CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E0200, 12-12-2000

(A) Primer parcial

(1) Se lanza una pelota hacia arriba a una velocidad de 15 m/seg desde el borde de un acantilado a 135 m arriba del suelo. La altura de la pelota como función del tiempo está dada por

$$s(t) = -5t^2 + 15t + 135$$

(a) Determinar el dominio de la función
(b) ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a menos de 45 m del suelo?
(c) ¿Cuándo choca contra el suelo?

(2) Sean $f(x) = \sqrt{2x+3}$ y $g(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x^2 - 1}$
(a) Dominio y raíces de $f(x)$ y de $g(x)$
(b) $(g \circ f)(x)$ y su dominio

(3) Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \leq -1 \\ |\,3x - 4\,| & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad \& \quad g(x) = 2f(x+1) - 2,$$

determinar dominio, raíces, paridad, esbozo gráfico y rango de $f(x)$ y de $g(x)$.

(4) Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 45 cm, exprese su área (A) como función del ancho x de la misma.

(B) Segundo parcial

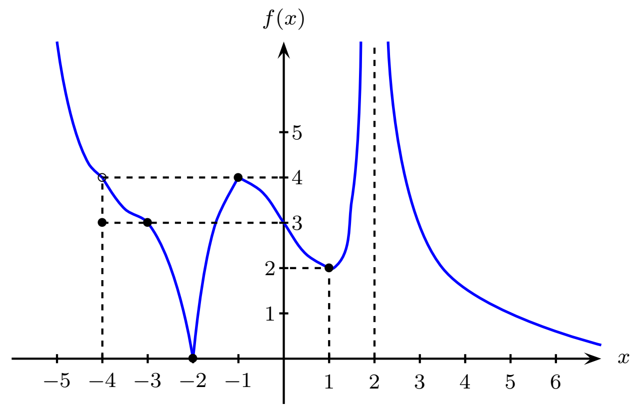
(1) Calcule los valores de a & b, que hacen de la siguiente función una función continua.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < -1; \\ a & \text{si } x = -1; \\ bx^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2\,. \end{cases}$$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{2x - \sqrt{-12x + 40}}{3x^2 + x - 14}$.

(3) A partir de la gráfica de f, determine
(a) Los puntos de discontinuidad y su clasificación
(b) Las ecuaciones de las asíntotas verticales y las ecuaciones de las asíntotas horizontales

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.



(4) La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}\,,$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.

(a) Si los cuerpos se están moviendo, encuentre $\dfrac{dF}{dr}$ y explique su significado

(b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esa fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

(5) Para la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}\,,$$

determine:

(a) Dominio, raíces y paridad

(b) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

(c) Discontinuidades y su clasificación

(d) Esbozo gráfico y rango.

(C) Tercer parcial

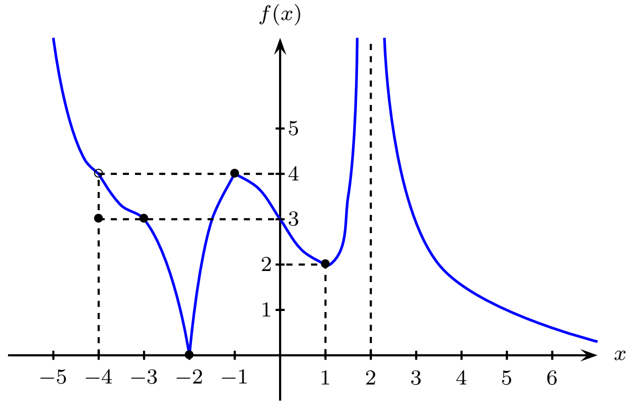
(1) Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia al oeste a 25 km/h ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles dos horas más tarde?

(2) Encuentre todos los puntos de la curva

$$x^2y^2 + xy = 2$$

donde la recta tangente es horizontal.

(3) A partir de la gráfica de f



Determine el conjunto de puntos del dominio de f que satisfacen:
 (a) $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$
 (b) $f'' > 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$
 (c) $f'(x)$ no existe

(4) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$, determine:
 (a) Dominio, raíces y paridad
 (b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
 (c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión
 (d) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales
 (e) Máximos y mínimos relativos y absolutos
 (f) Esbozo gráfico y rango

(5) Se va a construir un recipiente cilíndrico con capacidad de 2 litros. La superficie lateral será de cartón con base y tapa de metal. Si el cartón cuesta 2 pesos por metro cuadrado y la superficie metálica cuesta 5 pesos por metro cuadrado, calcular las dimensiones del cilindro que minimicen el costo del material de éste.

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) Se lanza una pelota hacia arriba a una velocidad de 15 m/s desde el borde de un acantilado a 135 m arriba del suelo. La altura de la pelota como función del tiempo está dada por

$$s(t) = -5t^2 + 15t + 135.$$

(a) ¿Cuándo choca contra el suelo?

▼ Tenemos que hallar t tal que

$$-5t^2 + 15t + 135 = 0 \text{ o bien } -5(t^2 - 3t - 27) = 0.$$

Esto es, resolver la ecuación

$$t^2 - 3t - 27 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 108}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{117}}{2}\,.$$

Como no debemos considerar tiempos negativos, pues el experimento se inicia para $t = 0$, la pelota llega al suelo cuando

$$t = \frac{3 + \sqrt{117}}{2} \approx 6.9083269\,.$$

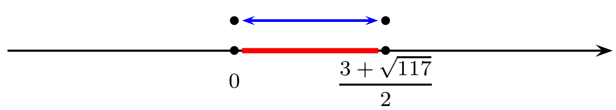
□

(b) Determinar el dominio de la función $s(t)$

▼ Dominio:

$$D_s = \left[0, \frac{3 + \sqrt{117}}{2}\right],$$

pues al llegar al suelo cesa el experimento.



□

(c) ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a menos de 45 m del suelo?

▼ Cuando

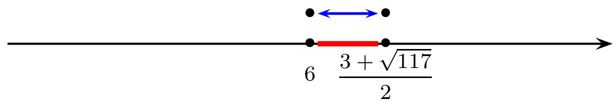
$$-5t^2 + 15t + 135 \leq 45 \Rightarrow -5t^2 + 15t + 90 \leq 0 \Rightarrow 5t^2 - 15t - 90 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5(t^2 - 3t - 18) \geq 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 18 = (t + 3)(t - 6) \geq 0.$$

Esta desigualdad de cumple si:

$$\begin{aligned} t + 3 \geq 0 \;\&\; t - 6 \geq 0 \quad &\text{o bien} \quad t + 3 \leq 0 \;\&\; t - 6 \leq 0;\\ t \geq -3 \;\&\; t \geq 6 \quad &\text{o bien} \quad t \leq -3 \;\&\; t \leq 6;\\ t \in [6, \infty) \quad &\text{o bien} \quad t \in (-\infty, -3]. \end{aligned}$$

Entonces, la pelota estará a menos de 45 m del suelo si

$$t \in \left[6, \frac{3 + \sqrt{117}}{2}\right] \approx [6, 6.9083269].$$



$\square$

(2) Sean $f(x) = \sqrt{2x+3}$ & $g(x) = \dfrac{2x^2-18}{x^2-1}$.

Determinar:

(a) Dominio y raíces de $f(x)$ y de $g(x)$

▼ Tenemos, primero los dominios:

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2x+3 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq -\tfrac{3}{2}\right\} = \left[-\tfrac{3}{2}, \infty\right];$$
$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2-1 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x+1)(x-1) \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}.$$

La raíz de $f(x)$ es $x = -\frac{3}{2}$.

Las raíces de $g(x)$ son las x tales que

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow |\,x\,| = 3 \Rightarrow x = \pm 3.$$

$\square$

(b) $(g \circ f)(x)$ y su dominio

▼ Calculamos

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{2x+3}) = \frac{2(\sqrt{2x+3})^2 - 18}{(\sqrt{2x+3})^2 - 1} =$$
$$= \frac{2(2x+3)-18}{2x+3-1} = \frac{4x-12}{2x+2} = \frac{2x-6}{x+1}.$$

El dominio:

$$D_{(g\circ f)} = \left\{\, x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in D_g \,\right\} = \left\{ x \in \left[-\tfrac{3}{2}, \infty\right) \;\middle|\; \sqrt{2x+3} \neq \pm 1 \right\},$$

pero

$$\sqrt{2x+3} \neq \pm 1 \Rightarrow 2x+3 \neq 1 \Rightarrow 2x \neq -2 \Rightarrow x \neq -1,$$

luego

$$D_{(g\circ f)} = \left[-\tfrac{3}{2}, \infty\right) - \{\, -1 \,\}.$$

$\square$

(3) Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \leq -1 \\ |\,3x-4\,| & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad \& \quad g(x) = 2f(x+1) - 2,$$

determinar dominio, raíces, paridad, esbozo gráfico y rango de $f(x)$ y de $g(x)$.

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} = D_g$.

Raíz de $f(x)$ es cuando $|\,3x-4\,| = 0$ únicamente, pues $\sqrt{3-x} = 0$ sólo si $x = 3$, pero $3 > -1$.

Luego, la única raíz real de $f(x)$ es $x = \frac{4}{3}$.

Las raíces de $g(x)$ son los x tales que

$$g(x) = 2f(x+1) - 2 = 0 \Rightarrow 2f(x+1) = 2 \Rightarrow f(x+1) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{3-x} = 1 \text{ si } 3 - x = 1 \Leftrightarrow x = 2, \text{ pero } 2 \not\leq -1\,.$$

Luego $f(x) = 1$ solamente si

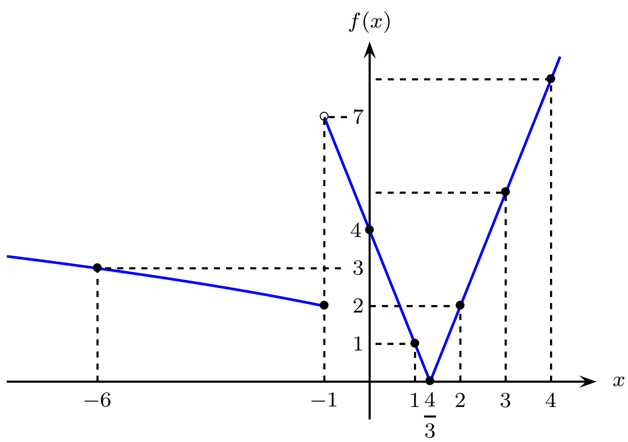
$$|\,3x-4\,| = 1 \Leftrightarrow 3x - 4 = \pm 1 \Leftrightarrow 3x = 4 \pm 1 \Leftrightarrow 3x = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \ \&\ x = 1.$$

Y como $f(x+1)$ se obtiene a partir de $f(x)$ desplazándose a la izquierda una unidad, los ceros de $g(x)$ son $0\,(= 1 - 1)$ & $\dfrac{2}{3}\left(= \dfrac{5}{3} - 1\right)$.

Paridad: ninguna de las dos son pares ni impares, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
f(-1) &= \sqrt{3-(-1)} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2\,;\\
f(1) &= |\,3 \times 1 - 4\,| = |\,3 - 4\,| = |\,-1\,| = 1\,;\\
g(-1) &= 2f(0) - 2 = 2 \times 4 - 2 = 8 - 2 = 6\,;\\
g(1) &= 2f(2) - 2 = 2 \times 2 - 2 = 4 - 2 = 2\,.
\end{aligned}$$

La gráfica de $f(x)$ es



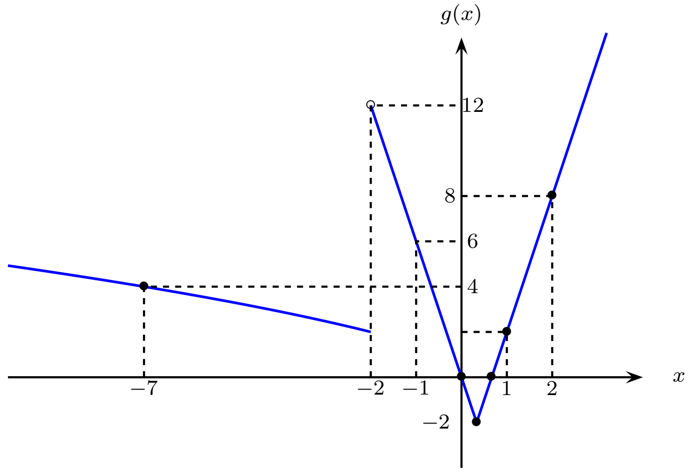
El rango de $f(x)$: $R_f = [0, \infty)$.

Como $g(x) = 2f(x+1) - 2 = 2[f(x+1) - 1]$, hay que trasladar a la gráfica de $f(x)$ una unidad a la izquierda, otra unidad hacia abajo y después dilatarla multiplicando el resultado por 2.

De hecho

$$g(-7) = 4\,,$$
$$g(-2^{\pm}) = \begin{cases} 12 \\ 2\,, \end{cases}$$
$$g(-1) = 6, g(0) = 0, g\left(\frac{1}{3}\right) = -2, g\left(\frac{2}{3}\right) = 0, g(2) = 8\,.$$

La gráfica de $g(x)$:

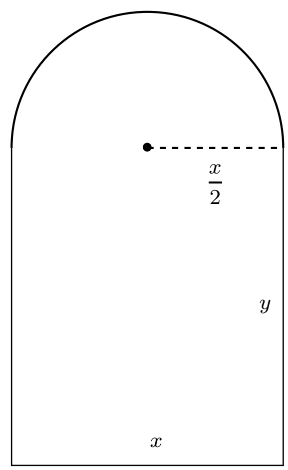


Rango de $g(x)$: $R_g = [-2, \infty)$.

□

(4) Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 45 cm, exprese su área (A) como función del ancho x de la misma.

▼ Primero un dibujo de la ventana:



El área A es la suma del área del rectángulo más la del semicírculo que tiene radio $\dfrac{x}{2}$, es decir,

$$A = xy + \pi\frac{x^2}{4}\frac{1}{2} = xy + \frac{\pi}{8}x^2 .$$

Pero además el perímetro de 45 es igual a

$$P = x + 2y + 2\pi\frac{x}{2}\frac{1}{2},$$

y así

$$P = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + 2y = 45,$$

y de aquí que

$$2y = 45 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x \Rightarrow y = \frac{45}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{2}.$$

Luego, sustituyendo este valor, nos queda A como función sólo de x:

$$A = x\left[22.5 - \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{2}\right] + \frac{\pi}{8}x^2 = 22.5x + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 =$$
$$= 22.5x - \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)x^2\,.$$

□

(B) Segundo parcial

(1) Calcule los valores de a & b, que hacen de la siguiente función una función continua.

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < -1; \\ a & \text{si } x = -1; \\ bx^2+1 & \text{si } -1 < x < 2\,. \end{cases}$$

▼ La función en -1 tiene que cumplir:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)\,.$$

Y de aquí:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)\,.$$

Pero, como

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -3-2 = -5\,,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = b+1\,,$$

y como

$$f(-1) = a\,,$$

entonces, para que exista límite en -1.

$$-5 = b+1 \Rightarrow b = -6\,,$$

y para que la función sea continua en -1:

$$a = -5\,.$$

□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14}$.

▼ Racionalizando el numerador tenemos:

$$\frac{2x-\sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14} = \frac{4x^2-(-12x+40)}{(3x^2+x-14)(2x+\sqrt{-12x+40})} =$$
$$= \frac{4x^2+12x-40}{(3x+7)(x-2)(2x+\sqrt{-12x+40})} = \frac{4(x^2+3x-10)}{(3x+7)(x-2)(2x+\sqrt{-12x+40})} =$$
$$= \frac{4(x+5)(x-2)}{(3x+7)(x-2)(2x+\sqrt{-12x+40})} = \frac{4(x+5)}{(3x+7)(2x+\sqrt{-12x+40})}\,,$$

si $x \neq 2$, para que $x-2 \neq 0$.

Aquí vemos que

$$3x^2+x-14=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+168}}{6}=\frac{-1+\sqrt{169}}{6}=\frac{-1\pm 13}{6}\Leftrightarrow$$
$$x=\begin{cases}2\\ \dfrac{-14}{6}=-\dfrac{7}{3}\,.\end{cases}$$

Por lo que

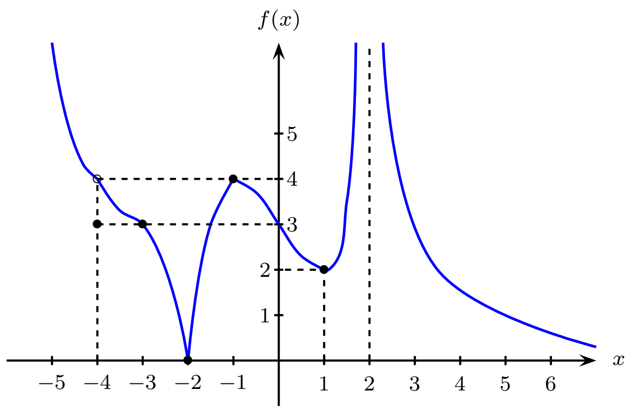
$$3x^2+x-14=3\left(x^2+\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}\right)=3\left(x+\frac{7}{3}\right)(x-2)=(3x+7)(x-2).$$

Por último

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x+5)}{(3x+7)(2x+\sqrt{-12x+40})}=$$
$$=\frac{4\times 7}{13\times 8}=\frac{7}{26}\,.$$

□

(3) A partir de la gráfica de $f(x)$,



determine:

(a) Los puntos de discontinuidad y su clasificación

▼ $f(x)$ tiene una discontinuidad removible en $x=-4$;

$f(x)$ es discontinua en $x=2$, donde tiene una discontinuidad infinita.

□

(b) Las ecuaciones de las asíntotas verticales y las ecuaciones de las asíntotas horizontales

▼ $x=2$ es la única asíntota vertical & $y=0$, la única asíntota horizontal.

□

(4) La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F=\frac{GmM}{r^2}\,,$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.

(a) Si los cuerpos se están moviendo, encuentre $\dfrac{dF}{dr}$, la razón de cambio instantánea de la fuerza F cuando cambia la distancia r entre los cuerpos.

▼ Calculamos:

$$\frac{dF}{dr} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{GmM}{(r+h)^2}-\dfrac{GmM}{r^2}}{h} = GmM\lim_{h\to 0}\left[\frac{r^2-(r+h)^2}{hr^2(r+h)^2}\right] =$$
$$= GmM\lim_{h\to 0}\left[\frac{-2rh-h^2}{hr^2(r+h)^2}\right] = GmM\lim_{h\to 0}\left[\frac{-2r-h}{r^2(r+h)^2}\right] =$$
$$= GmM\left[\frac{-2r}{r^4}\right] = -\frac{2GmM}{r^3}\,.$$

□

(b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae a un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esa fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

▼ Por un lado tenemos

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=20\,000} = -2\,,$$

y por otro

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=20\,000} = -\frac{2GmM}{(20\,000)^3}\,;$$

luego entonces,

$$-\frac{2GmM}{(20\,000)^3} = -2 \Rightarrow GmM = (20\,000)^3\,;$$

por lo que

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=10\,000} = \frac{-2\times(20\,000)^3}{(10\,000)^3} = -2\times 2^3 = -16\ \text{N/km}\,.$$

□

(5) Para la función

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}\,,$$

determine:

(a) Dominio, raíces y paridad

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{\,0\,\}$.

Raíces: $x = \pm 1$, que son las raíces de $x^2 - 1 = 0$.

Es impar, pues

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^3} = \frac{x^2-1}{-x^3} = -\frac{x^2-1}{x^3} = -f(x)\,.$$

□

(b) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

▼ $x = 0$ es asíntota vertical pues

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty\,;$$

$y = 0$ es asíntota horizontal pues

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 0\,.$$

□

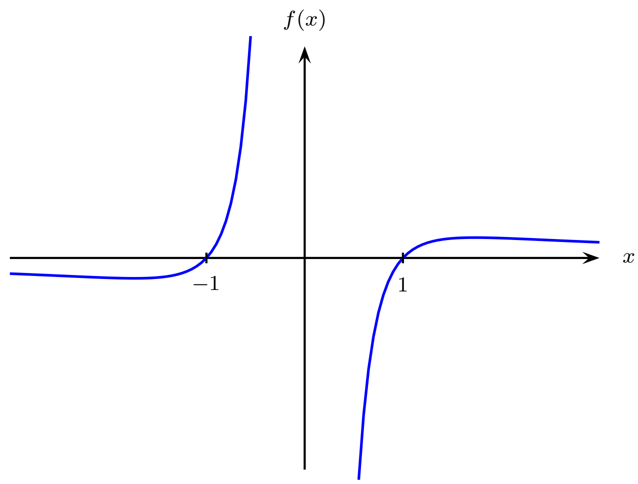
(c) Discontinuidades y su clasificación

▼ $f(x)$ es una función racional y por lo tanto es continua en su dominio. En $x = 0$ la discontinuidad es infinita por lo visto en lo anterior .

□

(d) Esbozo gráfico y rango

▼ Ésta es la gráfica de la función $f(x)$:



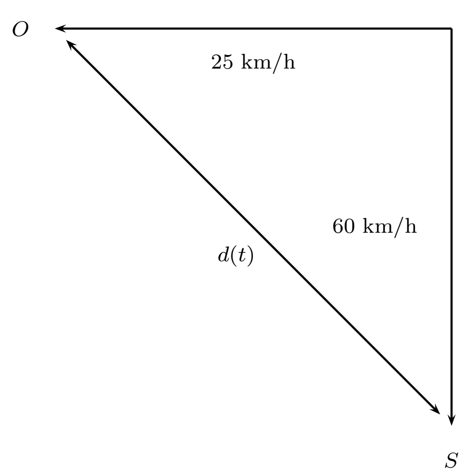
Rango: el rango de f es todo $\mathbb{R}$.

□

(C) Tercer parcial

(1) Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia al oeste a 25 km/h ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles dos horas más tarde?

▼ Usamos la siguiente gráfica



El espacio que recorre el autómovil que va hacia el sur (en km) es $60\,t$ con t en horas y el del otro automóvil es $25\,t$, por lo que, por el teorema de Pitágoras, la distancia entre ambos automóviles es

$$d(t) = \sqrt{(60t)^2 + (25t)^2} = \sqrt{3600t^2 + 625t^2} = \sqrt{4225}\,t = 65t \text{ km},$$

entonces,

$$\frac{d}{dt}d(t) = d'(t) = 65 \text{ km/h},$$

y en particular

$$\left.\frac{d}{dt}d(t)\right|_{t=2} = d'(t)|_{t=2} = 65 \text{ km/h}.$$

□

(2) Encuentre todos los puntos de la curva

$$x^2y^2 + xy = 2$$

donde la recta tangente es horizontal.

▼ Suponiendo que la curva es la gráfica de una función derivable $y = f(x)$, la cual está definida implícitamente, su derivada está dada por

$$\begin{aligned} 2xy^2 + 2x^2yy' + y + xy' = 0 \Rightarrow &\\ \Rightarrow (2x^2y + x)y' = -(2xy^2 + y) \Rightarrow &\\ \Rightarrow y' = -\frac{(2xy+1)y}{2x^2y + x}\,; & \end{aligned}$$

$$y' = 0 \text{ si } y = 0 \text{ o bien } 2xy + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2x}, x \neq 0\,.$$

Ahora bien, $y = 0$ no corta a la curva dada pues no existe x tal que $x^2 \times 0^2 + x \times 0 = 2$.
Veamos ahora si hay puntos de la curva tales que $y = -\dfrac{1}{2x}$; resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2y^2 + xy = 2; \\ y = -\dfrac{1}{2x}; \end{cases}$$

y sustituyendo el valor de $y = -\dfrac{1}{2x}$ en la primera ecuación (la que determina a la curva), tenemos que

$$\frac{x^2}{4x^2} + x\left(-\frac{1}{2x}\right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2\,.$$

Lo cual es absurdo, por lo que tal curva no tiene tangente horizontal.
Este resultado lo podemos comprobar pues podemos hallar explícitamente la función $y = f(x)$.
Despejando y de la ecuación

$$x^2y^2 + xy - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2x^2} = \frac{-x \pm 3x}{2x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} = x^{-1} \quad (x \neq 0) \\ -\dfrac{2}{x} = -2x^{-1}\,. \end{cases}$$

Entonces la derivada de cada una de las funciones $y = x^{-1}$ & $y = -2x^{-1}$, respectivamente, $y_1' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ & $y_2' = \dfrac{2}{x^2}$ nunca es 0, por lo que no tienen tangentes horizontales.

□

(3) (a) $f'(x) > 0,\ f'(x) < 0,\ f'(x) = 0$

▼ $f'(x) > 0$ para $x \in (-2, -1) \bigcup (1, 2)$;
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -4) \bigcup (-4, -3) \bigcup (-3, -2) \bigcup (-1, 1) \bigcup (2, +\infty)$;
$f'(x) = 0$ si $x = -3, -1$ o bien 1 .

□

(b) $f''(x) > 0,\ f''(x) < 0,\ f''(x) = 0$

▼ $f'' > 0$ si $x \in (-\infty, -4) \bigcup (-4, -3) \bigcup (0, 2) \bigcup (2, +\infty)$;
$f'' < 0$ si $x \in (-3, -2) \bigcup (-2, 0)$;
$f'' = 0$ si $x = -3$ o bien $x = 0$.

□

(c) $f'(x)$
▼ En $x = -4, -2$ & 2 no existe la derivada. □

(4) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$, determine:

(a) Dominio, raíces y paridad
▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.
Raíces: $x = \pm 1$.
La función es impar .

□

(b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
▼ Veamos el signo de la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^2(x^2 - 1)}{x^6} = \frac{2x^2 - 3x^2 + 3}{x^4} =$$
$$= \frac{3 - x^2}{x^4} > 0 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow |\, x \,| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \text{ con } (x \neq 0)\, .$$

Luego, $f(x)$ es creciente en $\big(-\sqrt{3}, 0\big)$ y en $\big(0, \sqrt{3}\big)$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3 - x^2}{x^4} < 0 \Leftrightarrow 3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow |\, x \,| > 3 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$ o bien $x < -\sqrt{3}$.

Entonces, $f(x)$ es decreciente en $\big(-\infty, -\sqrt{3}\big)$ y en $\big(\sqrt{3}, +\infty\big)$.

□

(c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión
▼ Calculemos la segunda derivada de $f(x)$

$$f'' = [f']' = \left(\frac{3 - x^2}{x^4}\right)' = \frac{-2x^5 - 4x^3(3 - x^2)}{x^8} = \frac{-2x^2 - 12 + 4x^2}{x^5} = \frac{2x^2 - 12}{x^5};$$

$f''(x) > 0$ si

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 - 12 > 0 \ \&\ x^5 > 0 & \text{o bien} & 2x^2 - 12 < 0 \ \&\ x^5 < 0; \\ x^2 > 6 \ \&\ x > 0 & \text{o bien} & x^2 < 6 \ \&\ x < 0; \\ |\, x \,| > \sqrt{6} \ \&\ x > 0 & \text{o bien} & |\, x \,| < \sqrt{6} \ \&\ x < 0; \\ x > \sqrt{6} & \text{o bien} & -\sqrt{6} < x < 0; \end{array}$$

$$x \in \big(-\sqrt{6}, 0\big) \bigcup \big(\sqrt{6}, +\infty\big)\, .$$

En ese intervalo, $f(x)$ es cóncava hacia arriba.

Y $f(x)$ será cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\sqrt{6}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{6}\right)$.
Los puntos de inflexión están donde $f''(x) = 0$, como observamos en

$$2x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}\,,$$

pues en ellos la segunda derivada cambia de signo y además la función es continua.

□

(d) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

▼ $x = 0$ es asíntota vertical & $y = 0$ es asíntota horizontal. □

(e) Máximos y mínimos relativos y absolutos

▼ Los puntos críticos están donde

$$f' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}\,.$$

En $x = -\sqrt{3}$ hay un mínimo relativo pues $f(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente.
En $x = \sqrt{3}$ hay un máximo relativo ya que $f(x)$ pasa de ser creciente a decreciente.
Debido a que $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty$, la función no tiene valores extremos absolutos.

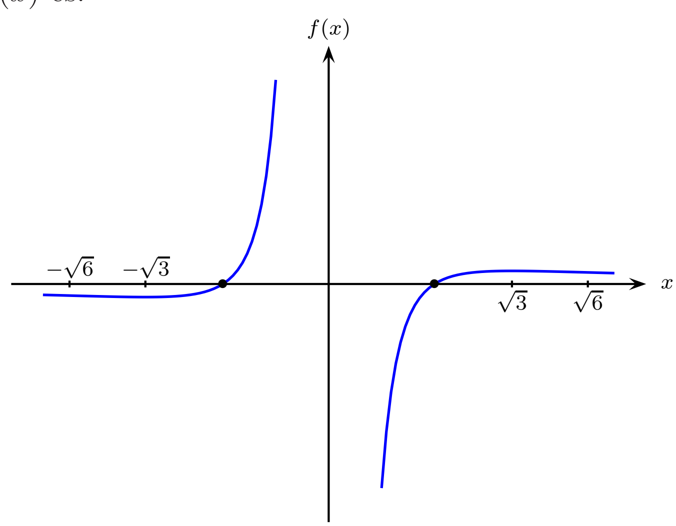
□

(f) Esbozo gráfico y rango

▼ Calculamos los siguientes valores

$$f(\pm\sqrt{3}) = \frac{2}{\pm\sqrt{3}^{\,3}} = \pm\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}} \approx \pm 0.385;$$
$$f(\pm\sqrt{6}) = \frac{5}{\pm 6^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{5}{6^{\frac{3}{2}}} \approx \pm 0.34;$$

La gráfica de la función $f(x)$ es:

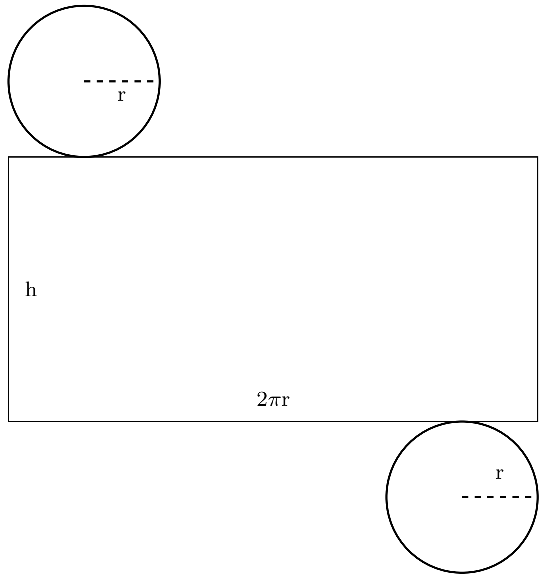


Rango: el rango de f es todo $\mathbb{R}$.

□

(5) Se va a construir un recipiente cilíndrico con capacidad de 2 litros. La superficie lateral será de cartón con base y tapa de metal. Si el cartón cuesta 2 pesos por metro cuadrado y la superficie metálica cuesta 5 pesos por metro cuadrado, calcular las dimensiones del cilindro que minimicen el costo del material de éste.

▼ Veamos el correspondiente dibujo:



Puesto que el volumen (V) es 2 litros, consideramos entonces que el $V = 2\,l\ = 2\ \mathrm{dm}^3$.
Sabemos que el volumen del cilindro es el área de la base, πr^2, por la altura h; para r y h en decímetros.

$$V = 2 = \pi r^2 h.$$

El costo de la superficie lateral será $(2\pi rh)\,2$ y el de la superficie metálica, $(2\pi r^2)5$ por lo que el costo total es:

$$C = 4\pi rh + 10\pi r^2;$$

pero como $h = \dfrac{2}{\pi r^2}$, entonces podemos expresar el costo como función de la variable r:

$$C(r) = 4\pi r\frac{2}{\pi r^2} + 10\pi r^2 = 8r^{-1} + 10\pi r^2.$$

Ahora bien,

$$C'(r) = -\frac{8}{r^2} + 20\pi r = \frac{20\pi r^3 - 8}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 20\pi r^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{8}{20\pi} = \frac{2}{5\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2}{5\pi}}$$

y también

$$h = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{5\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 25}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}};$$

Éstos son los valores que corresponden al costo mínimo del material: el punto crítico $r = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5\pi}}$ es mínimo puesto que $C''(r) = \dfrac{16}{r^3} + 20\pi > 0$ para $r > 0$.

□