CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E1600

(A) Primer parcial

(1) Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/seg, entonces su altura después de t segundos es:

$$s(t) = -5t^2 + 25t$$

(a) Determine el dominio de la función
(b) ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a más de 30 m del suelo?

(2) Sean

$$f(x) = \sqrt{2x+3} \text{ y } g(x) = \frac{2x^2 - 18}{x}$$

Determinar
(a) Dominio y raíces de $f(x)$ y de $g(x)$
(b) $(g \circ f)(x)$ y su dominio

(3) Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \leq -1; \\ |\, 3x - 4\, | & \text{si } x > -1; \end{cases}$$

$$g(x) = 3f(x+1) - 4,$$

determinar las gráficas de ambas funciones, el dominio y el rango de la función $g(x)$.

(4) El costo de un viaje en taxi es de \$4.80 por el primer kilómetro (o parte del primer kilómetro) y 30 centavos por cada 100 metros subsiguientes. Exprese el costo de un viaje como función de la distancia x recorrida (en kilómetros), para $0 < x < 2$; además, grafique esa función.

(B) Segundo parcial

(1) Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2; \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1; \qquad f(0) = -1;$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty; \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3.$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4;$$

(2) La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}\,,$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.

(a) Si los cuerpos se están moviendo, encuentre $\dfrac{dF}{dr}$ y explique su significado
(b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esa fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(3) Calcule los valores de a, b que hacen de la siguiente función una función continua

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x} & \text{si } x < -1; \\ b & \text{si } x = -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1}$.

(5) Para la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

Determine:
 (a) Dominio, raíces y paridad
 (b) Clasificación de discontinuidades
 (c) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales
 (d) Esbozo gráfico

(C) Tercer parcial

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, determine:
 (a) Dominio, raíces y paridad
 (b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
 (c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo y puntos de inflexión
 (d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades
 (e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales
 (f) Máximos y mínimos relativos y absolutos
 (g) Esbozo gráfico y rango

(2) Cuando un tanque esférico de radio a contiene líquido con una profundidad h, el volumen de este líquido está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h).$$

Suponga ahora que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando de agua a razón de $\dfrac{20}{3}$ l/s. Calcule la razón de cambio del nivel de agua cuando $h = 1.25$ m.

(3) Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 100 l en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

(4) Muestre que las rectas tangentes a la elipse

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

en los puntos $(1, -1)$ & $(-1, 1)$ son paralelas.

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/s, entonces, su altura después de t segundos es:

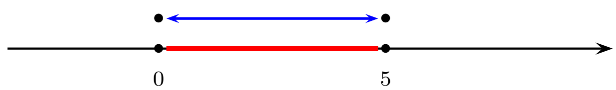
$$s(t) = -5t^2 + 25t.$$

(a) Determine el dominio de la función

▼ La función altura o posición con respecto al suelo es: $s(t) = -5t^2 + 25t$.

El dominio de esta función es

$$\begin{aligned} D_s &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, s(t) \geq 0 \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, -5t^2 + 25t \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, 5t(-t+5) \geq 0 \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, -t+5 \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, 5 \geq t \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, t \leq 5 \right\} = \left\{ t \,\middle|\, 0 \leq t \leq 5 \right\} = \\ &= [0, 5]\,. \end{aligned}$$



□

(b) ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a más de 30 m del suelo?

▼ Se cumple si:

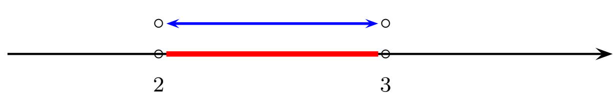
$$\begin{aligned} s(t) > 30 &\Leftrightarrow -5t^2 + 25t > 30 \Leftrightarrow -5t^2 + 25t - 30 > 0 \Leftrightarrow -5(t^2 - 5t + 6) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 < 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3) < 0. \end{aligned}$$

Desigualdad que se cumple cuando

$$\begin{array}{ccc} t-2 < 0 \text{ y } t-3 > 0 & \text{o bien} & t-2 > 0 \text{ y } t-3 < 0; \\ t < 2 \text{ y } t > 3 & \text{o bien} & t > 2 \text{ y } t < 3; \\ t < 2 \text{ y } t > 3 & \text{o bien} & 2 < t < 3. \end{array}$$

Ya que no hay $t \in \mathbb{R}$ tales que $t < 2$ & $t > 3$, entonces la desigualdad se cumple sólo cuando $2 < t < 3$.

Por lo tanto, la desigualdad $s(t) > 30$ se cumple cuando, y sólo cuando, $2 < t < 3$.



□

(2) Sean

$$f(x) = \sqrt{2x+3} \text{ y } g(x) = \frac{2x^2 - 18}{x}\,,$$

determinar:

(a) Dominio y raíces de $f(x)$ y de $g(x)$

▼ Para la función $f(x) = \sqrt{2x+3}$:

Dominio: $D_f = \left\{ x \,\middle|\, 2x+3 \geq 0 \right\} = \left\{ x \,\middle|\, x \geq -\dfrac{3}{2} \right\} = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty \right)$.

Raíces: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.

Para la función $g(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x}$:

Dominio: $D_g = \left\{ x \,\middle|\, x \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \{ 0 \}$.

Raíces: $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ & $x = 3$.

$\square$

(b) $(g \circ f)(x)$ y su dominio

▼ Calculamos:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{2x+3}) = \frac{2(\sqrt{2x+3})^2 - 18}{\sqrt{2x+3}} = \\ = \frac{2(2x+3) - 18}{\sqrt{2x+3}} = \frac{4x + 6 - 18}{\sqrt{2x+3}} = \frac{4x - 12}{\sqrt{2x+3}}\,.$$

El dominio de esta función es:

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \,\middle|\, x \in D_f \text{ \& } f(x) \in D_g \right\} = \\ = \left\{ x \,\middle|\, x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right) \text{ \& } \sqrt{2x+3} \neq 0 \right\} = \\ = \left\{ x \,\middle|\, x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right) \text{ \& } 2x + 3 \neq 0 \right\} = \\ = \left\{ x \,\middle|\, 2x + 3 > 0 \right\} = \left\{ x \,\middle|\, x > -\frac{3}{2} \right\} = \\ = \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

$\square$

(3) Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \leq -1; \\ |\,3x - 4\,| & \text{si } x > -1; \end{cases}$$
$$g(x) = 3f(x+1) - 4,$$

determinar las gráficas de ambas funciones, el dominio y el rango de la función $g(x)$.

▼ Considerando que

$$|\,3x - 4\,| = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } 3x - 4 \geq 0 \\ -(3x - 4) & \text{si } 3x - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x \geq \dfrac{4}{3}; \\ -3x + 4 & \text{si } x < \dfrac{4}{3}, \end{cases}$$

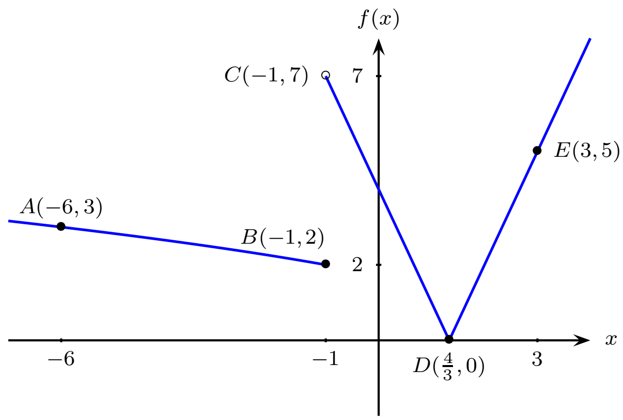
reescribimos la función f como

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \leq -1; \\ -3x + 4 & \text{si } -1 < x < \dfrac{4}{3}; \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq \dfrac{4}{3}\,. \end{cases}$$

Para tener la gráfica de $f(x)$ debemos ver que

$$y = \sqrt{3-x} \Rightarrow y^2 = 3 - x \Rightarrow (y-0)^2 = -1(x-3),$$

es decir, que $y = \sqrt{3-x}$ es una parábola con eje horizontal la cual se abre hacia la izquierda desde su vértice $V(3,0)$.
Un bosquejo de la gráfica de $f(x)$:

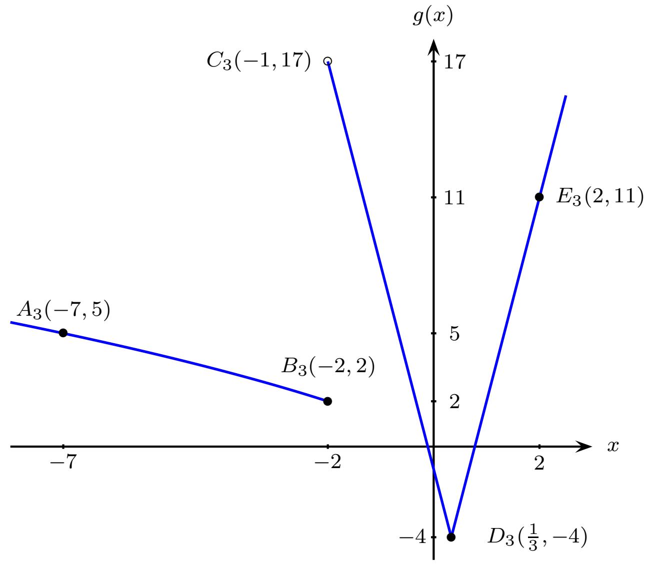


Obtenemos la gráfica de la función $g(x) = 3f(x+1) - 4$ mediante etapas, y partiendo de la gráfica de $f(x)$.
$y = f(x+1)$ se obtiene desplazando a $y = f(x)$ una unidad hacia la izquierda.
$y = 3f(x+1)$ se obtiene multiplicando por 3 las ordenadas de $y = f(x+1)$.
Finalmente, $y = 3f(x+1) - 4$ se obtiene de $y = 3f(x+1)$, trasladándola 4 unidades hacia abajo.

Veamos las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, después de cada etapa

$y = f(x)$	$y = f(x+1)$	$y = 3f(x+1)$	$y = 3f(x+1) - 4$
$A(-6,3)$	$A_1(-7,3)$	$A_2(-7,9)$	$A_3(-7,5)$
$B(-1,2)$	$B_1(-2,2)$	$B_2(-2,6)$	$B_3(-2,2)$
$C(-1,7)$	$C_1(-2,7)$	$C_2(-2,21)$	$C_3(-2,17)$
$D\left(\frac{4}{3},0\right)$	$D_1\left(\frac{1}{3},0\right)$	$D_2\left(\frac{1}{3},0\right)$	$D_3\left(\frac{1}{3},-4\right)$
$E(3,5)$	$E_1(2,5)$	$E_2(2,15)$	$E_3(2,11)$

Ahora la gráfica de la función $g(x)$:



El dominio de g es $\mathbb{R}$ y el rango de g es el intervalo $(-4, +\infty)$.

□

(4) El costo de un viaje en taxi es de \$4.80 por el primer kilómetro (o parte del primer kilómetro) y 30 centavos por cada 100 metros subsiguientes. Exprese el costo de un viaje como función de la distancia x recorrida (en kilómetros), para $0 < x < 2$; además, grafique esa función.

▼ Considerando que 100 m $= 0.1$ km y que 30 centavos $=$ \$0.30, se construye la primera tabla, la cual se expresa de otra manera (como en la segunda tabla).

Recorrido en km	Costo en pesos
$0 < x < 1.1$	4.80
$1.1 \leq x < 1.2$	$4.80 + 0.30 = 5.10$
$1.2 \leq x < 1.3$	$5.10 + 0.30 = 5.40$
$1.3 \leq x < 1.4$	$5.40 + 0.30 = 5.70$
$1.4 \leq x < 1.5$	$5.70 + 0.30 = 6.00$
$1.5 \leq x < 1.6$	$6.00 + 0.30 = 6.30$
$1.6 \leq x < 1.7$	$6.30 + 0.30 = 6.60$
$1.7 \leq x < 1.8$	$6.60 + 0.30 = 6.90$
$1.8 \leq x < 1.9$	$6.90 + 0.30 = 7.20$
$1.9 \leq x < 2$	$7.20 + 0.30 = 7.50$

Recorrido en km	Costo en pesos
$0 < x < 1.1$	4.80
$1 + 1(0.1) \leq x < 1 + 2(0.1)$	$4.80 + 1(0.30)$
$1 + 2(0.1) \leq x < 1 + 3(0.1)$	$4.80 + 2(0.30)$
$1 + 3(0.1) \leq x < 1 + 4(0.1)$	$4.80 + 3(0.30)$
$1 + 4(0.1) \leq x < 1 + 5(0.1)$	$4.80 + 4(0.30)$
$1 + 5(0.1) \leq x < 1 + 6(0.1)$	$4.80 + 5(0.30)$
$1 + 6(0.1) \leq x < 1 + 7(0.1)$	$4.80 + 6(0.30)$
$1 + 7(0.1) \leq x < 1 + 8(0.1)$	$4.80 + 7(0.30)$
$1 + 8(0.1) \leq x < 1 + 9(0.1)$	$4.80 + 8(0.30)$
$1 + 9(0.1) \leq x < 1 + 10(0.1)$	$4.80 + 9(0.30)$

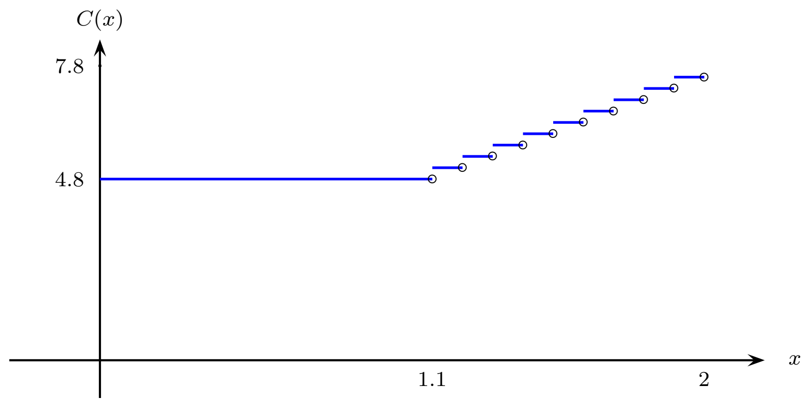
Observamos en estas tablas que

Recorrido en km	Costo en pesos	
$1 + n(0.1) \le x < 1 + (n+1)(0.1)$	$4.80 + n(0.30)$	n es un natural

Es decir, el costo C en pesos como función del recorrido x en kilómetros es

$$C(x) = 4.80 + n(0.30) \text{ si } 1 + n(0.1) \le x < 1 + (n+1)(0.1).$$

La gráfica de esta función es la siguiente:



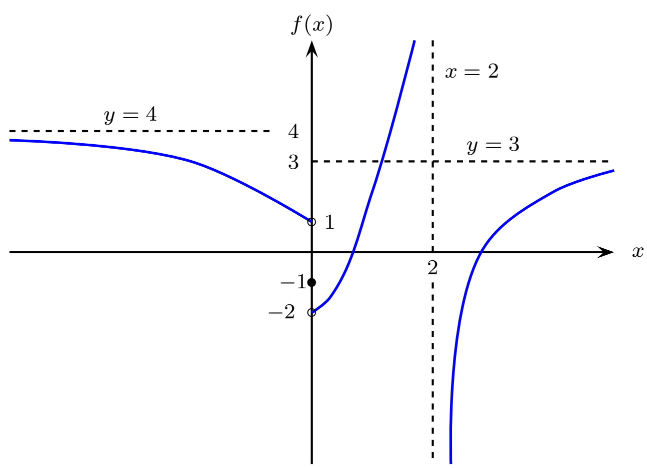
□

(B) Segundo parcial

(1) Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1; \quad f(0) = -1;$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3.$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4;$$

▼ La gráfica es:



□

(2) La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.

(a) Si los cuerpos se están moviendo, encuentre $\dfrac{dF}{dr}$, la razón de cambio instantánea de la fuerza F cuando cambia la distancia r entre los cuerpos.

▼ Calculamos:

$$\frac{dF}{dr} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{GmM}{(r+h)^2} - \dfrac{GmM}{r^2}}{h} = GmM \lim_{h\to 0}\left[\frac{r^2-(r+h)^2}{hr^2(r+h)^2}\right] =$$

$$= GmM \lim_{h\to 0}\left[\frac{-2rh-h^2}{hr^2(r+h)^2}\right] = GmM \lim_{h\to 0}\left[\frac{-2r-h}{r^2(r+h)^2}\right] =$$

$$= GmM\left[\frac{-2r}{r^4}\right] = -\frac{2GmM}{r^3}\,.$$

□

(b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae a un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esa fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

▼ Por un lado tenemos

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=20\,000} = -2\,,$$

y por otro

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=20\,000} = -\frac{2GmM}{(20\,000)^3}\,;$$

luego entonces,

$$-\frac{2GmM}{(20\,000)^3} = -2 \Rightarrow GmM = (20\,000)^3\,;$$

por lo que

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=10\,000} = \frac{-2\times(20\,000)^3}{(10\,000)^3} = -2\times 2^3 = -16 \text{ N/km}\,.$$

□

(3) Calcule los valores de a, b que hacen de la siguiente función una función continua

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x} & \text{si } x < -1; \\ b & \text{si } x = -1; \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

▼ La función racional $f(x) = \dfrac{a}{2x}$ es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, lo que implica su continuidad en el intervalo $(-\infty, -1)$.

La función polinomial $f(x) = x^2+1$ es continua en todo $\mathbb{R}$, lo que implica su continuidad en el intervalo $(-1, 2)$.

Lo anterior nos lleva a cuidar la continuidad de f en $x = -1$, para lo cual debemos exigir que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe si y solo si

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\left(\frac{a}{2x}\right) = \lim_{x\to -1}(x^2+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{2(-1)} = (-1)^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{-2} = 2 \Leftrightarrow a = -4.$$

Luego entonces, con $a = -4$ sucede que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$.

Ahora bien, por definición de la función f, sabemos que $f(-1) = b$ y debe suceder que $f(-1) = \lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Esto se logra cuando $b = f(-1) = \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$; es decir, si $b = 2$.

Por lo tanto, f es una función continua en el intervalo $(-\infty, 2)$ cuando $a = -4$ y cuando $b = 2$.

Esto es, cuando

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & \text{si } x < -1; \\ 2 & \text{si } x = -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

□

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1}$.

▼ Calculamos:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^4\left(1 - \dfrac{3x^2}{x^4} - \dfrac{1}{x^4}\right)}}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^4}\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1.$$

Luego entonces, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1} = 1$.

□

(5) Para la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3},$$

determine:

(a) Dominio, raíces y paridad

▼ Dominio.

Por ser f una función racional, su dominio es

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\, x \,\middle|\, x^3 = 0 \,\right\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Paridad:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \ \&$$
$$-f(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\,.$$

Luego entonces, $f(-x) \neq f(x)$ pues $\dfrac{1}{x^3} \neq -\dfrac{1}{x^3}$ ya que $\dfrac{1}{x^3} = -\dfrac{1}{x^3} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x^3} = 0$, lo cual es absurdo; y análogamente $-\dfrac{1}{x^2} \neq \dfrac{1}{x^2}$; y así también $f(-x) \neq -f(x)$.
Por lo tanto, f no es par ni tampoco es impar.

$\square$

(b) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades

$\blacktriangledown$ Por ser una función racional, f es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Esto es, f es continua en el conjunto $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$.
Entonces f tiene una discontinuidad en $x = 0$.
Como $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$ & $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x^3} = \infty$. Es decir, la discontinuidad es esencial; puede decirse también que la discontinuidad es infinita.

$\square$

(c) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

$\blacktriangledown$ Precisamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ determinando los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”} = -\infty.$$

Puesto que $x \to 0^-$, entonces $x < 0$ & $(x+1) \to 1 > 0$.
Como $x^3 < 0$ & $(x+1) > 0$, entonces $\dfrac{x+1}{x^3} < 0$, por lo que $\dfrac{x+1}{x^3} \to -\infty$.
Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Por otro lado:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^-+}\right)\text{”} = +\infty.$$

Puesto que $x \to 0^+$, entonces $x > 0$ y $(x+1) \to 1 > 0$.
Como $x^3 > 0$ y como $(x+1) > 0$, entonces $\dfrac{x+1}{x^3} > 0$, lo que $\dfrac{x+1}{x^3} \to +\infty$.
Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

De lo anterior se desprende que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical y que además es la única.
Ahora bien,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 0 \ \& \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0.$$

Luego entonces, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal y además es la única pues

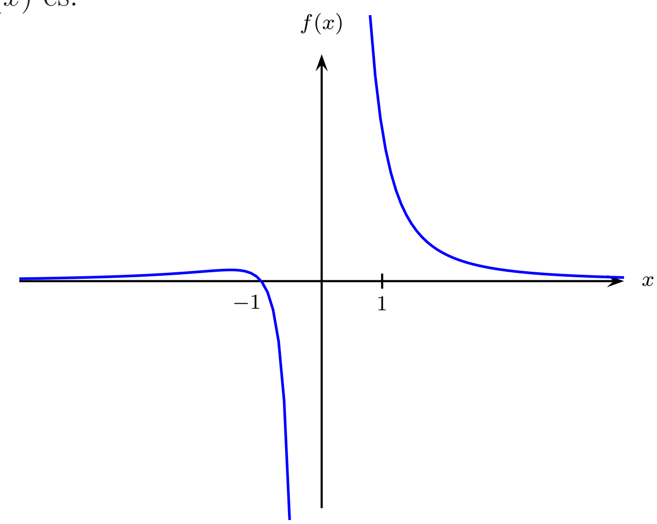
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x \times x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x^2} = \text{“}\left(\frac{1}{+\infty}\right)\text{”} = 0.$$

$\square$

(d) Rango y gráfica

▼ El rango de f es todo $\mathbb{R}$.

La gráfica de la función $f(x)$ es:



$\square$

(C) Tercer parcial

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, determine:

(a) Dominio, raíces y paridad

▼ Dominio:

Por ser f una función racional, su dominio es

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Paridad:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \;\&$$

$$-f(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}.$$

Luego entonces, $f(-x) \neq f(x)$ & $f(-x) \neq -f(x)$.

Por lo tanto, la función $f(x)$ no es par ni tampoco es impar.

$\square$

(b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

▼ Derivamos:

$$f(x) = x^{-2} + x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} - 3x^{-4} = -\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) = -\frac{2x+3}{x^4}.$$

Aquí es importante observar que, para cada $x \neq 0$, se tiene que $x^4 > 0$. Por esto sucede que

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2x+3}{x^4} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x^4} < 0 \Leftrightarrow 2x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}\,;$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2x+3}{x^4} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x^4} > 0 \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}\,.$$

Por lo tanto, f es estrictamente creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$; es estrictamente decreciente en los intervalos $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(0, +\infty)$.

□

(c) Intervalos de concavidad hacia arriba, de concavidad hacia abajo y puntos de inflexión

▼ Segunda derivada:

$$f'(x) = -2x^{-3} - 3x^{-4} \Rightarrow f''(x) = 6x^{-4} + 12x^{-5} = \frac{6}{x^4} + \frac{12}{x^5} = \frac{6x+12}{x^5}\,.$$

Primero vemos que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x+12}{x^5} = 0 \Leftrightarrow 6x+12 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Considerando este número $x = -2$ y excluyendo a $x = 0$, generamos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ & $(0, +\infty)$, en los cuales veremos el signo de $f''(x)$.

Intervalo	Valor prueba	$f''(x) =$	f es cóncava hacia
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$\frac{2}{81} > 0$	arriba
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$-6 < 0$	abajo
$0 < x < +\infty$	$x = 2$	$\frac{3}{4} > 0$	arriba

Luego entonces, f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$.
Y es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-2, 0)$.

Existen cambios de concavidad en $x = -2$ y en $x = 0$, pero la función no es continua en $x = 0$. Entonces, sólo hay un punto de inflexión en $x = -2$.

□

(d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades

▼ Por ser una función racional, f es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Esto es, f es continua en el conjunto $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$.

La función f tiene una discontinuidad en $x = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$ & $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x^3} =$ "$\left(\frac{1}{0}\right)$" $= \infty$. Es decir, la discontinuidad es esencial; puede decirse también que la discontinuidad es infinita.

□

(e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

▼ Precisamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ determinando los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”}.$$

Puesto que $x \to 0^-$, entonces $x < 0$ & $(x+1) \to 1 > 0$.

Como $x^3 < 0$ & $(x+1) > 0$, entonces $\dfrac{x+1}{x^3} < 0$, por lo que $\dfrac{x+1}{x^3} \to -\infty$.
Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{”}.$$

Puesto que $x \to 0^+$, entonces $x > 0$ & $(x+1) \to 1 > 0$.
Como $x^3 > 0$ & $(x+1) > 0$, entonces $\dfrac{x+1}{x^3} > 0$, por lo que $\dfrac{x+1}{x^3} \to +\infty$.
Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

De lo anterior se desprende que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical y que además es la única.
Ahora bien,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 0 \ \& \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0.$$

Luego entonces, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal y además es la única.

$\square$

(f) Máximos y mínimos relativos y absolutos

▼ Vemos que:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x+3}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\,,$$

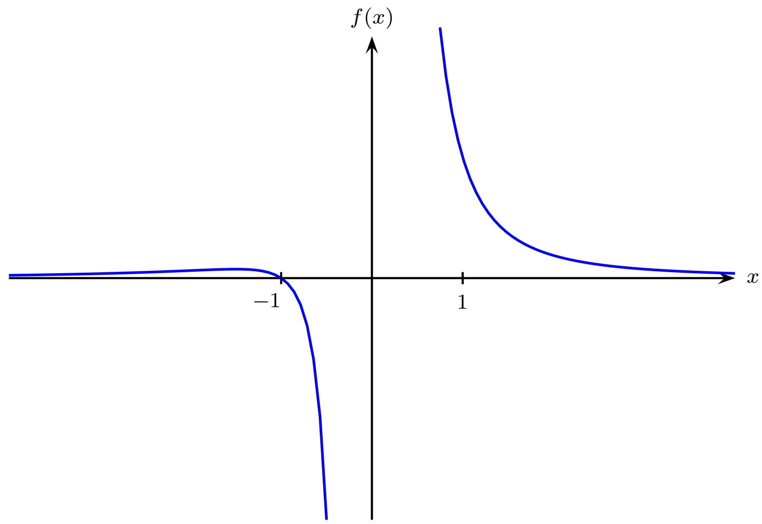
lo cual implica que f tiene un punto crítico en $x = -\dfrac{3}{2}$.
Por el inciso b) se sabe que f es creciente para $x < -\dfrac{3}{2}$ y decreciente para $x > -\dfrac{3}{2}$. Luego entonces, por el criterio de la primera derivada, f tiene en $x = -\dfrac{3}{2}$ un punto máximo local estricto.
La función f no tiene máximo ni mínimo absoluto, ya que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \ \& \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

$\square$

(g) Rango y esbozo gráfico

▼ Precisamos las coordenadas del punto de inflexión y del máximo local estricto.
Punto de inflexión $= I[-2, f(-2)] = I\left(-2, \dfrac{1}{8}\right)$.
Máximo local $= M\left[-\dfrac{3}{2}, f\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right] = M\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{27}\right)$. La gráfica de $f(x)$ es:



El rango de $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$.

$\square$

(2) Cuando un tanque esférico de radio a contiene líquido con una profundidad h, el volumen de este líquido está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h).$$

Suponga ahora que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando de agua a razón de $\frac{20}{3}$ l/s. Calcule la razón de cambio del nivel de agua cuando $h = 1.25$ m.

▼ Consideramos que en la fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h) = \pi h^2 a - \frac{1}{3}\pi h^3$$

tanto la profundidad h como el volumen V están en función del tiempo t.
Cuando $a = 5$ m $= 50$ dm, se tiene que

$$V = 50\pi h^2 - \frac{\pi}{3}h^3.$$

Derivando respecto a t se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = 100\pi h\frac{dh}{dt} - \pi h^2\frac{dh}{dt} = \pi h(100 - h)\frac{dh}{dt}\,,$$

donde $\frac{dV}{dt}$ es la rapidez de cambio del volumen y $\frac{dh}{dt}$ es la rapidez de cambio de la profundidad.
Cuando $\frac{dV}{dt} = \frac{20}{3}$ l/s $= \frac{20}{3}$ dm^3/s & $h = 1.25$ m $= 12.5$ dm, se tiene que

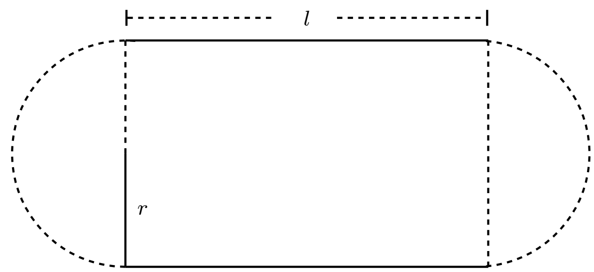
$$\frac{20}{3} = \pi(12.5)(100 - 12.5)\frac{dh}{dt} \Rightarrow \pi(12.5)(87.5)\frac{dh}{dt} = \frac{20}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1093.75\pi\frac{dh}{dt} = \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{3(1093.75)\pi} \approx 0.00194017 \text{ dm/s}.$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la profundidad es $\frac{dh}{dt} \approx 0.00194017$ dm/s.

$\square$

(3) Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 100 l en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

▼ Usamos la figura siguiente que es la de una sección vertical del tanque:



Considerando un cilindro circular recto de radio r y largo l, medidos ambos en decímetros (dm), el volumen de este tanque es

$$V = \pi r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3;$$

y debe ser $V = 10 \text{ l} = 10 \text{ dm}^3$; por lo cual se debe cumplir que

$$\pi r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10.$$

Minimizar la cantidad de metal es equivalente a minimizar el área superficial del tanque.
El área del tanque es

$$A = 2\pi r l + 4\pi r^2.$$

Se tiene entonces:

Una ecuación, $\pi r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10$.
Una función, $A = 2\pi r l + 4\pi r^2$.

De la ecuación se despeja a una de las variables (la que convenga) para luego sustituirla en la función. Conviene despejar l:

$$\pi r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10 \Rightarrow l = \frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo en A se obtiene

$$A = 2\pi r l + 4\pi r^2 = 2\pi r \left(\frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}\right) + 4\pi r^2 =$$

$$= \frac{2}{r}\left(10 - \frac{4}{3}\pi r^3\right) + 4\pi r^2 = \frac{20}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 + 4\pi r^2$$

$$A(r) = \frac{20}{r} + \frac{4}{3}\pi r^2,$$

que es la función a minimizar:

$$A'(r) = -\frac{20}{r^2} + \frac{8}{3}\pi r$$
$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{20}{r^2} + \frac{8}{3}\pi r = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}\pi r = \frac{20}{r^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{60}{8\pi} = \frac{15}{2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}} \approx 1.3365.$$

Luego entonces, la función $A(r)$ tiene un punto crítico en $r_1 \approx 1.3365$:

$$A''(r) = \frac{40}{r^3} + \frac{8}{3}\pi > 0.$$

Se tiene un mínimo local estricto.
Por lo tanto, las dimensiones del tanque que minimizan el área son:

$$r = 1.3365 \ \&$$
$$l = \frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{10 - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{15}{2\pi}\right)}{\pi(1.3365)^2} = \frac{10 - 10}{\pi(1.3365)^2} = 0.$$

Es decir, el tanque debe ser una esfera de radio $r_1 = 1.3365$ dm.

□

(4) Muestre que las rectas tangentes a la elipse

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

en los puntos $(1, -1)$ & $(-1, 1)$ son paralelas.

▼ Suponemos que en la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ se tiene implícitamente definida a la variable y como función de la variable x.
Derivamos implícitamente con respecto a x en toda la ecuación y se obtiene:

$$\frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - x) = y - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}.$$

Valuando la derivada $\frac{dy}{dx}$ en el punto $A(1, -1)$ se obtiene

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_A = \frac{-1 - 2(1)}{2(-1) - 1} = \frac{-1 - 2}{-2 - 1} = \frac{-3}{-3} = 1 = m_A,$$

que es la pendiente de la recta tangente T_A a la curva en el punto A.

Valuando la derivada $\frac{dy}{dx}$ en el punto $B(-1,1)$, se obtiene

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_B = \frac{1-2(-1)}{2(1)-(-1)} = \frac{1+2}{2+1} = \frac{3}{3} = 1 = m_B,$$

que es la pendiente de la recta tangente T_B a la curva en el punto B.

Ya que $m_A = m_B$, entonces las rectas tangentes T_A y T_B son paralelas.

$\square$