CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E1500

(1) Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/seg, entonces su altura después de t segundos es:

$$s(t) = -5t^2 + 25t$$

(a) Determine el dominio de la función
(b) ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a más de 30 m del suelo?
(c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 20 m arriba del piso en su camino hacia arriba y luego hacia abajo?

(2) Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2$	$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$	$f(0) = -1$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 4$	$f(-1) = -2$	$f'(-1)$ no existe
$f''(1) = 0$	$f''\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$	$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$

(3) Calcule los valores de a, b que hacen de la siguiente función una función continua

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x} & \text{si } x < -1; \\ b & \text{si } x = -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1}$.

(5) Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, determine:

(a) Dominio, raíces y paridad
(b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
(c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo y puntos de inflexión
(d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades
(e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales
(f) Máximos y mínimos relativos y absolutos
(g) Esbozo gráfico y rango

(6) Cuando un tanque esférico de radio a contiene líquido con una profundidad h, el volumen de este líquido está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h).$$

Suponga ahora que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando de agua a razón de $\dfrac{20}{3}$ l/s. Calcule la razón de cambio del nivel de agua cuando $h = 1.25$ m.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(7) Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 100 l en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

Respuestas

(1) Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/s, entonces, su altura después de t segundos es

$$s(t) = -5t^2 + 25t.$$

(a) Determine el dominio de la función

▼ La función altura o posición con respecto al suelo es: $s(t) = -5t^2 + 25t$.

El dominio de esta función es

$$\begin{aligned} D_s &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, s(t) \geq 0 \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, -5t^2 + 25t \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, 5t(-t+5) \geq 0 \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, -t+5 \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, 5 \geq t \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, t \leq 5 \right\} = \left\{ t \,\middle|\, 0 \leq t \leq 5 \right\} = \\ &= [0, 5] \end{aligned}$$

□

(b) ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a más de 30 m del suelo?

▼ Se cumple si:

$$\begin{aligned} &s(t) > 30 \Leftrightarrow -5t^2 + 25t > 30 \Leftrightarrow -5t^2 + 25t - 30 > 0 \Leftrightarrow -5(t^2 - 5t + 6) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 < 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3) < 0. \end{aligned}$$

Desigualdad que se cumple cuando

$$\begin{array}{ccc} t-2<0 \text{ y } t-3>0 & \text{o bien} & t-2>0 \text{ y } t-3<0; \\ t<2 \text{ y } t>3 & \text{o bien} & t>2 \text{ y } t<3; \\ t<2 \text{ y } t>3 & \text{o bien} & 2<t<3. \end{array}$$

Ya que no hay $t \in \mathbb{R}$ tales que $t < 2$ & $t > 3$, entonces la desigualdad se cumple sólo cuando $2 < t < 3$.

Por lo tanto, la desigualdad $s(t) > 30$ se cumple cuando, y sólo cuando, $2 < t < 3$.

□

(c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 20 m arriba del piso en su camino hacia arriba y luego hacia abajo?

▼ Primero determinamos los instantes en que la pelota está 20 metros arriba del suelo.

$$\begin{aligned} s(t) = 20 &\Leftrightarrow -5t^2 + 25t = 20 \Leftrightarrow -5t^2 + 25t - 20 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -5(t^2 - 5t + 4) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (t-1)(t-4) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ o bien } t = 4 \end{aligned}$$

Luego calculamos la velocidad intantánea de la pelota en cualquier instante t.

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \frac{d}{dt}(-5t^2 + 25t) = -10t + 25$$

Finalmente, obtenemos $v(1) = v(t = 1)$ y $v(4) = v(t = 4)$

$$v(1) = -10(1) + 25 = -10 + 25 = 15 \Rightarrow v(1) = 15\,m/s$$
$$v(4) = -10(4) + 25 = -40 + 25 = -15 \Rightarrow v(4) = -15\,m/s$$

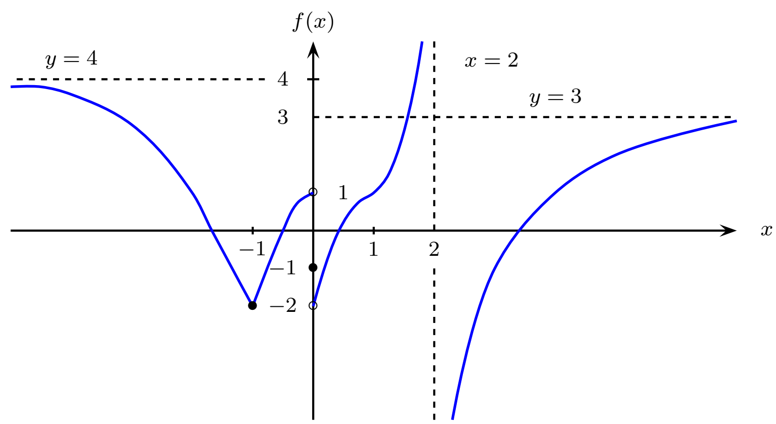
El signo positivo de $v(1) = 15$ m/s nos indica que la pelota va hacia arriba y el signo negativo de $v(4) = -15$ m/s nos dice que la pelota se dirige hacia abajo.

□

(2) Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$	$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$	$f(0) = -1$
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$	$f(-1) = -2$	$f'(-1)$ no existe
$f''(1) = 0$	$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

▼ Por las condiciones dadas: la recta $x = 2$ es una asíntota vertical, las rectas $y = 3$ y $y = 4$ son asíntotas horizontales, la gráfica tiene un "pico" en $x = -1$, podemos considerar que existe un punto de inflexión en $x = 1$ y que en $x = \frac{1}{2}$ la función es cóncava hacia abajo y creciente.



□

(3) Calcule los valores de a, b que hacen de la siguiente función una función continua

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x} & \text{si } x < -1; \\ b & \text{si } x = -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

▼ La función racional $f(x) = \dfrac{a}{2x}$ es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, lo que implica su continuidad en el intervalo $(-\infty, -1)$.

La función polinomial $f(x) = x^2 + 1$ es continua en todo $\mathbb{R}$, lo que implica su continuidad en el intervalo $(-1, 2)$.

Lo anterior nos lleva a cuidar la continuidad de f en $x = -1$, para lo cual debemos exigir que $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$.

$\lim_{x\to -1} f(x)$ existe si y solo si

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\left(\frac{a}{2x}\right) = \lim_{x\to -1}(x^2+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{2(-1)} = (-1)^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{-2} = 2 \Leftrightarrow a = -4.$$

Luego entonces, con $a = -4$ sucede que $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$.

Ahora bien, por definición de la función f, sabemos que $f(-1) = b$ y debe suceder que $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$.

Esto se logra cuando $b = f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = 2$; es decir, si $b = 2$.

Por lo tanto, f es una función continua en el intervalo $(-\infty, 2)$ cuando $a = -4$ y cuando $b = 2$.

Esto es, cuando

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & \text{si } x < -1; \\ 2 & \text{si } x = -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

$\square$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1}$.

▼ Calculamos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4\left(1 - \dfrac{3x^2}{x^4} - \dfrac{1}{x^4}\right)}}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4}\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1.$$

Luego entonces, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1} = 1$.

$\square$

(5) Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, determine:

(a) Dominio, raíces y paridad

▼ Dominio:

Por ser f una función racional, su dominio es

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\, x \,\middle|\, x = 0 \,\right\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Paridad:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \ \&$$

$$-f(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}.$$

Luego entonces, $f(-x) \neq f(x)$ & $f(-x) \neq -f(x)$.

Por lo tanto, la función $f(x)$ no es par ni tampoco es impar.

$\square$

(b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

▼ Derivamos:

$$f(x) = x^{-2} + x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} - 3x^{-4} = -\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) = -\frac{2x+3}{x^4}.$$

Aquí es importante observar que, para cada $x \neq 0$, se tiene que $x^4 > 0$. Por esto sucede que

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2x+3}{x^4} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x^4} < 0 \Leftrightarrow 2x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2};$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2x+3}{x^4} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x^4} > 0 \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, f es estrictamente creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$; es estrictamente decreciente en los intervalos $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(0, +\infty)$.

□

(c) Intervalos de concavidad hacia arriba, de concavidad hacia abajo y puntos de inflexión

▼ Segunda derivada:

$$f'(x) = -2x^{-3} - 3x^{-4} \Rightarrow f''(x) = 6x^{-4} + 12x^{-5} = \frac{6}{x^4} + \frac{12}{x^5} = \frac{6x+12}{x^5}.$$

Primero vemos que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x+12}{x^5} = 0 \Leftrightarrow 6x+12 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Considerando este número $x = -2$ y excluyendo a $x = 0$, generamos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ & $(0, +\infty)$, en los cuales veremos el signo de $f''(x)$.

Intervalo	Valor prueba	$f''(x) =$	f es cóncava hacia
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$\frac{2}{81} > 0$	arriba
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$-6 < 0$	abajo
$0 < x < +\infty$	$x = 2$	$\frac{3}{4} > 0$	arriba

Luego entonces, f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$.
Y es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-2, 0)$.

Existen cambios de concavidad en $x = -2$ y en $x = 0$, pero la función no es continua en $x = 0$. Entonces, sólo hay un punto de inflexión en $x = -2$.

□

(d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades

▼ Por ser una función racional, f es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Esto es, f es continua en el conjunto $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$.

La función f tiene una discontinuidad en $x = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$ & $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x^3} =$ "$\left(\frac{1}{0}\right)$" $= \infty$. Es decir, la discontinuidad es esencial; puede decirse también que la discontinuidad es infinita.

□

(e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

▼ Precisamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ determinando los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”}.$$

Puesto que $x \to 0^-$, entonces $x < 0$ & $(x+1) \to 1 > 0$.

Como $x^3 < 0$ & $(x+1) > 0$, entonces $\dfrac{x+1}{x^3} < 0$, por lo que $\dfrac{x+1}{x^3} \to -\infty$.

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{”}.$$

Puesto que $x \to 0^+$, entonces $x > 0$ & $(x+1) \to 1 > 0$.

Como $x^3 > 0$ & $(x+1) > 0$, entonces $\dfrac{x+1}{x^3} > 0$, por lo que $\dfrac{x+1}{x^3} \to +\infty$.

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

De lo anterior se desprende que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical y que además es la única.

Ahora bien,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 0 \ \& \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0.$$

Luego entonces, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal y además es la única.

□

(f) Máximos y mínimos relativos y absolutos

▼ Vemos que:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x+3}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\,,$$

lo cual implica que f tiene un punto crítico en $x = -\dfrac{3}{2}$.

Por el inciso b) se sabe que f es creciente para $x < -\dfrac{3}{2}$ y decreciente para $x > -\dfrac{3}{2}$. Luego entonces, por el criterio de la primera derivada, f tiene en $x = -\dfrac{3}{2}$ un punto máximo local estricto.

La función f no tiene máximo ni mínimo absoluto, ya que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \ \& \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

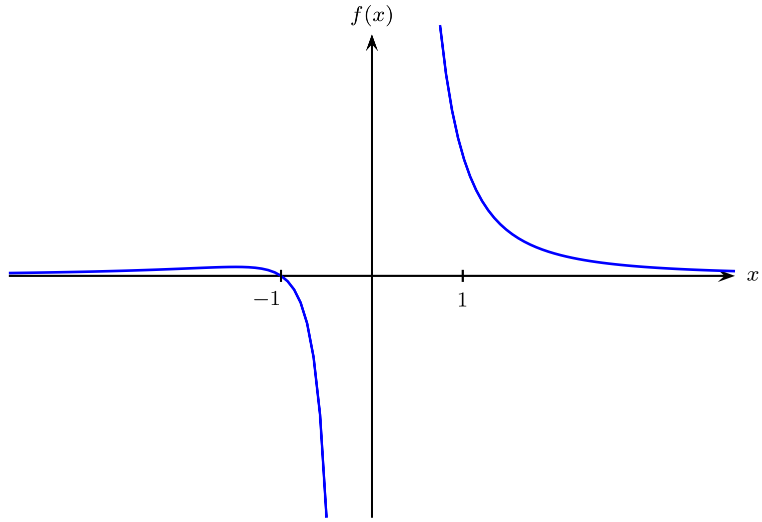
□

(g) Rango y esbozo gráfico

▼ Precisamos las coordenadas del punto de inflexión y del máximo local estricto.

Punto de inflexión $= I[-2, f(-2)] = I\left(-2, \dfrac{1}{8}\right)$.

Máximo local $= M\left[-\dfrac{3}{2}, f\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right] = M\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{27}\right)$. La gráfica de $f(x)$ es:



El rango de $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$.

□

(6) Cuando un tanque esférico de radio a contiene líquido con una profundidad h, el volumen de este líquido está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h).$$

Suponga ahora que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando de agua a razón de $\frac{20}{3}$ l/s. Calcule la razón de cambio del nivel de agua cuando $h = 1.25$ m.

▼ Consideramos que en la fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h) = \pi h^2 a - \frac{1}{3}\pi h^3$$

tanto la profundidad h como el volumen V están en función del tiempo t.
Cuando $a = 5$ m $= 50$ dm, se tiene que

$$V = 50\pi h^2 - \frac{\pi}{3}h^3.$$

Derivando respecto a t se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = 100\pi h\frac{dh}{dt} - \pi h^2\frac{dh}{dt} = \pi h(100 - h)\frac{dh}{dt},$$

donde $\frac{dV}{dt}$ es la rapidez de cambio del volumen y $\frac{dh}{dt}$ es la rapidez de cambio de la profundidad.
Cuando $\frac{dV}{dt} = \frac{20}{3}$ l/s $= \frac{20}{3}$ dm^3/s & $h = 1.25$ m $= 12.5$ dm, se tiene que

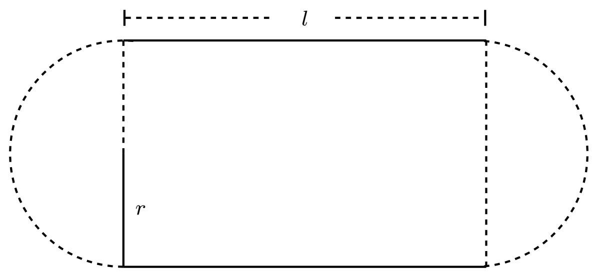
$$\frac{20}{3} = \pi(12.5)(100 - 12.5)\frac{dh}{dt} \Rightarrow \pi(12.5)(87.5)\frac{dh}{dt} = \frac{20}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1093.75\pi\frac{dh}{dt} = \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{3(1093.75)\pi} \approx 0.00194017 \text{ dm/s}.$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la profundidad es $\frac{dh}{dt} \approx 0.00194017$ dm/s.

□

(7) Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 100 l en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

▼ Usamos la figura siguiente que es la de una sección vertical del tanque:



Considerando un cilindro circular recto de radio r y largo l, medidos ambos en decímetros (dm), el volumen de este tanque es

$$V = \pi r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3;$$

y debe ser $V = 10$ l $= 10$ dm^3; por lo cual se debe cumplir que

$$\pi r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10.$$

Minimizar la cantidad de metal es equivalente a minimizar el área superficial del tanque.
El área del tanque es

$$A = 2\pi r l + 4\pi r^2.$$

Se tiene entonces:

Una ecuación, $\pi r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10$.
Una función, $A = 2\pi r l + 4\pi r^2$.

De la ecuación se despeja a una de las variables (la que convenga) para luego sustituirla en la función. Conviene despejar l:

$$\pi r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10 \Rightarrow l = \frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo en A se obtiene

$$A = 2\pi r l + 4\pi r^2 = 2\pi r\left(\frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}\right) + 4\pi r^2 =$$

$$= \frac{2}{r}\left(10 - \frac{4}{3}\pi r^3\right) + 4\pi r^2 = \frac{20}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 + 4\pi r^2$$

$$A(r) = \frac{20}{r} + \frac{4}{3}\pi r^2,$$

que es la función a minimizar:

$$A'(r) = -\frac{20}{r^2} + \frac{8}{3}\pi r$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{20}{r^2} + \frac{8}{3}\pi r = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}\pi r = \frac{20}{r^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{60}{8\pi} = \frac{15}{2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}} \approx 1.3365.$$

Luego entonces, la función $A(r)$ tiene un punto crítico en $r_1 \approx 1.3365$:

$$A''(r) = \frac{40}{r^3} + \frac{8}{3}\pi > 0.$$

Se tiene un mínimo local estricto.
Por lo tanto, las dimensiones del tanque que minimizan el área son:

$$r = 1.3365 \ \&$$

$$l = \frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{10 - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{15}{2\pi}\right)}{\pi(1.3365)^2} = \frac{10 - 10}{\pi(1.3365)^2} = 0.$$

Es decir, el tanque debe ser una esfera de radio $r_1 = 1.3365$ dm.

$\square$