CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E1800

(1) Para las funciones $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ & $g(x) = \sqrt{1+2x}$,

determinar $f+g$, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$ y sus respectivos dominios.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}$.

(4) (a) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $3x^2+5y^2-3x^2y^2=11$, en el punto $(1,2)$.

(b) Calcular $H'(1)$ si $H(y) = \sqrt{4y^2+12} - \dfrac{y+1}{\sqrt{9y}}$.

(5) Para la función

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$$

(a) Encontrar el dominio y raíces de la función
(b) Encontrar los intervalos en los cuales f es creciente o bien decreciente
(c) Halle los valores máximos y mínimos locales de f
(d) Encuentre los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo
(e) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales
(f) Bosquejar la gráfica de la función

(6) ¿Qué dimensiones debe poseer una caja sin tapa, de base cuadrada, si su volumen es $V = 300$ cm^3 y se construye con la menor cantidad de material posible?

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Para las funciones $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ & $g(x)=\sqrt{1+2x}$,

determinar $f+g$, $\dfrac{f}{g}$, $f\circ g$, $g\circ f$ y sus respectivos dominios.

▼ Para el domino de $f(x)$

$$D_f=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;2x-1\neq 0\,\right\}=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;2x\neq 1\,\right\}=$$
$$=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x\neq\frac{1}{2}\,\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

y para el dominio de $g(x)$

$$D_g=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;1+2x\geq 0\,\right\}=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;2x\geq -1\,\right\}=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x\geq-\frac{1}{2}\,\right\}=$$
$$=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$$

luego, la función suma es

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{2x-1}+\sqrt{1+2x}$$

y su dominio,

$$D_{f+g}=D_f\bigcap D_g=\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)\bigcap\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)-\left\{\frac{1}{2}\right\}=$$
$$=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1}{2},+\infty\right).$$

Por otro lado, la función cociente es

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{(2x-1)\sqrt{1+2x}}$$

y su dominio,

$$D_{\frac{f}{g}}=\left\{\,x\in\left(D_f\bigcap D_g\right)-\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;g(x)=0\,\right\}\,\right\}=$$
$$=\left\{\,x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)-\left\{\frac{1}{2}\right\}-\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;1+2x=0\,\right\}\,\right\}=$$
$$=\left\{\,x\in\left(\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)-\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x=-\frac{1}{2}\,\right\}\,\right\}=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)-\left\{\frac{1}{2}\right\}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1}{2},+\infty\right),$$

mientras que, la composición es

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sqrt{1+2x})=\frac{1}{2\sqrt{1+2x}-1}$$

y su dominio,

$$
\begin{aligned}
D_{f\circ g} &= \left\{\, x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \,\right\} = \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, \sqrt{1+2x} \neq \frac{1}{2} \right\} = \\
&= \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, 1+2x \neq \frac{1}{4} \right\} = \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, 2x \neq \frac{1}{4} - 1 \right\} = \\
&= \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, x \neq \frac{-\frac{3}{4}}{2} \right\} = \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, x \neq -\frac{3}{8} \right\} = \\
&= \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{8}, +\infty\right).
\end{aligned}
$$

Por útimo, la otra composición es

$$
(g\circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{1 + 2\frac{1}{2x-1}} = \sqrt{\frac{2x-1+2}{2x-1}} = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}
$$

y su dominio,

$$
D_{g\circ f} = \left\{\, x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \,\right\} = \left\{ x \neq \frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2x-1} \geq -\frac{1}{2} \right\}.
$$

La desigualdad $\dfrac{1}{2x-1} \geq -\dfrac{1}{2}$ equivale a

$$
\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2+2x-1}{2(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{4x-2} \geq 0.
$$

Y esta última se cumple si

$$
\begin{array}{ccc}
2x+1 \geq 0 \;\&\; 4x-2 > 0 & \text{o bien} & 2x+1 \leq 0 \;\&\; 4x-2 < 0; \\[1ex]
2x \geq -1 \;\&\; 4x > 2 & \text{o bien} & 2x \leq -1 \;\&\; 4x < 2; \\[1ex]
x \geq -\dfrac{1}{2} \;\&\; x > \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} & \text{o bien} & x \leq -\dfrac{1}{2} \;\&\; x < \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}; \\
x \in \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \bigcap \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) & \text{o bien} & x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \bigcap \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right); \\
x \in \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) & & x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right];
\end{array}
$$

luego entonces comprobamos que

$$
D_{g\circ f} = \left\{ x \neq \frac{1}{2} \,\middle|\, x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).
$$

$\square$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$.

▼ Racionalicemos el numerador multiplicando a él y al denominador por el binomio conjugado de $\sqrt{2+x}-\sqrt{2}$ que es $\sqrt{2+x}+\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})x}=\frac{2+x-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}};\ \text{si } x\neq 0.$$

Luego entonces,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

□

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}$.

▼ Tanto $\sqrt{x^2+5}+5x$ como $23x+4$ tienden a $+\infty$ cuando $x\to+\infty$, pero observemos que

$$\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}+5x}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)}=\frac{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5x}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)}\,.$$

Como $|\,x\,|=x$ si $x\geq 0$, que es el caso, pues hacemos tender a x a $+\infty$, tenemos que

$$\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}=\frac{x\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5x}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)}=\frac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5\right)}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5}{23+\dfrac{4}{x}}$$

y por último, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5}{23+\dfrac{4}{x}}=\frac{\sqrt{1+0}+5}{23+0}=\frac{\sqrt{1}+5}{23}=\frac{1+5}{23}=\frac{6}{23}\,.$$

□

(4) (a) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $3x^2+5y^2-3x^2y^2=11$, en el punto $(1,2)$.

▼ El punto sí pertenece a la gráfica de la función, pues sus coordenadas $x=1$, $y=2$ satisfacen la ecuación ya que

$$3(1)^2+5(2)^2-3(1)^2(2)^2=(3\times 1)+(5\times 4)-(3\times 1\times 4)=3+20-12=11.$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada, por lo que derivamos implícitamente con respecto a x, obteniendo:

$$6x+10yy'-6xy^2-6x^2yy'=0\Rightarrow(10y-6x^2y)y'=-6x+6xy^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{6xy^2-6x}{10y-6x^2y}=\frac{3xy^2-3x}{5y-3x^2y}\,.$$

En particular, en el punto $(1,2)$ la derivada vale

$$y'(1,2) = \frac{3\times 1(2)^2 - 3\times 1}{5\times 2 - 3(1)^2 2} = \frac{3\times 4 - 3}{10-6} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

y la ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = \frac{9}{4}(x-1) \Rightarrow y = \frac{9}{4}x - \frac{9}{4} + 2 \Rightarrow y = \frac{9}{4}x - \frac{9-8}{4} \Rightarrow y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4}\,.$$

□

(b) Calcular $H'(1)$ si $H(y) = \sqrt{4y^2+12} - \dfrac{y+1}{\sqrt{9y}}$.

▼ Derivamos:

$$H'(y) = \frac{8y}{2\sqrt{4y^2+12}} - \frac{\sqrt{9y} - \dfrac{(y+1)9}{2\sqrt{9y}}}{9y} = \frac{4y}{2\sqrt{y^2+3}} - \frac{2(9y)-9(y+1)}{18y\sqrt{9y}} =$$
$$= \frac{2y}{\sqrt{y^2+3}} - \frac{18y-9y-9}{18y3\sqrt{y}} = \frac{2y}{\sqrt{y^2+3}} - \frac{y-1}{6y\sqrt{y}}\,.$$

Por lo que $H'(1) = \dfrac{2(1)}{\sqrt{(1)^2+3}} - \dfrac{1-1}{6(1)\sqrt{1}} = \dfrac{2}{2} = 1.$

□

(5) Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$,

(a) Encontrar el dominio y raíces de la función.

▼ Vemos que, para el dominio

$$D_f = \left\{\, x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x^2-4\neq 0 \,\right\} = \left\{\, x\in\mathbb{R} \,\middle|\, (x+2)(x-2)\neq 0 \,\right\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{-2,+2\}$$

Raíz: $x = 0$, para la que $2x^2 = 0$

(b) Encontrar los intervalos en los cuales f es creciente o bien decreciente.

▼ Calculemos la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-4) - 2x^2\times 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

Luego $f'(x) > 0$ si $x < 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty,-2)$ y en $(-2,0)$
Y $f'(x) < 0$ si $x > 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(0,2)$ y en $(2,+\infty)$.

(c) Halle los valores máximos y mínimos locales de f.

▼ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ $f(x)$ tiene un máximo local, pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente.
El máximo local es $f(0) = 0$.

(d) Encuentre los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.

▼ Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{-16(x^2-4)^2 + 16x\times 2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \frac{-16(x^2-4) + 64x^2}{(x^2-4)^3} =$$
$$= \frac{-16x^2 + 64 + 64x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{48x^2+64}{(x^2-4)^3} = \frac{16(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

El signo de la segunda derivada nos lo da $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Luego

	Signo de				
Intervalo	$x+2$	$x-2$	x^2-4	$f''(x)$	$f(x)$ es cóncava hacia
$x < -2\,(< 2)$	$-$	$-$	$+$	$+$	arriba
$-2 < x < 2$	$+$	$-$	$-$	$-$	abajo
$(-2 <)\,2 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	arriba

(e) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.

▼ Las asíntotas verticales son $x = 2$ y $x = -2$ pues

$$\lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to 2^{\mp}} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = \mp\infty$$

Ya que $\lim\limits_{x\to 2^{\mp}} (x+2) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2^{\mp}} (x-2) = 0^{\mp}$ y $\lim\limits_{x\to 2^{\mp}} [(x+2)(x-2)] = 0^{\mp}$

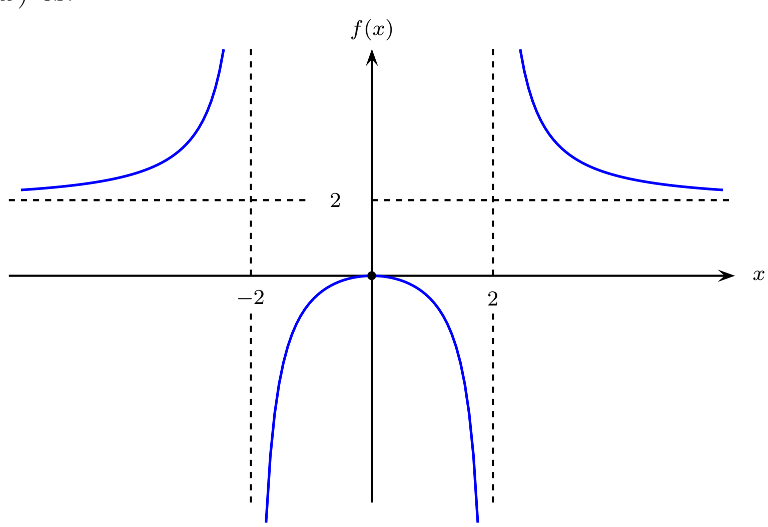
Por lo que la función no tiene valores extremos absolutos.
Y la función es par.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{2}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

Luego $y = 2$ es asíntota vertical.

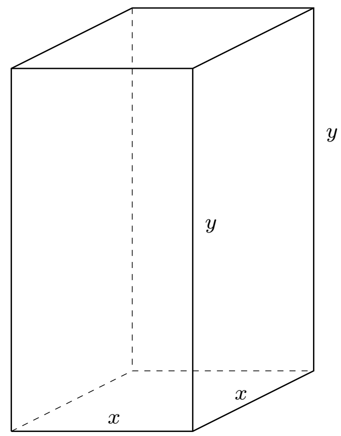
(f) Bosquejar la gráfica de la función.

▼ La gráfica es de $f(x)$ es:



(6) ¿Qué dimensiones debe poseer una caja sin tapa, de base cuadrada, si su volumen es $V = 300$ cm^3 y se construye con la menor cantidad de material posible?

▼ Dibujemos la figura de la caja con esas características:



Sabemos que el volumen de la caja es

$$V = x^2 h.$$

Y que debe ser 300 cm^3, luego

$$x^2 h = 300.$$

La cantidad de material que usamos es el área de la caja

$$A = x^2 + 4xh.$$

Esta función es de dos variables x, h, pero si de la expresión del volumen despejamos por ejemplo $h = \dfrac{300}{x^2}$ y la sustituimos en la expresión del área, se obtiene

$$A = x^2 + 4x \times \frac{300}{x^2} = x^2 + \frac{1200}{x};$$

la tenemos expresada como función de una sola variable: x. Su derivada es

$$[A(x)]' = 2x - \frac{1200}{x^2}$$

y su punto crítico se obtiene cuando

$$[A(x)]' = 2x - \frac{1200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{1200}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1200}{2} = 600 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{600} \approx 8.4343266.$$

Como $A''(x) = 2 + \dfrac{2 \times 1200}{x^3} > 0$ para $x > 0$, se trata de un mínimo, efectivamente; entonces,

$$h = \frac{300}{600^{2/3}} = \frac{1}{2} \times \frac{600}{600^{2/3}} = \frac{600^{1/3}}{2} = \frac{x}{2}\,.$$

Estarás de acuerdo en que estas dimensiones óptimas de la caja no son usuales en el mercado.

$\square$