CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E1900

(A) Primer parcial

(1) $\left| \dfrac{x - 68.5}{2.7} \right| \le 1\,.$

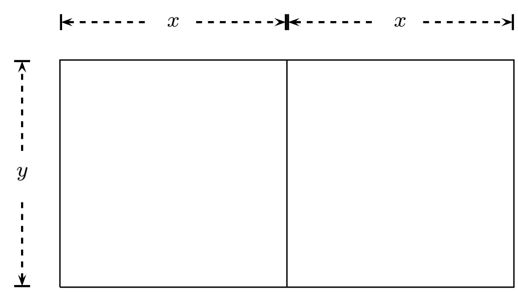
(2) Para las funciones $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ & $g(x) = \sqrt{1+2x}$,

determinar $f+g$, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$ y sus respectivos dominios.

(3) Graficar la siguiente función

$$G(z) = \begin{cases} 2z^2 - 1 & \text{si } -2 \le z \le 2; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } z > 2; \\ -2z + 4 & \text{si } z < -2. \end{cases}$$

(4) Un granjero dispone de 200 m de valla para cercar dos corrales adyacentes (véase figura). Expresar el área A encerrada como función de x



(B) Segundo parcial

(1) Hallar los valores para las constantes a, b de modo que la siguiente función sea continua en todos los reales

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1; \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3; \\ -2 & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de $f(x)$ con los valores obtenidos.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}\,.$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5} + 5x}{23x + 4}\,.$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(4) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = 4x - x^2$$

en el punto $(1, 3)$. Obtener la derivada por medio de la definición.

(5) Sea la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - 16}{x^2 + x - 12}$, proporcionar
   (a) Dominio y raíces de la función. Puntos de discontinuidad y su clasificación
   (b) Asíntotas verticales y horizontales
   (c) Esbozo de la gráfica

(C) Tercer parcial

(1) (a) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $3x^2 + 5y^2 - 3x^2y^2 = 11$, en el punto $(1, 2)$.
   (b) Calcular $H'(1)$ si $H(y) = \sqrt{4y^2 + 12} - \dfrac{y+1}{\sqrt{9y}}$.

(2) Una escalera de 3 m de longitud está apoyada contra una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera resbala alejándose de la pared a una velocidad de 1 m/s, ¿con qué rapidez resbala hacia abajo su extremo superior cuando su extremo inferior está a 1.3 m de la pared?

(3) Para la función $h(x) = x^4 - 8x^2 + 18$,
   (a) Encontrar los intervalos en los cuales f es creciente o bien decreciente
   (b) Halle los valores máximos y mínimos locales de f
   (c) Encuentre los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Encuentre los puntos de inflexión
   (d) Bosquejar la gráfica de la función

(4) ¿Qué dimensiones debe poseer una caja sin tapa, de base cuadrada, si su volumen es $V = 300$ cm^3 y se construye con la menor cantidad de material posible?

Respuestas

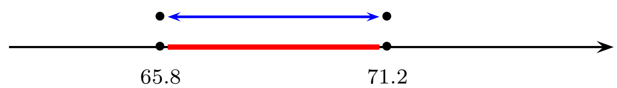
(A) Primer parcial

(1) $\left|\dfrac{x-68.5}{2.7}\right| \le 1\,.$

▼ Esta desigualdad equivale a

$$-1 \le \frac{x-68.5}{2.7} \le 1 \Leftrightarrow -2.7 \le x-68.5 \le 2.7 \Leftrightarrow 65.8 \le x \le 71.2\,.$$

Luego el conjunto solución es $[65.8, 71.2]$.



(2) Para las funciones $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ & $g(x) = \sqrt{1+2x}$,

determinar $f+g$, $\dfrac{f}{g}$, $f\circ g$, $g\circ f$ y sus respectivos dominios.

▼ Para el domino de $f(x)$

$$D_f = \left\{\, x\in\mathbb{R} \;\middle|\; 2x-1 \ne 0 \,\right\} = \left\{\, x\in\mathbb{R} \;\middle|\; 2x \ne 1 \,\right\} =$$
$$= \left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; x \ne \frac{1}{2} \right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

y para el dominio de $g(x)$

$$D_g = \left\{\, x\in\mathbb{R} \;\middle|\; 1+2x \ge 0 \,\right\} = \left\{\, x\in\mathbb{R} \;\middle|\; 2x \ge -1 \,\right\} = \left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; x \ge -\frac{1}{2} \right\} =$$
$$= \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

luego, la función suma es

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{2x-1} + \sqrt{1+2x}$$

y su dominio,

$$D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = \left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \bigcap \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\} =$$
$$= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Por otro lado, la función cociente es

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(2x-1)\sqrt{1+2x}}$$

y su dominio,

$$
\begin{aligned}
D_{\frac{f}{g}} &= \left\{ x \in (D_f \bigcap D_g) - \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0 \} \right\} = \\
&= \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\} - \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 + 2x = 0 \} \right\} = \\
&= \left\{ x \in \left(\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = -\frac{1}{2} \right\} \right\} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\} = \\
&= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right),
\end{aligned}
$$

mientras que, la composición es

$$
(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{1+2x}) = \frac{1}{2\sqrt{1+2x} - 1}
$$

y su dominio,

$$
\begin{aligned}
D_{f \circ g} &= \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \} = \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, \sqrt{1+2x} \neq \frac{1}{2} \right\} = \\
&= \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, 1 + 2x \neq \frac{1}{4} \right\} = \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, 2x \neq \frac{1}{4} - 1 \right\} = \\
&= \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, x \neq \frac{-\frac{3}{4}}{2} \right\} = \left\{ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \,\middle|\, x \neq -\frac{3}{8} \right\} = \\
&= \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{8}, +\infty\right).
\end{aligned}
$$

Por útimo, la otra composición es

$$
(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{1 + 2\frac{1}{2x-1}} = \sqrt{\frac{2x - 1 + 2}{2x - 1}} = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}
$$

y su dominio,

$$
D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \} = \left\{ x \neq \frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2x-1} \geq -\frac{1}{2} \right\}.
$$

La desigualdad $\dfrac{1}{2x-1} \geq -\dfrac{1}{2}$ equivale a

$$
\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 + 2x - 1}{2(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{4x-2} \geq 0.
$$

Y esta última se cumple si

$$2x+1 \ge 0 \ \& \ 4x-2>0 \quad \text{o bien} \quad 2x+1 \le 0 \ \& \ 4x-2<0;$$

$$2x \ge -1 \ \& \ 4x>2 \quad \text{o bien} \quad 2x \le -1 \ \& \ 4x<2;$$

$$x \ge -\frac{1}{2} \ \& \ x>\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad \text{o bien} \quad x \le -\frac{1}{2} \ \& \ x<\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2},+\infty\right) \bigcap \left(\frac{1}{2},+\infty\right) \quad \text{o bien} \quad x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right] \bigcap \left(-\infty,\frac{1}{2}\right);$$

$$x \in \left(\frac{1}{2},+\infty\right) \qquad x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right];$$

luego entonces comprobamos que

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \ne \frac{1}{2} \,\middle|\, x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2},+\infty\right) \right\} = \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2},+\infty\right).$$

□

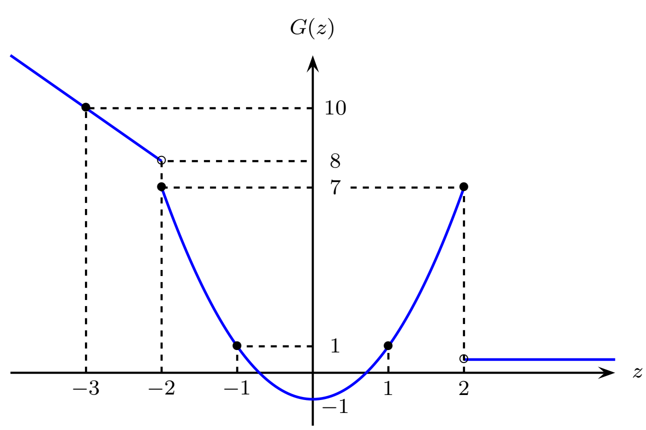
(3) Graficar la siguiente función

$$G(z) = \begin{cases} 2z^2-1 & \text{si } -2 \le z \le 2; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } z>2; \\ -2z+4 & \text{si } z<-2. \end{cases}$$

▼ Al tabular tenemos que

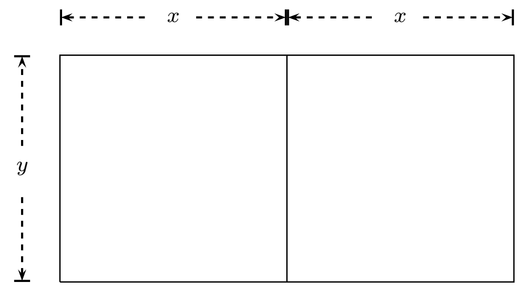
$$G(-3)=10, \quad G(-2^-)=8, \ G(-2)=7, \quad G(-1)=1,$$
$$G(0)=-1, \qquad G(1)=1, \qquad G(2^+)=\frac{1}{2}.$$

La gráfica de esa función $G(z)$ es



□

(4) Un granjero dispone de 200 m de valla para cercar dos corrales adyacentes (véase figura). Expresar el área A encerrada como función de x



▼ Por un lado el perímetro es $P = 4x + 3y = 200$, por lo que

$$y = \frac{200 - 4x}{3}\,.$$

El área total es: $A_{\square} = 2xy$. Si sustituimos y por $\dfrac{200 - 4x}{3}$ tenemos al área expresada como función de x:

$$A_{\square}(x) = 2x\left(\frac{200 - 4x}{3}\right) = \frac{2x(200 - 4x)}{3}\,.$$

□

(B) Segundo parcial

(1) Hallar los valores para las constantes a, b de modo que la siguiente función sea continua en todos los reales

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1; \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3; \\ -2 & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de $f(x)$ con los valores obtenidos.

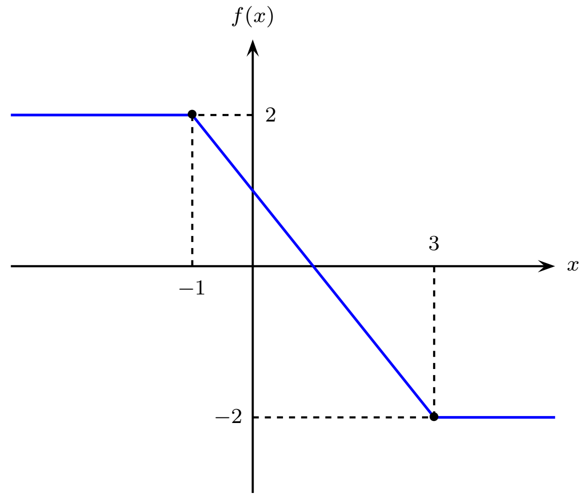
▼ En los puntos donde $f(x)$ podría no ser continua es en $x = -1$ y en $x = 3$, donde las tres partes de rectas que componen a la gráfica de f no coincidiesen, luego entonces, tenemos que obligar a que ése no sea el caso, esto es, que $f(x)$ sea continua en ellos; para esto tenemos que hacer que sean iguales:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 2 = f(-1); \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (ax + b) = a(-1) + b = -a + b;$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (ax + b) = 3a + b; \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (-2) = -2 = f(3).$$

Como se tienen que cumplir simultáneamente ambas condiciones, se tiene que cumplir el sistema

$$\begin{cases} -a + b = 2; \\ 3a + b = -2. \end{cases}$$

Restando a la segunda la primera tenemos que $4a = -4 \Rightarrow a = -1$ y sustituyendo este valor en la primera, $1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$. La gráfica de la función $f(x)$ es:



Observemos que la recta $y = ax + b$ tiene que pasar por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -2)$, luego, su pendiente debe ser $m = \dfrac{-2-2}{3+1} = \dfrac{-4}{4} = -1$ y su ecuación entonces es:

$$y - 2 = -(x+1) \Rightarrow y = -x - 1 + 2 \Rightarrow y = -x + 1, \text{ es decir, } a = -1 \ \& \ b = 1.$$

□

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$.

▼ Racionalicemos el numerador multiplicando a él y al denominador por el binomio conjugado de $\sqrt{2+x} - \sqrt{2}$ que es $\sqrt{2+x} + \sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \frac{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})(\sqrt{2+x} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})x} = \frac{2 + x - 2}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} =$$
$$= \frac{x}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}}; \text{ si } x \neq 0.$$

Luego entonces,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} .$$

□

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5} + 5x}{23x + 4}$.

▼ Tanto $\sqrt{x^2+5} + 5x$ como $23x + 4$ tienden a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, pero observemos que

$$\frac{\sqrt{x^2+5} + 5x}{23x + 4} = \frac{\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{5}{x^2}\right)} + 5x}{x\left(23 + \dfrac{4}{x}\right)} = \frac{|\,x\,|\sqrt{1 + \dfrac{5}{x^2}} + 5x}{x\left(23 + \dfrac{4}{x}\right)} .$$

Como $|\,x\,| = x$ si $x \geq 0$, que es el caso, pues hacemos tender a x a $+\infty$, tenemos que

$$\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4} = \frac{x\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5x}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)} = \frac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5\right)}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5}{23+\dfrac{4}{x}}$$

y por último, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5}{23+\dfrac{4}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}+5}{23+0} = \frac{\sqrt{1}+5}{23} = \frac{1+5}{23} = \frac{6}{23}\,.$$

□

(4) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = 4x - x^2$$

en el punto $(1, 3)$. Obtener la derivada por medio de la definición.

▼ La pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en el punto; esto es

$$m = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{4x-x^2-3}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{-(x^2-4x+3)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to1}\frac{-(x-3)(x-1)}{x-1} = -\lim_{x\to1}(x-3) = -(1-3) = -(-2) = 2$$

y la ecuación de la recta tangente es entonces

$$y - 3 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 3 \Rightarrow y = 2x + 1.$$

□

(5) Sea la función

$$f(x) = \frac{2x^2+4x-16}{x^2+x-12}\,,$$

proporcionar:

(a) Dominio y raíces de la función. Puntos de discontinuidad y su clasificación

▼ Dominio:

$$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2+x-12 \neq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x+4)(x-3) \neq 0 \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq -4 \;\&\; x \neq 3 \,\right\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{\, -4, 3 \,\} = (-\infty, -4) \bigcup (-4, 3) \bigcup (3, +\infty)\,.$$

Raíces:

Las raíces de f son las que satisfacen:

$$\left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2x^2+4x-16 = 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2(x^2+2x-8) = 0 \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x+4)(x-2) = 0 \,\right\} = \{\, -4, 2 \,\}\,.$$

Pero como $-4 \notin D_f$, entonces la única raíz de f es $x = 2$.

Discontinuidades:

Como f es una función racional, es continua en su dominio, por lo que sus puntos de discontinuidad son $x = -4$ & $x = 3$.

Calculemos:

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{2(x+4)(x-2)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to -4} \frac{2(x-2)}{(x-3)} =$$
$$= \frac{2(-4-2)}{-4-3} = \frac{-12}{-7} = \frac{12}{7}\,.$$

Luego la discontinuidad en $x = -4$ es removible, no es esencial.

$$\lim_{x\to 3^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to 3^{\mp}} \frac{2(x-2)}{x-3} = \mp\infty.$$

Observemos que $2(x-2)$ es positiva para x "próximo" a 3 y el signo de $f(x)$ nos lo da $x-3$. Por lo que la discontinuidad en $x = 3$ es esencial: de hecho es infinita.

□

(b) Asíntotas verticales y horizontales

▼ Por lo que acabamos de ver, $x = 3$ es la única asíntota vertical.
Para determinar las asíntotas horizontales calculemos

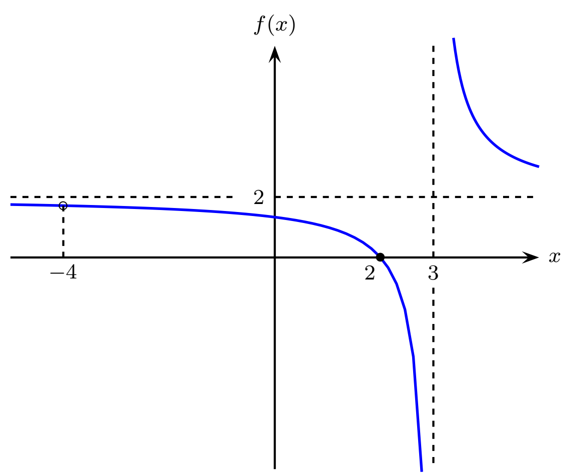
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+4x-16}{x^2+x-12} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{16}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{12}{x^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{16}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{12}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Por lo que la recta $y = 2$ es la única asíntota horizontal.

□

(c) Gráfica de la función $f(x)$

▼ Tabulamos $f(0) = \dfrac{4}{3}$. Y dibujamos la gráfica de la función $f(x)$:



□

(C) Tercer parcial

(1) (a) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $3x^2 + 5y^2 - 3x^2y^2 = 11$, en el punto $(1, 2)$.

▼ El punto sí pertenece a la gráfica de la función, pues sus coordenadas $x = 1$, $y = 2$ satisfacen la ecuación ya que

$$3(1)^2 + 5(2)^2 - 3(1)^2(2)^2 = (3 \times 1) + (5 \times 4) - (3 \times 1 \times 4) = 3 + 20 - 12 = 11.$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada, por lo que derivamos implícitamente con respecto a x, obteniendo:

$$6x + 10yy' - 6xy^2 - 6x^2yy' = 0 \Rightarrow (10y - 6x^2y)y' = -6x + 6xy^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \frac{6xy^2 - 6x}{10y - 6x^2y} = \frac{3xy^2 - 3x}{5y - 3x^2y}\,.$$

En particular, en el punto $(1, 2)$ la derivada vale

$$y'(1, 2) = \frac{3 \times 1(2)^2 - 3 \times 1}{5 \times 2 - 3(1)^2 2} = \frac{3 \times 4 - 3}{10 - 6} = \frac{12 - 3}{4} = \frac{9}{4}$$

y la ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = \frac{9}{4}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{9}{4}x - \frac{9}{4} + 2 \Rightarrow y = \frac{9}{4}x - \frac{9 - 8}{4} \Rightarrow y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4}\,.$$

□

(b) Calcular $H'(1)$ si $H(y) = \sqrt{4y^2 + 12} - \dfrac{y + 1}{\sqrt{9y}}\,.$

▼ Derivamos:

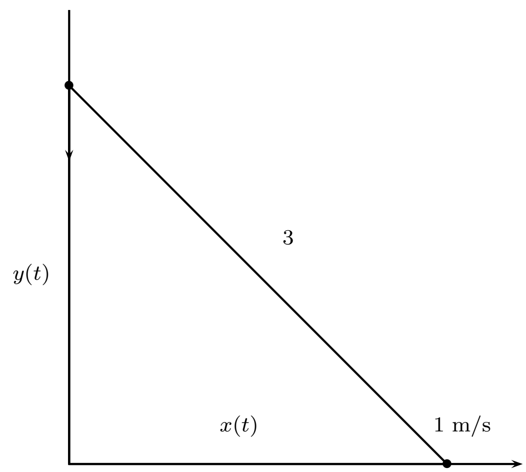
$$H'(y) = \frac{8y}{2\sqrt{4y^2 + 12}} - \frac{\sqrt{9y} - \dfrac{(y + 1)9}{2\sqrt{9y}}}{9y} = \frac{4y}{2\sqrt{y^2 + 3}} - \frac{2(9y) - 9(y + 1)}{18y\sqrt{9y}} =$$
$$= \frac{2y}{\sqrt{y^2 + 3}} - \frac{18y - 9y - 9}{18y3\sqrt{y}} = \frac{2y}{\sqrt{y^2 + 3}} - \frac{y - 1}{6y\sqrt{y}}\,.$$

Por lo que $H'(1) = \dfrac{2(1)}{\sqrt{(1)^2 + 3}} - \dfrac{1 - 1}{6(1)\sqrt{1}} = \dfrac{2}{2} = 1.$

□

(2) Una escalera de 3 m de longitud está apoyada contra una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera resbala alejándose de la pared a una velocidad de 1 m/s, ¿con qué rapidez resbala hacia abajo su extremo superior cuando su extremo inferior está a 1.3 m de la pared?

▼ Véamos la figura que corresponde a lo que se plantea:



Sabemos que $\dfrac{dx}{dt} = 1$ m/s y que $x^2(t) + y^2(t) = 9$, luego entonces,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\,\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\,\frac{dx}{dt}\,.$$

Cuando $x = 1.3$ m $\Rightarrow y = \sqrt{9 - 1.3^2} = \sqrt{9 - 1.69} = \sqrt{7.31} \approx 2.7037012$
y por lo tanto

$$\frac{dy}{dt} \approx -\frac{1.3}{2.7}(1) \approx -0.4808233 \text{ m/s.}$$

□

(3) Sea la función $h(x) = x^4 - 8x^2 + 18$.

(a) Encontrar los intervalos en los cuales f es creciente o bien decreciente

▼ Para ello calculamos su derivada

$$h'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x + 2)(x - 2)$$

y averiguamos su signo mediante la tabla siguiente

	Signo de				
Intervalo	$x+2$	x	$x-2$	$h'(x)$	$h(x)$ es
$x < -2(< 0 < 2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente
$-2 < x < 0(< 2)$	$+$	$-$	$-$	$+$	creciente
$(-2 <)0 < x < 2$	$+$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$(-2 < 0 <)2 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente

□

(b) Hallar los valores máximos y mínimos locales de f

▼ Los puntos críticos de la función son precisamente -2, 0 & 2.

En $x = -2$ la función tiene un mínimo local, pues la función ahí pasa de ser decreciente a ser creciente. Eso mismo ocurre en $x = 2$, comprobando que la función es par y el valor mínimo es

$$h(\pm 2) = (\pm 2)^4 - 8(\pm 2)^2 + 18 = 16 - 32 + 18 = 2.$$

En $x = 0$ la función vale $h(0) = 18$ y se trata de un máximo, pues ahí la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

$\square$

(c) Encontrar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo así como los puntos de inflexión

▼ Calculamos la segunda derivada de la función

$$h''(x) = [h'(x)]' = (4x^3 - 16x)' = 12x^2 - 16 =$$
$$= 12\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = 12\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Su signo nos lo da la tabla siguiente:

	Signo de			
Intervalo	$x + \frac{2}{\sqrt{3}}$	$x - \frac{2}{\sqrt{3}}$	$h''(x)$	$h(x)$ es cóncava hacia
$x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(< \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$-$	$-$	$+$	arriba
$-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$	$+$	$-$	$-$	abajo
$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} <\right) \frac{2}{\sqrt{3}} < x$	$+$	$+$	$+$	arriba

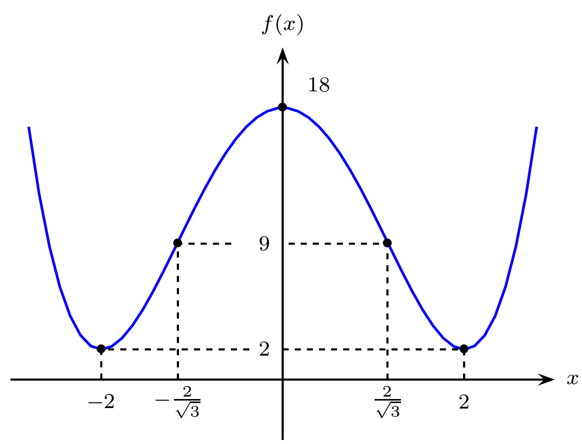
En $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y en $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ la función tiene sendos puntos de inflexión pues la curva cambia el sentido de su concavidad y es continua. Además

$$h\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 - 8\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 18 = \frac{16}{9} - \frac{32}{3} + 18 = \frac{16 - 96 + 162}{9} = \frac{82}{9} \approx 9.\widehat{1}.$$

$\square$

(d) Bosquejar la gráfica de la función

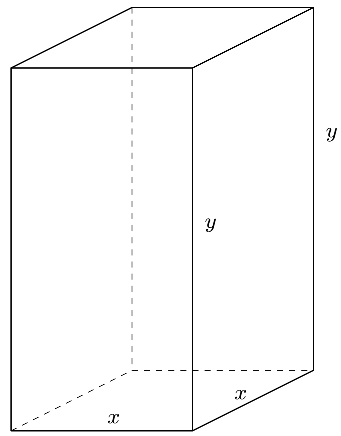
▼ Tenemos que $\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \pm 1.1547005$, por lo tanto, la gráfica de la función $h(x)$ es:



$\square$

(4) ¿Qué dimensiones debe poseer una caja sin tapa, de base cuadrada, si su volumen es $V = 300$ cm^3 y se construye con la menor cantidad de material posible?

▼ Dibujemos la figura de la caja con esas características:



Sabemos que el volumen de la caja es

$$V = x^2h.$$

Y que debe ser 300 cm^3, luego

$$x^2h = 300.$$

La cantidad de material que usamos es el área de la caja

$$A = x^2 + 4xh.$$

Esta función es de dos variables x, h, pero si de la expresión del volumen despejamos por ejemplo $h = \dfrac{300}{x^2}$ y la sustituimos en la expresión del área, se obtiene

$$A = x^2 + 4x \times \frac{300}{x^2} = x^2 + \frac{1200}{x};$$

la tenemos expresada como función de una sola variable: x. Su derivada es

$$[A(x)]' = 2x - \frac{1200}{x^2}$$

y su punto crítico se obtiene cuando

$$[A(x)]' = 2x - \frac{1200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{1200}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1200}{2} = 600 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{600} \approx 8.4343266.$$

Como $A''(x) = 2 + \dfrac{2 \times 1200}{x^3} > 0$ para $x > 0$, se trata de un mínimo, efectivamente; entonces,

$$h = \frac{300}{600^{2/3}} = \frac{1}{2} \times \frac{600}{600^{2/3}} = \frac{600^{1/3}}{2} = \frac{x}{2}\,.$$

Estarás de acuerdo en que estas dimensiones óptimas de la caja no son usuales en el mercado.

□