CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
GLOBAL E1300

(1) Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$,
Determinar: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos locales; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, así como los puntos de inflexión.
A partir del análisis anterior, hacer un esbozo de la gráfica de f.

(2) En un concurso de resistencia, los concursantes están 2 millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla (tierra firme) que está a 5 millas al oeste (la orilla va de este a oeste). Suponiendo que un concursante puede nadar a 4 millas por hora y correr a 10 millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?

(3) Un derrame de petróleo adopta una forma circular y tiene un espesor de $\dfrac{1}{50}$ pie. Si el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, ¿a qué razón está aumentando el radio de la mancha de petróleo cuando el radio es de 50 pies?

(4) Un supermercado se encuentra con grandes existencias de manzanas que debe vender rápidamente. El gerente sabe que si las manzanas se ofrecen a p pesos cada kg, vendería x kg, con $x = 1\,000 - 20\,p$.
¿Qué precio p deberá fijar para obtener ingresos de por lo menos \$12 000?

(5) Una legislación estatal sobre impuestos establece un impuesto exigible de 12% sobre los primeros \$20 000 de ganancias gravables y de 16% sobre el resto de las ganancias.
Calcular los valores de las constantes A y B para que la función de impuestos $T(x)$ sea continua para todo x.

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ A + 0.12x & \text{si } 0 < x \leq 20\,000; \\ B + 0.16(x - 20,000) & \text{si } x > 20\,000. \end{cases}$$

(6) Dar un bosquejo de la gráfica de la función f que cumple los requisitos siguientes:

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$	$\displaystyle\lim_{x \to -4} f(x) = 0$	$\displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$
$f'(x) > 0$ para $x < -2$	$f''(x) > 0$ para $x < -2$	$\displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$
$f(0) = -3$	$\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$	$f'(x) < 0$ para $-2 < x < 1$
$f''(x) < 0$ para $-2 < x < 1$	$\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$	$f(3) = -1$
$f'(3) = 0$	$f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$	$f'(x) > 0$ para $x > 3$
$f''(x) > 0$ para $1 < x < 5$	$f(5) = 0$	$f''(x) < 0$ para $x > 5$
$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$		

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$,
Determinar: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos locales; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, así como los puntos de inflexión.
A partir del análisis anterior, hacer un esbozo de la gráfica de f.

▼ Se tiene:

(a) Dominio.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 1 - x^2 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 \neq 1 \right\} = \mathbb{R} - \{ -1, 1 \}$$

(b) Raíces.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(c) Paridad.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{x^2}{1-x^2} = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$$

f es una función par, por lo cual su gráfica es simétrica respecto al eje y.

(d) Intervalos de continuidad y tipos de discontinuidades.

Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{ -1, 1 \}$.
Es decir, f es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$. Esto implica que f tiene discontinuidades en $x = -1$ y en $x = 1$.

Veamos ahora $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Cuando $x \to 1$ sucede que: $x^2 \to 1$; $1 - x^2 \to 0$ & $\dfrac{x^2}{1-x^2} \to -\infty$ o bien $+\infty$

Cuando $x \to -1$ sucede que: $x^2 \to 1$; $1 - x^2 \to 0$ & $\dfrac{x^2}{1-x^2} \to -\infty$ o bien $+\infty$

Luego entonces $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ o bien $+\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ o bien $+\infty$; es decir, las discontinuidades son esenciales e infinitas.

(e) Asíntotas verticales.
Precisamos los límites infinitos anteriores, determinando los límites laterales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = ?$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1-x^2} > 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = ?$$

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1-x^2} < 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty$$

Luego entonces, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.
Por ser f una función par, su gráfica es simétrica respecto al eje y. Utilizando este hecho se puede afirmar que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, y además que la recta $x = -1$ es también una asíntota vertical.

(f) Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x^2}-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

De nuevo, por simetría con respecto al eje y, se tiene que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Por lo tanto f tiene una sola asíntota horizontal que es la recta $y=-1$.

(g) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = \frac{(1-x^2)2x - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+2x^3}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Notando que para $x \neq \pm 1$ sucede que $(1-x^2)^2 > 0$, podemos asegurar que $f'(x) > 0$ para $x > 0$ y $f'(x) < 0$ para $x < 0$. Luego entonces, f es estrictamente creciente en los intervalos $(0,1)$ y $(1,+\infty)$ y es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,0)$.

(h) Máximos y mínimos locales.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

entonces, en $x=0$ se tiene un punto crítico.
Debido a que f es decreciente para $x<0$ y creciente para $x>0$, por el criterio de la primera derivada se puede asegurar que f tiene en $x=0$ un mínimo local estricto.
Ya que $f(0) = \dfrac{0^2}{1-0^2} = \dfrac{0}{1} = 0$, las coordenadas del punto mínimo local son $(0, f(0)) = (0,0)$.

(i) Intervalos de concavidad.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{(1-x^2)^2 2 - 2x(2)(1-x^2)(-2x)}{[(1-x^2)^2]^2} = \frac{2(1-x^2)^2 + 8x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)[(1-x^2)+4x^2]}{(1-x^2)^4} = \frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$$

Notando que $3x^2+1>0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, podemos asegurar que el signo de $f''(x)$ es el de $(1-x^2)^3$, que es el mismo de $1-x^2$.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow \left|x^2\right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Luego entonces, $f''(x) > 0$ en el intervalo $(-1, 1)$.

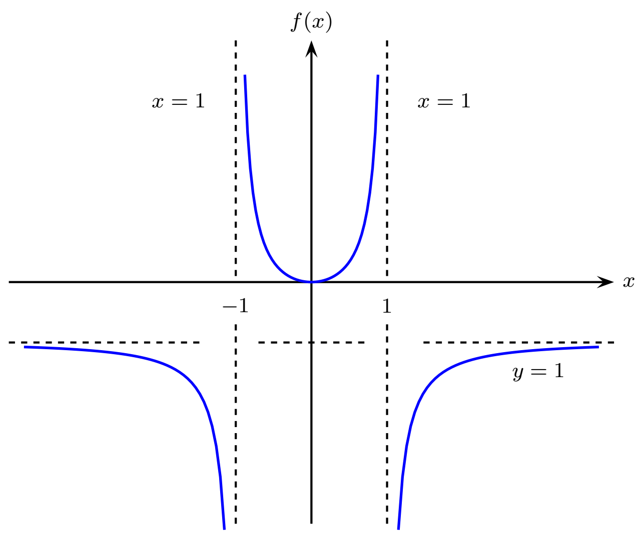
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\, x \,| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ o bien } x > 1$$

Luego entonces, $f''(x) < 0$ en $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$.
Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1, 1)$ y cóncava hacia abajo en el conjunto $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$.

(j) Puntos de inflexión.

Existen cambios de concavidad en $x = -1$ y en $x = 1$. Pero debido a que f no es continua en dichos puntos, no podemos afirmar la existencia de puntos de inflexión. Es decir, f no tiene puntos de inflexión.

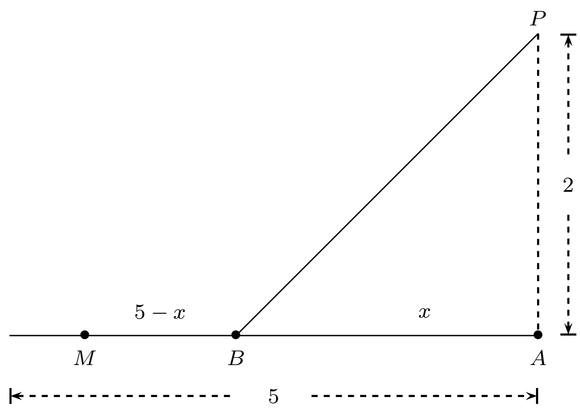
(k) Un bosquejo de la gráfica de f es el siguiente:



□

(2) En un concurso de resistencia, los concursantes están 2 millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla (tierra firme) que está a 5 millas al oeste (la orilla va de este a oeste). Suponiendo que un concursante puede nadar a 4 millas por hora y correr a 10 millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?

▼ Usamos la figura:



Sean P el punto de partida, A el punto de la playa más cercano a P, M la meta y B el punto de la playa donde el concursante sale del mar.
Es decir: $\overline{PA} = 2$ millas, $\overline{MA} = 5$ millas, $\overline{PB}$ es recorrido a nado y $\overline{BM}$ corriendo por la playa.
Si suponemos que B está a x millas de A, entonces

$$\overline{BA} = x\,\overline{MB} = 5 - x \;\&$$
$$\overline{BP} = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Si el concursante nada $\overline{PB} = \sqrt{x^2 + 4}$ millas a razón de 4 millas por hora, entonces el tiempo que tarda nadando es $t_n = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{4}$ horas.
Si el concursante corre $\overline{MB} = 5 - x$ millas a razón de 10 millas por hora, entonces el tiempo que tarda corriendo es $t_c = \dfrac{5 - x}{10}$ horas.
El tiempo total de recorrido del concursante es

$$t = t_n + t_c = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + \frac{5 - x}{10}\,.$$

Es decir,

$$t(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{10}(5 - x), \text{ con } 0 \le x \le 5,$$

que es la función que debemos minimizar.

$$t'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 4)^{-1/2}2x + \frac{1}{10}(-1) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{10};$$
$$t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{10} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x = 4\sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow (10x)^2 = 4^2(x^2 + 4) \Rightarrow 100x^2 = 16x^2 + 64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100x^2 - 16x^2 = 64 \Rightarrow 84x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = \frac{64}{84} \approx 0.762 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \approx \sqrt{0.762} \approx 0.87.$$

Entonces, $t(x)$ tiene un punto crítico en $x \approx 0.87$.

Valuaremos ahora $t(x)$ en $x = 0.87$, $x = 0$ & $x = 5$, para comparar los tiempos obtenidos y decidir cuál es el menor.

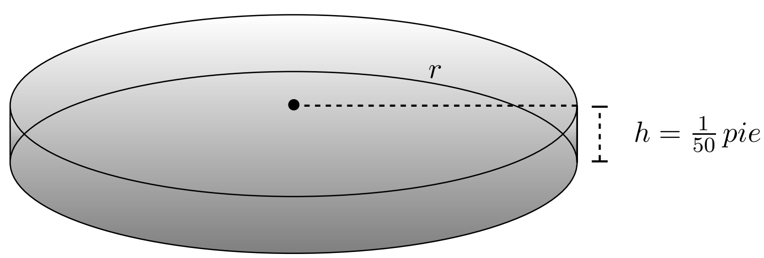
$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{5-x}{10} \\ t(0.87) &= \frac{\sqrt{(0.87)^2+4}}{4} + \frac{5-0.87}{10} \approx 0.9582 \text{ hora} \\ t(0) &= \frac{\sqrt{0^2+4}}{4} + \frac{5-0}{10} = 1 \text{ hora} \\ t(5) &= \frac{\sqrt{5^2+4}}{4} + \frac{5-5}{10} \approx 1.34629 \text{ horas.} \end{aligned}$$

Luego entonces, el tiempo mínimo es 0.9582 de hora.

□

(3) Un derrame de petróleo adopta una forma circular y tiene un espesor de $\dfrac{1}{50}$ pie. Si el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, ¿a qué razón está aumentando el radio de la mancha de petróleo cuando el radio es de 50 pies?

▼ Sea la figura:



Notamos que el derrame tiene la forma de un cilindro recto circular, con una altura o espesor constante $h = \dfrac{1}{50}$ pie y un radio variable r en función del tiempo $t \geq 0$.
Considerando que $r = r(t)$ está en pies, el volumen del derrame V, medido en pies^3, es

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{1}{50}\right) = \frac{\pi}{50} r^2,$$

es decir,

$$V(t) = \frac{\pi}{50}[r(t)]^2.$$

La razón de cambio del volumen al paso del tiempo es

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{50}r^2(t)\right] = \frac{\pi}{50} \times 2 \times r(t)\frac{d}{dt}r(t),$$

esto es,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{25} r \left(\frac{dr}{dt}\right).$$

Como el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, entonces, $\dfrac{dV}{dt} = 40$.

Por lo tanto

$$\frac{\pi}{25} r\left(\frac{dr}{dt}\right) = 40.$$

En el instante en que el radio es $r = 50$ pies, sucede que $\frac{\pi}{25}(50)\frac{dr}{dt} = 40$, de donde

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(40)25}{50\pi} = \frac{20}{\pi},$$

que es la rapidez de cambio del radio.
Esto es, el radio está aumentando a razón de $\frac{dr}{dt} = \frac{20}{\pi}$ pies/min.

□

(4) Un supermercado se encuentra con grandes existencias de manzanas que debe vender rápidamente. El gerente sabe que si las manzanas se ofrecen a p pesos cada kg, vendería x kg, con $x = 1\,000 - 20\,p$. ¿Qué precio p deberá fijar para obtener ingresos de por lo menos \$12 000?

▼ Si ofreciendo a p pesos cada kilogramo de manzanas, se venden $x = 1\,000 - 20\,p$ kilogramos, entonces el ingreso I por la venta total es

$$I = xp = (1\,000 - 20\,p)p = 1\,000\,p - 20\,p^2,$$

es decir, $I(p) = 1\,000\,p - 20\,p^2$ pesos.
Ahora bien, para que $I(p)$ sea por lo menos \$12 000 debe suceder que

$$I(p) \geq 12\,000 \Leftrightarrow 1\,000\,p - 20\,p^2 \geq 12\,000 \Leftrightarrow 12\,000 - 1\,000p + 20\,p^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20(p^2 - 50\,p + 600) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 50\,p + 600 \leq 0.$$

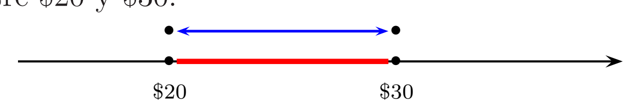
Resolvemos primero la igualdad $p^2 - 50p + 600 = 0$.

$$p = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(600)}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 2\,400}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{50 \pm 10}{2}.$$

De donde $p_1 = \frac{50 - 10}{2} = \frac{40}{2} = 20$ y $p_2 = \frac{50 + 10}{2} = \frac{60}{2} = 30$.
Considerando que $p \geq 0$, analizamos los intervalos $(0, 20)$, $(20, 30)$ y $(30, +\infty)$.

Intervalo	Valor de prueba	$p^2 - 50p + 600$
$0 < p < 20$	$p = 10$	$200 > 0$
$20 < p < 30$	$p = 25$	$-25 < 0$
$30 < p$	$p = 40$	$200 > 0$

Luego entonces, la desigualdad $p^2 - 50p + 600 \leq 0$ se cumple cuando $20 \leq p \leq 30$; es decir, cuando el precio p por kg está entre \$20 y \$30.



□

(5) Una legislación estatal sobre impuestos establece un impuesto exigible de 12% sobre los primeros \$20 000 de ganancias gravables y de 16% sobre el resto de las ganancias.
Calcular los valores de las constantes A y B para que la función de impuestos $T(x)$ sea continua para todo x.

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ A + 0.12x & \text{si } 0 < x \leq 20\,000; \\ B + 0.16(x - 20,000) & \text{si } x > 20\,000. \end{cases}$$

▼ La función de impuestos $T(x)$ que se da, es polinomial por partes y por lo tanto continua en cada uno de los intervalos semiabiertos $(-\infty, 0]$, $(0, 20\,000]$ y $(20\,000, +\infty)$. Entonces, sólo debemos cuidar la continuidad de $T(x)$ en los puntos $x = 0$ & $x = 20\,000$.

Ya que

$$\lim_{x \to 0^-} T(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

y también que

$$\lim_{x \to 0^+} T(x) = \lim_{x \to 0^+} (A + 0.12x) = A + 0 = A,$$

entonces,

$$\lim_{x \to 0} T(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} T(x) = \lim_{x \to 0^+} T(x) \Leftrightarrow A = 0.$$

Y puesto que

$$\lim_{x \to 20\,000^-} T(x) = \lim_{x \to 20\,000} (0.12x) = (0.12)20\,000 = 2\,400$$

y también que

$$\lim_{x \to 20\,000^+} T(x) = \lim_{x \to 20\,000} [B + 0.16(x - 20\,000)] = B + 0.16(20\,000 - 20\,000) = B + 0 = B,$$

entonces,

$$\lim_{x \to 20\,000} T(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x \to 20\,000^-} T(x) = \lim_{x \to 20\,000^+} T(x) \Leftrightarrow B = 2\,400.$$

Por lo tanto, la función de impuestos es (hasta aquí)

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1; \\ 0.12x & \text{si } 0 < x \leq 20\,000; \\ 2\,400 + 0.16(x - 20\,000) & \text{si } x > 20\,000. \end{cases}$$

Nótese ahora que

$$T(0) = 0 \;\&\; \lim_{x \to 0} T(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} T(x) = T(0);$$
$$T(20\,000) = 0.12(20\,000) = 2\,400 \;\&\; \lim_{x \to 20\,000} T(x) = 2\,400 \Rightarrow \lim_{x \to 20\,000} T(x) = T(20\,000),$$

por lo cual, podemos afirmar que $T(x)$ es continua en $x = 0$ y en $x = 20\,000$.
Luego entonces, $T(x)$ es una función continua para toda x.

□

(6) Dar un bosquejo de la gráfica de la función f que cumple los requisitos siguientes:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$ $\quad$ $\lim_{x\to-4} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$

$f'(x) > 0$ para $x < -2$ $\quad$ $f''(x) > 0$ para $x < -2$ $\quad$ $\lim_{x\to-2^+} f(x) = 0$

$f(0) = -3$ $\quad$ $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ $\quad$ $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 1$

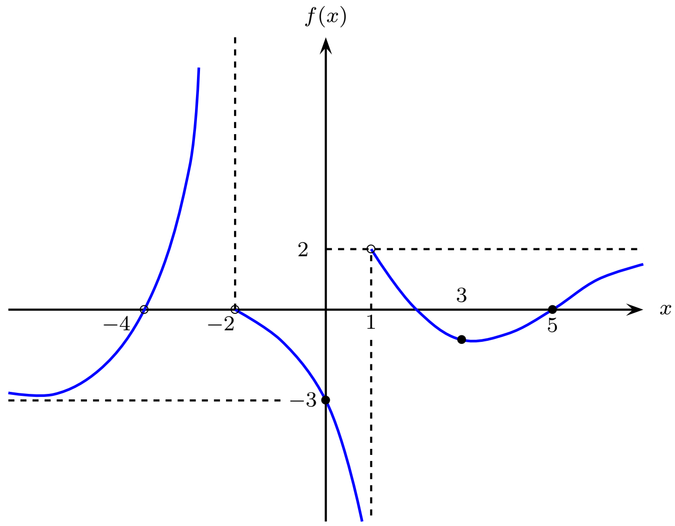
$f''(x) < 0$ para $-2 < x < 1$ $\quad$ $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2$ $\quad$ $f(3) = -1$

$f'(3) = 0$ $\quad$ $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$ $\quad$ $f'(x) > 0$ para $x > 3$

$f''(x) > 0$ para $1 < x < 5$ $\quad$ $f(5) = 0$ $\quad$ $f''(x) < 0$ para $x > 5$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

▼ Un posible bosquejo de la gráfica de f es el siguiente



□