_h &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, h(t) \geq 0 \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, -16t^2 + 320t \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, 16t(-t+20) \geq 0 \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, -t + 20 \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, t \leq 20 \right\} = \left\{ t \,\middle|\, 0 \leq t \leq 20 \right\} = [0, 20]. \end{aligned}$$

Luego entonces, $D_h = [0, 20]$.



□

(b) ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1 536 pies sobre el suelo?

▼ La condición se cumple si:

$$\begin{aligned} h(t) > 1\,536 \Leftrightarrow -16t^2 + 320t > 1\,536 \Leftrightarrow -16t^2 + 320t - 1\,536 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -16(t^2 - 20t + 96) > 0 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 96 < 0. \end{aligned}$$

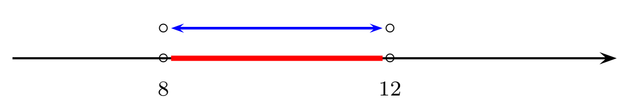
Primero resolvemos la igualdad $t^2 - 20t + 96 = 0$

$$\begin{aligned} t &= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 384}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{20 \pm 4}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \frac{20 + 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \quad \& \quad t = \frac{20 - 4}{2} = \frac{16}{2} = 8. \end{aligned}$$

Con los números $t_1 = 8$ & $t_2 = 12$ generamos los intervalos $(0, 8)$, $(8, 12)$ y $(12, +\infty)$, en los cuales obtendremos el signo de $t^2 - 20t + 96 = (t - 8)(t - 12)$.

	Signo de		
Intervalo	$t - 8$	$t - 12$	$t^2 - 20t + 96 = (t - 8)(t - 12)$
$0 < t < 8\,(< 12)$	$-$	$-$	$+$
$8 < t < 12$	$+$	$-$	$-$
$t > 12\,(> 8)$	$+$	$+$	$+$

La desigualdad $t^2 - 20t + 96 < 0$ se cumple para $8 < t < 12$. Luego entonces, el conjunto solución de $h > 1\,536$ es $(8, 12)$.



□

(2) Sean

$$f(x)=\sqrt{x-1}\ \&\ g(x)=|\,3x+2\,|\,,$$

determine:

(a) El dominio de f & g respectivamente

▼ El dominio de $f(x)=\sqrt{x-1}$ es

$$D_f=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x-1}\in\mathbb{R}\,\right\}=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x-1\geq 0\,\right\}=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\geq 1\,\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_f=[1,+\infty).$$

El dominio de $g(x)=|\,3x+2\,|$ es
$D_g=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|\,3x+2\,|\in\mathbb{R}\,\right\}=\mathbb{R}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}\,.$

□

(b) $f\circ g$ & $g\circ f$, indicando el dominio en cada caso

▼ Calculamos:

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\sqrt{g(x)-1}=\sqrt{|\,3x+2\,|-1};$$
$$\begin{aligned}
D_{f\circ g}&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\in D_g\ \&\ g(x)\in D_f\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,g(x)\in\mathbb{R}\ \&\ f[g(x)]\in\mathbb{R}\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,f[g(x)]\in\mathbb{R}\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{|\,3x+2\,|-1}\in\mathbb{R}\,\right\}=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|\,3x+2\,|-1\geq 0\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|\,3x+2\,|\geq 1\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,3x+2\leq -1\text{ o bien }3x+2\geq 1\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,3x\leq -3\text{ o bien }3x\geq -1\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\leq -1\text{ o bien }x\geq -\frac{1}{3}\,\right\}=\\
&=(-\infty,-1]\bigcup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)=\\
&=\mathbb{R}-\left(-1,-\frac{1}{3}\right);
\end{aligned}$$

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(\sqrt{x-1})=|3\sqrt{x-1}+2|;$$
$$\begin{aligned}
D_{g\circ f}&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\in D_f\ \&\ f(x)\in D_g\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,f(x)\in\mathbb{R}\ \&\ g[f(x)]\in\mathbb{R}\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x-1}\in\mathbb{R}\ \&\ \left|3\sqrt{x-1}+2\right|\in\mathbb{R}\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x-1\geq 0\,\right\}=\\
&=\left\{\,x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\geq 1\,\right\}=[1,+\infty).
\end{aligned}$$

□

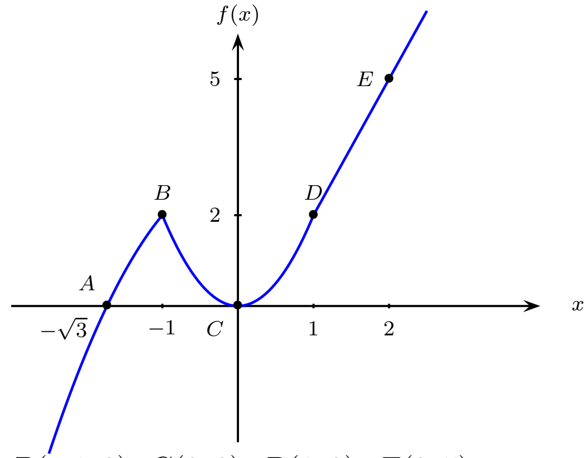
(3) Sea

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+3 & \text{si } x<-1;\\ 2x^2 & \text{si } -1\leq x\leq 1;\\ 3x-1 & \text{si } x>1,\end{cases}$$

grafique:

(a) $f(x)$

▼ Un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es



Puntos de control $A(-\sqrt{3},0)$, $B(-1,2)$, $C(0,0)$, $D(1,2)$, $E(2,5)$.

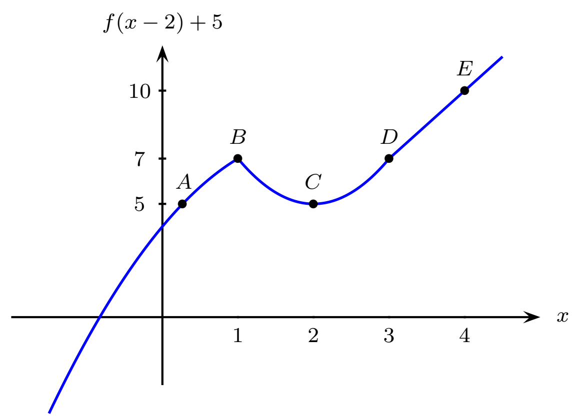
$\square$

(b) $g(x)=f(x-2)+5$

▼ Un bosquejo de la gráfica de $g(x)=f(x-2)+5$ se obtiene de la siguiente manera: la gráfica de f es trasladada 2 unidades hacia la derecha y la gráfica así obtenida es trasladada 5 unidades hacia arriba. Los puntos de control adoptan las posiciones siguientes:

$$\begin{array}{lll}
A(-\sqrt{3},0) & \to A'(-\sqrt{3}+2,0) & \to A''(2-\sqrt{3},5);\\
B(-1,2) & \to B'(1,2) & \to B''(1,7);\\
C(0,0) & \to C'(2,0) & \to C''(2,5);\\
D(1,2) & \to D'(3,2) & \to D''(3,7);\\
E(2,5) & \to E'(4,5) & \to E''(4,10).
\end{array}$$

El bosquejo resultante es

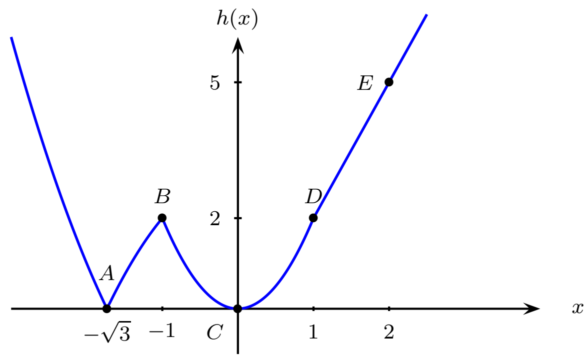


$\square$

(c) $h(x)=|\,f(x)\,|$

▼ Un bosquejo de la gráfica de $h(x)=|\,f(x)\,|$ se obtiene de la manera siguiente: la porción de la gráfica de f, que se encuentre por debajo del eje x, es reflejada en dicho eje (poniendo un espejo en el eje x) y la porción de la gráfica de f, que está por encima del eje x, se deja igual (esta parte no se modifica).

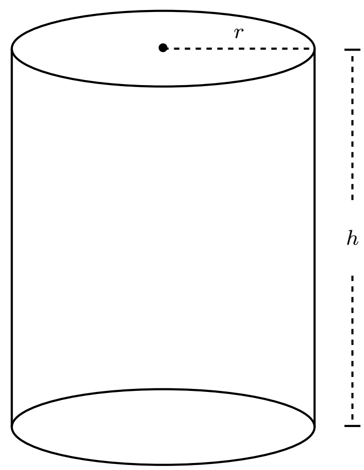
El bosquejo resultante es:



□

(4) Una lata tiene capacidad de 1 dm^3 y forma de un cilindro circular recto. Exprese el área de la superficie de la lata como función de su radio.

▼ Usando la figura:



consideremos que la lata cilíndrica tiene r dm de radio y h dm de altura.
Se sabe que la capacidad (volumen) de la lata es de 1 dm^3 y también se sabe que el volumen de esta lata es

$$V = \pi r^2 h \text{ dm}^3$$

Luego entonces, se sabe que

$$\pi r^2 h = 1.$$

Se desea expresar el área de la superficie de la lata como función de radio r, a sabiendas que dicha área es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

y que está en función de r & h.
Para tener el área A en función sólo de r, despejamos h de la ecuación $\pi r^2 h = 1$, para luego sustituirla en A

$$\pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}\text{ , que es el área } A \text{ de la superficie, como función de } r.$$

$\square$

(B) Segundo parcial

(1) Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$h = -16t^2 + 320t.$$

(a) Encuentre las velocidades promedio durante los intervalos $[3, 4], [3.5, 4], [4, 5], [4, 4.5]$

▼ La función posición es $h(t) = -16t^2 + 320t$, con $t \geq 0$.

La velocidad promedio en el intervalo $[3, 4]$ es

$$\overline{V_1} = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{1024 - 816}{1} = 208 \Rightarrow \overline{V_1} = 208 \text{ pies/s}.$$

La velocidad promedio en el intervalo $[3.5, 4]$ es

$$\overline{V_2} = \frac{h(4) - h(3.5)}{4 - 3.5} = \frac{1024 - 924}{0.5} = 200 \Rightarrow \overline{V_2} = 200 \text{ pies/s}.$$

La velocidad promedio en el intervalo $[4, 5]$ es

$$\overline{V_3} = \frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{1200 - 1024}{1} = 176 \Rightarrow \overline{V_3} = 176 \text{ pies/s}.$$

La velocidad promedio en el intervalo $[4, 4.5]$ es

$$\overline{V_4} = \frac{h(4.5) - h(4)}{4.5 - 4} = \frac{1116 - 1024}{0.5} = 184 \Rightarrow \overline{V_4} = 184 \text{ pies/s}.$$

$\square$

(b) Calcule $v(4)$, usando que su velocidad en el instante $t = a$ segundos es

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{h(t) - h(a)}{t - a}.$$

▼ Siendo así,

$$\begin{aligned} v(4) &= \lim_{t \to 4} \frac{h(t) - h(4)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{(-16t^2 + 320t) - 1024}{t - 4} = \\ &= \lim_{t \to 4} \frac{-16(t^2 - 20t + 64)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{-16(t - 4)(t - 16)}{(t - 4)} = \\ &= \lim_{t \to 4} [-16(t - 16)] = -16(4 - 16) = -16(-12) = 192. \end{aligned}$$

Luego entonces, $v(4) = 192$ pies/s.

$\square$

(2) Para la función

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4},$$

determine:

(a) Dominio y raíces

▼ Dominio:

$$D_f = \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 4 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2 \,\};$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{\, -2, 2 \,\}.$$

Las raíces de f son

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ o bien } x = 1,$$

pero $x = -2 \notin D_f$, por lo que cual f tiene sólo una raíz, que es $x = 1$.

□

(b) Puntos de discontinuidad y su clasificación

▼ Por ser una función racional, f es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Luego entonces f tiene discontinuidades en $x = -2$ y en $x = 2$.

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -2} \frac{2(x+2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} =$$
$$= \lim_{x\to -2} \frac{2(x-1)}{(x-2)} = \frac{2(-2-1)}{-2-2} = \frac{2(-3)}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2};$$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \dfrac{3}{2}$; luego entonces f tiene en $x = -2$ una discontinuidad removible o evitable.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-1)}{x-2} = ?$$

ya que $\lim\limits_{x\to 2}[2(x-1)] = 2$ y $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$, entonces $\dfrac{2(x-1)}{x-2} \to \dfrac{2}{\text{“}0\text{”}}$, por lo que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty \text{ o bien } -\infty.$$

Luego entonces, f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial (discontinuidad infinita).

□

(c) Asíntotas verticales y horizontales

▼ Para las asíntotas verticales pensamos en la recta $x = 2$. Para corroborarlo calculamos los límites laterales $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

i) Si $x \to 2^-$, entonces $x < 2$ & $x - 2 < 0$.
Como $\lim\limits_{x\to 2^-} 2(x-1) = 2 > 0$ & $\lim\limits_{x\to 2^-} (x-2) = 0^-$, entonces

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2(x-1)}{x-2} = -\infty.$$

ii) Si $x \to 2^+$, entonces $x > 2$ & $x - 2 > 0$.
Como $\lim\limits_{x\to 2^+} 2(x-1) = 2 > 0$ & $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2) = 0^+$, entonces

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2(x-1)}{x-2} = +\infty.$$

Por lo tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de f y además es la única.

Para las asíntotas horizontales calculamos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} =$$

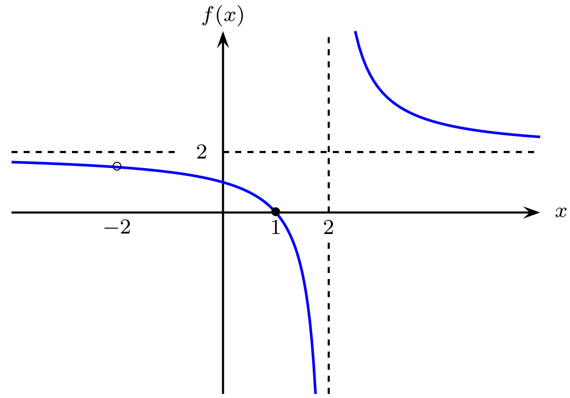
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Así también, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
Luego entonces, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de f y además es la única.

□

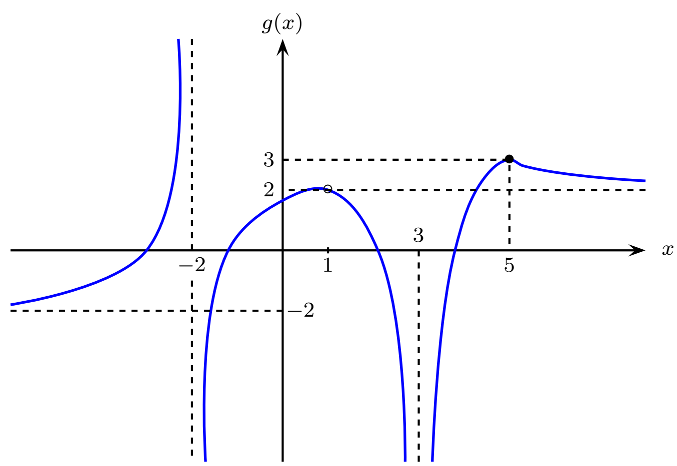
(d) Gráfica

▼ Un bosquejo de la gráfica es



□

(3) A partir de la gráfica de la función $g(x)$ que observamos a continuación



determine:

$$\lim_{x\to-2^-} g(x); \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x); \qquad \lim_{x\to-2} g(x);$$
$$\lim_{x\to1} g(x); \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x); \qquad \lim_{x\to\infty} g(x).$$

Puntos de discontinuidad y su clasificación.
Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

▼ Vemos que:

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to -2^+} g(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to -2} g(x) \text{ no existe };$$
$$\lim_{x\to 1} g(x) = 2; \quad \lim_{x\to -\infty} g(x) = -2; \quad \lim_{x\to \infty} g(x) = 2.$$

Puntos de discontinuidad: esenciales en $x = -2$ & $x = 3$ y removible en $x = 1$.
Asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ & $x = 3$.
Asíntotas horizontales: las rectas $y = -2$ & $y = 2$.

□

(4) Determine un intervalo de longitud $1/4$ en el que la ecuación

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

tenga una raíz.

▼ Consideramos la función polinomial $f(x) = x^3 - 3x + 1$, que es continua en toda la recta real.

$$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 1 = 1 \& f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = 2 - 3 = -1.$$

Ya que $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ & f es continua en el intervalo $[0, 1]$, entonces por el teorema del Valor Intermedio se puede asegurar la existencia de al menos un real $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. Notemos además que la longitud del intervalo $(0, 1)$ es $l_1 = 1$.

EL punto medio del intervalo $(0, 1)$ es $\dfrac{1}{2}$ y además

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1 - 12 + 8}{8} = -\frac{3}{8}.$$

Ya que $f(0) = 1 > 0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{8} < 0$ y ya que la función f es continua en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, entonces se puede asegurar la existencia de al menos un real $c \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$. Notemos además que la longitud del intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ es $l_2 = \dfrac{1}{2}$.

El punto medio del intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ es $\dfrac{1}{4}$ y además

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{64} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1 - 48 + 64}{64} = \frac{17}{64}.$$

Ya que $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{17}{64} > 0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{8} < 0$ y que f es continua en el intervalo $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$, entonces se puede asegurar (por el teorema del Valor Intermedio) la existencia de al menos un real $c \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$. Notemos también que la longitud del intervalo $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ es $l_3 = \dfrac{1}{4}$.

Luego entonces, para la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ existe al menos una raíz $[x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0]$ en el intervalo $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$, que tiene una longitud $l = \dfrac{1}{4}$.

Por lo tanto, en el intervalo $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$ de longitud $\dfrac{1}{4}$, se tiene al menos una solución de la ecuación $x^3-3x+1=0$.

$\square$

(5) Determine los valores a, b para que la función $f(x)$ sea continua en todo número real

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x \leq -2; \\ x^2-1 & \text{si } -2 < x \leq 3; \\ x-b & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

▼ Siendo a & b números reales fijos, la función f es continua en el intervalo

$$(-\infty, -2] \bigcup (-2, 3] \bigcup (3, +\infty) .$$

Falta pues asegurar la continuidad de f en $x=-2$ y en $x=3$.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2} (ax+1) = a(-2)+1 = -2a+1;$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2} (x^2-1) = (-2)^2-1 = 4-1 = 3;$$
$$\lim_{x\to -2} f(x) \text{ existe si } \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x).$$

Es decir, si -2a+1=3. Esta igualdad se cumple para $a=-1$ y además

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 3;$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} (x^2-1) = 3^2-1 = 9-1 = 8;$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-b) = 3-b;$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) \text{ existe si } \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

Es decir, si $8=3-b$. Esta desigualdad se cumple para $b=-5$ y además $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 8$.

Con $a=-1$ y con $b=-5$ se tiene que

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq -2; \\ x^2-1 & \text{si } -2 < x \leq 3; \\ x+5 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Esta función es continua en $x=-2$, ya que $f(-2) = -(-2)+1 = 2+1 = 3 = \lim\limits_{x\to -2} f(x)$.
Y también es continua en $x=3$, ya que $f(3) = 3^2-1 = 9-1 = 8 = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$.
Luego entonces f es una función continua en toda la recta real ($\mathbb{R}$).

$\square$

(C) Tercer parcial

(1) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $2x^3y+3xy^3=5$, en el punto $(1,1)$.

▼ Suponemos que en la ecuación $2x^3y+3xy^3=5$ se tiene implícitamente definida a $y=\phi(x)$ que es una función derivable.

Derivando implícitamente respecto a x se obtiene

$$
\begin{aligned}
&2\frac{d}{dx}(x^3y) + 3\frac{d}{dx}(xy^3) = \frac{d}{dx}5 \Rightarrow\\
&\Rightarrow 2\left[x^3\frac{dy}{dx} + y(3x^2)\right] + 3\left[x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (1)y^3\right] = 0 \Rightarrow\\
&\Rightarrow 2x^3\frac{dy}{dx} + 6x^2y + 9xy^2\frac{dy}{dx} + 3y^3 = 0 \Rightarrow\\
&\Rightarrow (2x^3 + 9xy^2)\frac{dy}{dx} = -3y^3 - 6x^2y \Rightarrow\\
&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3y^3 + 6x^2y}{2x^3 + 9xy^2}\,.
\end{aligned}
$$

Valuamos en el punto $(1, 1)$ y se tiene que la pendiente de la recta tangente es

$$m = -\frac{3(1)^3 + 6(1)^2(1)}{2(1)^3 + 9(1)(1)^2} = -\frac{3+6}{2+9} = -\frac{9}{11}\,.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$ es

$$y - 1 = -\frac{9}{11}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{9}{11}x + \frac{9}{11} + 1 \Rightarrow y = -\frac{9}{11}x + \frac{20}{11}\,.$$

□

(2) Para la función $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$,

obtener: dominio, raíces, intervalos de continuidad, asíntotas horizontales y verticales, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos y su clasificación, intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, puntos de inflexión. Con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

(a) El dominio de f:

▼

$$
\begin{aligned}
D_f &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} \in \mathbb{R} \,\right\} =\\
&= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x+1)^2 \neq 0 \,\right\} =\\
&= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x + 1 \neq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq -1 \,\right\} = \mathbb{R} - \{\, -1 \,\}\,.
\end{aligned}
$$

□

(b) Las raíces de f:

▼

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

□

(c) Intervalos de continuidad:

▼ Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$; es decir, f es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$.

□

(d) Asíntotas horizontales:

▼

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \frac{1}{1} = 1.$$

Luego entonces, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. Además es la única ya que también

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

□

(e) Asíntotas verticales:

▼

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-1} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 =?$$

Ya que $\lim_{x\to-1}(x-2) = -1-2 = -3$ & $\lim_{x\to-1}(x+1) = 0$, entonces $\lim_{x\to-1} \frac{x-2}{x+1} = +\infty$ o bien $-\infty$; por lo cual $\lim_{x\to-1} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 = +\infty$, no importando si $x \to -1^-$ o bien $x \to -1^+$.
Luego entonces, la recta $x = -1$ es la única asíntota vertical de f.

□

(f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

▼

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 = 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{x+1}\right) =$$
$$= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \frac{(x+1)1-(x-2)1}{(x+1)^2} = 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \frac{x+1-x+2}{(x+1)^2} =$$
$$= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{6(x-2)}{(x+1)^3};$$

f es creciente si $f'(x) > 0$ y es decreciente si $f'(x) < 0$.
Debemos ver dónde $\frac{6(x-2)}{(x+1)^3} > 0$ y dónde $\frac{6(x-2)}{(x+1)^3} < 0$.
Ya que $\frac{6(x-2)}{(x+1)^3}$ no está definido cuando $x+1 = 0$, entonces excluimos el número $x = -1$.
Ya que $\frac{6(x-2)}{(x+1)^3} = 0$ cuando $x-2 = 0$, entonces excluimos el número $x = 2$.

Estos números generan los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, +\infty)$ donde veremos el signo de $f'(x) = \dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3}$.

	Valor prueba	$f'(x) =$	f es
$-\infty < x < -1$	$x = -2$	$24 > 0$	creciente
$-1 < x < 2$	$x = 0$	$-12 < 0$	decreciente
$2 < x < +\infty$	$x = 3$	$\frac{3}{32} > 0$	creciente

Por lo tanto: f es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y en $(2, +\infty)$ y es estrictamente decreciente en el intervalo $(-1, 2)$.

□

(g) Puntos críticos y su clasificación:

▼

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6(x-2)}{(x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2;$$

entonces, f tiene un punto crítico en $x = 2$.
Ya que para $-1 < x < 2$ la función f es decreciente y para $x > 2$ es creciente, entonces (por el criterio de la primera derivada) f tiene en $x = 2$ un mínimo local estricto.

□

(h) Concavidades:

▼

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\,\frac{6(x-2)}{(x+1)^3} = 6\frac{(x+1)^3 1 - (x-2)3(x+1)^2 1}{[(x+1)^3]^2} = \\
&= 6\frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^6} = 6\frac{(x+1)^2[(x+1) - 3(x-2)]}{(x+1)^6} = \\
&= \frac{6(x+1-3x+6)}{(x+1)^4} = \frac{6(-2x+7)}{(x+1)^4} \Rightarrow \\
\Rightarrow f''(x) &= \frac{6(7-2x)}{(x+1)^4};
\end{aligned}$$

f es cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0$ es y cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0$.
Debemos ver dónde $\dfrac{6(7-2x)}{(x+1)^4} > 0$ y dónde $\dfrac{6(7-2x)}{(x+1)^4} < 0$.
Observando que, para $x \neq -1$, el denominador $(x+1)^4$ siempre es positivo (por el exponente par), podemos afirmar que el signo de $f''(x)$ depende exclusivamente del signo del factor $(7 - 2x)$.

$$\begin{aligned}
7 - 2x > 0 &\Leftrightarrow 7 > 2x \Leftrightarrow x < \frac{7}{2} \\
7 - 2x < 0 &\Leftrightarrow 7 < 2x \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ya que $7 - 2x > 0$ para $x < \dfrac{7}{2}$; entonces, $\dfrac{6(7-2x)}{(x+1)^4} > 0$ para $x < \dfrac{7}{2}$ & $x \neq -1$.
Ya que $7 - 2x < 0$ para $x > \dfrac{7}{2}$; entonces, $\dfrac{6(7-2x)}{(x+1)^4} < 0$ para $x > \dfrac{7}{2}$.
Por lo tanto:

La función f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $\left(-1, \dfrac{7}{2}\right)$.

La función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(\dfrac{7}{2}, +\infty\right)$.

$\square$

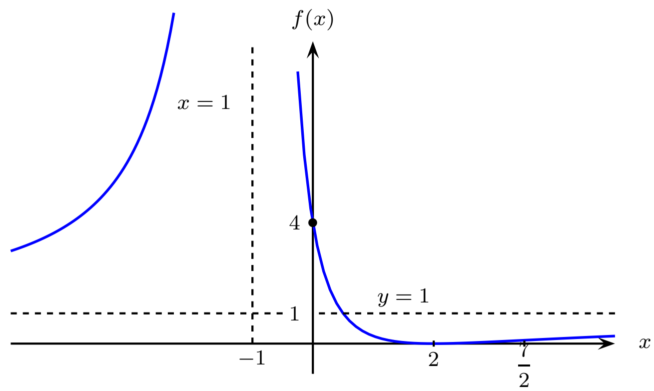
(i) Puntos de inflexión:

▼ Debido a que en $x = \dfrac{7}{2}$ existe un cambio de concavidad y además a que la función f es continua ahí, podemos afirmar que f tiene en $x = \dfrac{7}{2}$ un punto de inflexión.

$\square$

(j) Bosquejo de la gráfica:

▼ Con los elementos obtenidos, un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es el siguiente tabulamos $f\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{1}{9}$:



$\square$

(3) Suponga que un incendio forestal se propaga en la forma de un círculo cuyo radio cambia a razón de 1.8 m/min. ¿A qué razón está creciendo el área de la región incendiada cuando el radio alcanza 60 m?

▼ Para un radio arbitrario r, el área del círculo es $A = \pi r^2$.
Considerando que r varía en el tiempo, es decir, que $r = r(t)$, se tiene que A=A(t).
Luego entonces

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A(t) = \pi r^2(t).$$

Derivando respecto a t obtenemos que

$$\frac{d}{dt}A(t) = \pi \frac{d}{dt} r^2(t) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt},$$

donde $\dfrac{dA}{dt}$ es la razón de cambio del área y $\dfrac{dr}{dt}$ es la razón de cambio del radio, ambas con respecto a t.

Para $r = 60$ m y $\dfrac{dr}{dt} = 1.8$ m/min tenemos

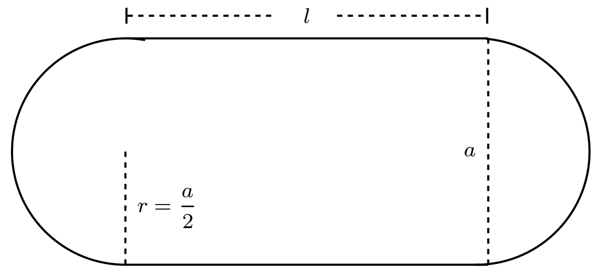
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(60 \text{ m})(1.8 \text{ m/min}) = 216\pi \text{ m}^2/\text{min}.$$

Por lo tanto, la razón o rapidez de cambio del área es

$$\frac{dA}{dt} \approx 679 \text{ m}^2/\text{min}.$$

$\square$

(4) Se va a construir una pista de carreras con la forma de dos segmentos rectos y paralelos conectados por semicírculos en los extremos. Si el perímetro de la pista será de 400 m, ¿cuáles deberán ser sus dimensiones para que el área delimitada sea máxima? ▼ Usamos la siguiente figura:



Sean l lo largo, a la anchura de la región rectangular y sea $r = \dfrac{a}{2}$ el radio de la región semicircular.
El perímetro de la pista es $P = 2l + 2\pi r$ y como debe ser $P = 400$ m, entonces $400 = 2l + 2\pi r$; es decir, $2l + 2\pi\dfrac{a}{2} = 400$, o sea

$$2l + \pi a = 400 \text{ m}.$$

El área de la región encerrada por la pista es

$$A = la + \pi r^2 \Rightarrow A = la + \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = la + \frac{\pi}{4}a^2\,.$$

Se tiene entonces

i) Una función: $A = la + \dfrac{\pi}{4}a^2$.

ii) Una ecuación (restricción): $2l + \pi a = 400$.

De la ecuación despejamos una de las variables para luego sustituirla en la función.
Notemos que conviene despejar l.

$$2l + \pi a = 400 \Rightarrow 2l = 400 - \pi a \Rightarrow l = 200 - \frac{\pi}{2}a.$$

Al sustituir en la función obtenemos

$$A = la + \frac{\pi}{4}a^2 = \left(200 - \frac{\pi}{2}a\right)a + \frac{\pi}{4}a^2;$$
$$A = 200a - \frac{\pi}{2}a^2 + \frac{\pi}{4}a^2 = 200a + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)a^2;$$
$$A(a) = 200a - \frac{\pi}{4}a^2 \leftarrow \text{, función a maximizar ;}$$
$$A'(a) = 200 - \frac{\pi}{4}2a = 200 - \frac{\pi}{2}a;$$
$$A'(a) = 0 \Rightarrow 200 - \frac{\pi}{2}a = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}a = 200 \Leftrightarrow a = \frac{400}{\pi};$$
$$A''(a) = -\frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow .$$

A tiene un máximo local estricto para $a = \dfrac{400}{\pi}$ metros (anchura).
Lo largo de la región rectangular es

$$l = 200 - \frac{\pi}{2}a = 200 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{400}{\pi}\right) = 200 - 200 = 0.$$

Luego entonces, el área encerrada A es máxima cuando $a = \dfrac{400}{\pi}$ m & $l = 0$; es decir, cuando la región es completamente circular y con un diámetro $a = \dfrac{400}{\pi}$ m (o sea, un radio $r = \dfrac{200}{\pi}$ m).

El área máxima encerrada es

$$A_{\text{máx}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{200}{\pi}\right)^2 = \pi \frac{40000}{\pi^2} = \frac{40000}{\pi} \text{ m}^2.$$

$\square$

(5) (a) ¿En qué intervalos de tiempo la razón de cambio T con respecto a t es positiva?

▼ $\dfrac{dT}{dt} > 0$ en los intervalos de tiempo $(6, 18)$ y $(30, 42)$. $\square$

(b) ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura está bajando?

▼ T decrece en los intervalos $(0, 6)$, $(18, 30)$ y $(42, 48)$. $\square$

(c) ¿En qué intervalos la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo?

▼ ¿Qué puede decir acerca de la razón de cambio de T con respecto a t en dichos intervalos?

La gráfica de T es cóncava hacia arriba en los intervalos $(0, 12)$ y $(24, 36)$.

La gráfica de T es cóncava hacia abajo en los intervalos $(12, 24)$ y $(36, 48)$. $\square$

(d) ¿En qué valores de t se localizan los puntos de inflexión y cómo los interpreta en términos de la temperatura?

▼ Los puntos de inflexión se tienen en $t = 12$, $t = 24$ y en $t = 36$. En estos puntos, la razón de cambio $\dfrac{dT}{dt}$ pasa de crecer a decrecer y viceversa. $\square$

(e) Finalmente, explique con palabras el comportamiento de la temperatura durante los dos días.

▼ Durante el segundo día, la temperatura tiene el mismo comportamiento (iguales características) que durante el primer día. $\square$