CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E2000
TRIMESTRE I-2000 5-IV 16 H

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{2+3x}{3-4x} \le 2$.

(2) $|\,5x-3\,| \le x^2-2$.

(3) Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [-10,-2] \\ x^2+1 & \text{si } x \in (0,+\infty) \end{cases}$$

y $g : (-\infty, 0) \bigcup [3, \infty) \to \mathbb{R}$ dado por $g(x) = 1-5x$.

(a) Calcular el dominio y la fórmula de la función $f+g$

(b) Calcular el dominio y la fórmula de la función composición $g \circ f$

(4) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x-3 & \text{si } x \in (-\infty, 0]\,; \\ -2x+3 & \text{si } x \in [3,+\infty)\,. \end{cases}$$

Obtener dominio, raíces, gráfica y rango de dicha función.

(B) Segundo parcial

(1) Considere la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2-4}}{x^2-5x-2}$.

(a) Determinar dominio, raíces e intervalos de continuidad

(b) Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales

(c) Obtener el bosquejo gráfico de la función

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{9x+19}-6x-1}{6x^2-19x+10}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-3^-} \frac{|\,|\,2+x\,|-3\,|-2}{x^2-9}$.

(4) Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - x^2 - 1.$$

Pruebe que f tiene al menos una raíz positiva y otra negativa.

---

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(C) Tercer parcial

(1) Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por la ecuación

$$\frac{3x^5}{2y^2+1} + \sqrt{x^2 + xy^5} = 4$$

en el punto (1,0).

(2) Un anuncio publicitario tiene forma de un cilindro circular recto. Determinar la variación de su volumen en el proceso de inflado, sabiendo que la altura permanece constante.

(3) Considere la función $f(x) = 4x - \sqrt{2x-1}$. Determinar:

(a) Dominio, raíces, intervalos de continuidad y asíntota oblicua

(b) Intervalos de monotonía y puntos extremos

(c) Intervalos de concavidad

(d) Bosquejo gráfico e imagen

(4) El interior de un recipiente con el fondo cuadrado y abierto por arriba debe revestirse de plomo. Si el volumen del recipiente será de 32 l, ¿cuáles deben ser las dimensiones del recipiente para que sea mínima la cantidad de plomo empleada?

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{2+3x}{3-4x} \leq 2$.

▼ Transponiendo términos, la desigualdad propuesta equivale a:

$$\frac{2+3x}{3-4x} - 2 \leq 0$$

y efectuando operaciones tenemos

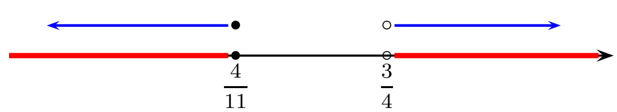
$$\frac{2+3x-6+8x}{3-4x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{11x-4}{3-4x} \leq 0.$$

Lo cual ocurre si

$$\begin{array}{rcr} 11x-4 \geq 0 \; \& \; 3-4x < 0 & \text{o bien} & 11x-4 \leq 0 \; \& \; 3-4x > 0; \\ 11x \geq 4 \; \& \; -4x < -3 & \text{o bien} & 11x \leq 4 \; \& \; -4x > -3; \\ x \geq \dfrac{4}{11} \; \& \; x > \dfrac{3}{4} & \text{o bien} & x \leq \dfrac{4}{11} \; \& \; x < \dfrac{3}{4}; \\ x \in \left(\dfrac{3}{4}, +\infty\right) & \text{o bien} & x \in \left(-\infty, \dfrac{4}{11}\right]. \end{array}$$

Luego, el conjunto solución es precisamente

$$CS = \left(-\infty, \frac{4}{11}\right] \bigcup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$$



Vemos, por ejemplo, que $x = \dfrac{4}{11}$ sí satisface la desigualdad original pues

$$\frac{2+\dfrac{12}{11}}{3-\dfrac{16}{11}} = \frac{34}{17} = 2 \leq 2.$$

Pero que $x = \dfrac{3}{4}$ no, pues al sustituir en la desigualdad el denominador resulta cero.

□

(2) $|\, 5x-3 \,| \leq x^2 - 2$.

▼ Esta desigualdad equivale a las dos desigualdades

$$-(x^2-2) \leq 5x-3 \leq x^2-2 \Leftrightarrow -x^2+2 \leq 5x-3 \leq x^2-2.$$

A su vez, la primera de ellas equivale a

$$-x^2-5x+2+3 \leq 0, \text{ es decir, a } -x^2-5x+5 \leq 0 \text{ y ésta a } x^2+5x-5 \geq 0.$$

Como

$$x^2+5x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+20}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{45}}{2}\approx\begin{cases}0.8541019\\-5.854102.\end{cases}$$

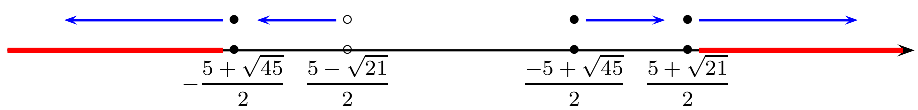
Tenemos que $x^2+5x-5=\left(x+\frac{5+\sqrt{45}}{2}\right)\left(x-\frac{-5+\sqrt{45}}{2}\right)$.

Veamos el signo de x^2+5x-5 fuera de estos puntos

	Signo de		
Intervalos	$x+5.85$	$x-0.85$	x^2+5x-5
$x<\frac{-5-\sqrt{45}}{2}\ \left(<\frac{-5+\sqrt{45}}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
$\frac{-5-\sqrt{45}}{2}<x<\frac{-5+\sqrt{45}}{2}$	$+$	$-$	$-$
$\left(\frac{-5-\sqrt{45}}{2}<\right)\ \frac{-5+\sqrt{45}}{2}<x$	$+$	$+$	$+$

Luego el conjunto solución de la desigualdad $-x^2+2\le 5x-3$ es el conjunto

$$CS=\left\{\left(-\infty,-\frac{5+\sqrt{45}}{2}\right]\bigcup\left[\frac{-5+\sqrt{45}}{2},+\infty\right)\right\}\bigcap\left\{\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right]\bigcup\left[\frac{5+\sqrt{21}}{2},+\infty\right)\right\}$$



Análogamente la otra desigualdad $5x-3\le x^2-2$ equivale a

$$0\le x^2-2-5x+3 \Leftrightarrow 0\le x^2-5x+1 \text{ y como } x^2-5x+1=0\Leftrightarrow$$

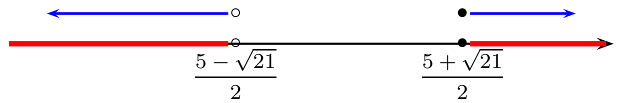
$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}\approx\begin{cases}4.7912878\\0.2087121.\end{cases}$$

El signo de x^2-5x+1 nos lo da la tabla siguiente

	Signo de		
Intervalos	$x-0.2087$	$x-4.791$	x^2-5x+1
$x<\frac{5-\sqrt{21}}{2}\ \left(<\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
$\frac{5-\sqrt{21}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{21}}{2}$	$+$	$-$	$-$
$\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}<\right)\ \frac{5+\sqrt{21}}{2}<x$	$+$	$+$	$+$

Luego entonces,

$$x^2-5x+1\ge 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right]\bigcup\left[\frac{5+\sqrt{21}}{2},+\infty\right).$$



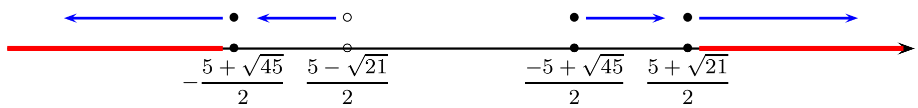
Y esta unión es precisamente el conjunto solución de la desigualdad $5x - 3 \leq x^2 - 2$.
Por último, el conjunto solución de la desigualdad propuesta es

$$S = \left\{ \left(-\infty, -\frac{5+\sqrt{45}}{2} \right] \bigcup \left[\frac{-5+\sqrt{45}}{2}, +\infty \right) \right\} \bigcap \left\{ \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{21}}{2} \right] \bigcup \left[\frac{5+\sqrt{21}}{2}, +\infty \right) \right\}.$$

Podemos ver que

$$S = \left(-\infty, -\frac{5+\sqrt{45}}{2} \right] \bigcup \left[\frac{5+\sqrt{21}}{2}, +\infty \right),$$

pues observamos lo siguiente:



Y así, por ejemplo, $x = -6$ satisface a $-x^2 + 2 \leq 5x - 3 \leq x^2 - 2$, pues

$$-36 + 2 \leq -30 - 3 \leq 36 - 2.$$

Así mismo, $x = 5$: $-25 + 2 \leq 25 - 3 \leq 25 - 2$, pero $x = 0$ no, pues $-0 + 2 \not\leq 0 - 3$.

□

(3) Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [-10, -2]\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

y considere también

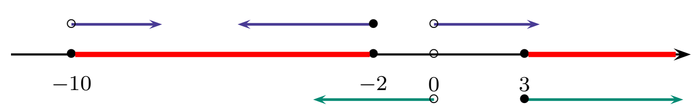
$$g : (-\infty, 0) \bigcup [3, \infty) \to \mathbb{R} \ \text{ dado por } g(x) = 1 - 5x.$$

(a) Calcular el dominio y la fórmula de la función $f + g$

▼ Dominio:

$$D_f = [-10, -2] \bigcup (0, +\infty) \ \text{ y } D_g = (-\infty, 0) \bigcup [3, +\infty) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_f \bigcap D_g = [-10, -2] \bigcup [3, +\infty)\,.$$

Puesto que



y la función suma:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x + 1 - 5x & \text{si } x \in [-10, -2] \\ x^2 + 1 + 1 - 5x & \text{si } x \in [3, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} -3x + 1 & \text{si } x \in [-10, -2]\,; \\ x^2 - 5x + 2 & \text{si } x \in [3, +\infty)\,. \end{cases}$$

□

(b) Calcular el dominio y la fórmula de la función composición $g \circ f$

▼ Dominio:

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in [-10,-2] \bigcup (0,+\infty) \,\middle|\, f(x) \in (-\infty, 0) \bigcup [3,+\infty) \right\}.$$

$$\text{Si } x \in [-10,-2] \Rightarrow f(x) = 2x < 0 \Rightarrow x \in D_{g\circ f}.$$

Si $x \in (0,+\infty) \Rightarrow f(x) = x^2+1 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 \geq 2 \Leftrightarrow |\,x\,| \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$ o bien $x \leq -\sqrt{2}$.

Pero en este último caso $x \not> 0$, luego entonces,

$$\left[\sqrt{2},+\infty\right) \subset D_{g\circ f} \text{ y } D_{g\circ f} = [-10,-2] \bigcup \left[\sqrt{2},+\infty\right).$$

Por otro lado,

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = \begin{cases} g(2x) & \text{si } x \in [-10,-2] \\ g(x^2+1) & \text{si } x \in \left[\sqrt{2},+\infty\right) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1-5(2x) & \text{si } x \in [-10,-2] \\ 1-5(x^2+1) & \text{si } x \in \left[\sqrt{2},+\infty\right) \end{cases} = \begin{cases} -10x+1 & \text{si } x \in [-10,-2] \\ -5x^2-4 & \text{si } x \in \left[\sqrt{2},+\infty\right). \end{cases}$$

□

(4) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x-3 & \text{si } x \in (-\infty, 0]\,; \\ -2x+3 & \text{si } x \in [3,+\infty)\,. \end{cases}$$

Obtener dominio, raíces, gráfica y rango de dicha función.

▼ Primero el dominio:

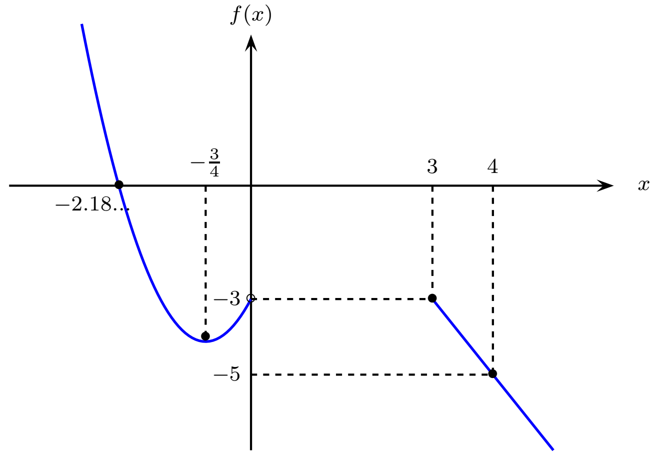
$$D_f = (-\infty, 0] \bigcup [3,+\infty)\,;$$

$$2x^2+3x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+24}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4} \approx \begin{cases} 0.6861406 \\ -2.1861407, \end{cases}$$

pero $\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4} > 0$, luego, no es raíz de f, a diferencia de $x = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{4} \leq 0$ que sí lo es.
Por otra parte, $-2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$, pero $\dfrac{3}{2} < 3$, luego, $x = \dfrac{3}{2}$ tampoco es raíz, por lo que la única raíz es $x = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}$.
Como

$$2x^2+3x-3 = 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right) - 3 - \frac{9}{8} = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{33}{8}\,,$$

la gráfica de $y = 2x^2+3x-3$ es una parábola de vértice en $\left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{33}{8}\right)$ que dirige su concavidad hacia arriba.
La gráfica de $y = -2x+3$ es una recta de pendiente -2 y ordenada en el origen $y = 3$. Luego, finalmente la gráfica de esa función $f(x)$:



Rango: $R_f = \mathbb{R}$.

$\square$

(B) Segundo parcial

(1) Considere la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-4}}{x^2-5x-2}.$$

(a) Determinar dominio, raíces e intervalos de continuidad

▼ Dominio:

Por un lado $3x^2 - 4$ tiene que ser ≥ 0, esto es

$$3x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow |\,x\,| \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.154700538.$$

Por lo que x tiene que ser mayor o igual que $\frac{2}{\sqrt{3}}$ o bien menor o igual que $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Pero $x^2 - 5x - 2$ no puede ser cero.

Sabemos que

$$x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \approx \begin{cases} 5.372281323 \\ -0.372281323. \end{cases}$$

Por lo que

$$D_f = \left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \bigcup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right) - \left\{\frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}.$$

Ya que $\frac{5+\sqrt{33}}{2} > \frac{2}{\sqrt{3}}$ se encontraría en el dominio de $f(x)$ y como $\frac{2}{\sqrt{3}} > \frac{5-\sqrt{33}}{2} > -\frac{2}{\sqrt{3}}$, entonces no se encuentra en él; tenemos pues que

$$D_f = \left\{\mathbb{R} - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right\} - \left\{\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}.$$

Raíces:

Las raíces de $f(x)$ son las x tales que $3x^2 - 4 = 0$, es decir,

$$3x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow |\,x\,| = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Continuidades:

En su dominio $f(x)$ es continua, o sea es continua en los intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \bigcup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}, +\infty\right).$$

$\square$

(b) Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales

▼ Para las asíntotas verticales calculemos

$$\lim_{x\to\frac{5+\sqrt{33}}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{5+\sqrt{33}}{2}^-} \frac{\sqrt{3x^2-4}}{\left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)}.$$

Vemos que cuando x está muy próximo a $\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$,

tanto $\sqrt{3x^2-4}$ como $x - \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \approx \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} - \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} = \sqrt{33}$ son positivos.

Y, en cambio, $x \to \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}^- \Rightarrow x < \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \Rightarrow x - \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} < 0.$

Por lo que $f(x) < 0$ para $x \approx \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}^-$, pero tendiendo el numerador a cierto número $\neq 0$ y el denominador a 0, tendremos que $\lim\limits_{x\to\frac{5+\sqrt{33}}{2}^-} f(x) = -\infty$.

Análogamente

$$\lim_{x\to\frac{5+\sqrt{33}}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{5+\sqrt{33}}{2}^+} \frac{\sqrt{3x^2-4}}{\left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)} = +\infty.$$

Pues ahora $x \to \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}^+ \Rightarrow x > \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \Rightarrow x - \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} > 0.$

Así entonces, $x = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$ es la asíntota vertical.

Para determinar las asíntotas horizontales estimemos $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Como

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-4}}{x^2-5x-2} = \frac{\sqrt{x^2\left(3 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x^2\left(1 - \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{\pm x\sqrt{3 - \frac{4}{x^2}}}{x^2\left(1 - \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \pm\frac{\sqrt{3 - \frac{4}{x^2}}}{x\left(1 - \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}\right)},$$

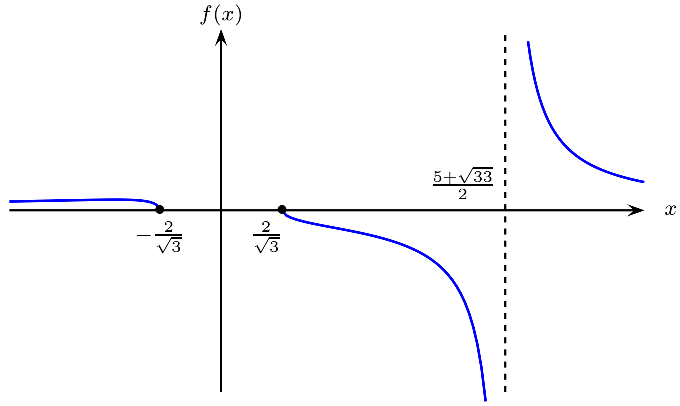
para $x \neq 0$ vemos que $\pm\sqrt{3 - \dfrac{4}{x^2}} \to \sqrt{3}$ cuando $x \to \pm\infty$

y que $x\left(1-\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right) \to \pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$, luego $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
Entonces $y = 0$ es la asíntota horizontal.

□

(c) Obtener el bosquejo gráfico de la función

▼ Una posible gráfica de la función $f(x)$ y que cumple con las condiciones determinadas es la siguiente:



□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{9x+19}-6x-1}{6x^2-19x+10}$.

▼ Racionalicemos el numerador

$$\frac{(\sqrt{9x+19}-6x-1)(\sqrt{9x+19}+6x+1)}{(6x^2-19x+10)(\sqrt{9x+19}+6x+1)} = \frac{9x+19-36x^2-12x-1}{(6x^2-19x+10)(\sqrt{9x+19}+6x+1)} =$$

$$= \frac{-36x^2-3x+18}{(6x^2-19x+10)(\sqrt{9x+19}+6x+1)}.$$

Observemos que

$$-36x^2-3x+18 = -3(12x^2+x-6) = 0 \Leftrightarrow 12x^2+x-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+288}}{24} = \frac{-1\pm\sqrt{289}}{24} = \frac{-1\pm 17}{24} = \begin{cases} \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

por lo cual

$$-36x^2-3x+18 = -3\times 12\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right) = -3\times 3\left(x-\frac{2}{3}\right)(4x+3).$$

Además

$$6x^2-19x+10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{19\pm\sqrt{361-240}}{12} = \frac{19\pm\sqrt{121}}{12} = \frac{19\pm 11}{12} = \begin{cases} \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Por lo que $6x^2 - 19x + 10 = 6\left(x - \dfrac{5}{2}\right)\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$. De aquí que:

$$\frac{-36x^2 - 3x + 18}{(6x^2 - 19x + 10)(\sqrt{9x+19} + 6x + 1)} = \frac{-9\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(4x+3)}{6\left(x - \dfrac{2}{3}\right)\left(x - \dfrac{5}{2}\right)(\sqrt{9x+19} + 6x + 1)} =$$

$$= \frac{-9(4x+3)}{6\left(x - \dfrac{5}{2}\right)(\sqrt{9x+19} + 6x + 1)} = \frac{-3(4x+3)}{2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)(\sqrt{9x+19} + 6x + 1)}$$

si $x \neq \dfrac{2}{3}$ y entonces

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{\sqrt{9x+19} - 6x - 1}{6x^2 - 19x + 10} = \lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{-3(4x+3)}{2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)(\sqrt{9x+19} + 6x + 1)} =$$

$$= \frac{-3\left(\dfrac{8}{3} + 3\right)}{2\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{2}\right)(\sqrt{6+19} + 4 + 1)} = \frac{-3\left(\dfrac{17}{3}\right)}{2\left(\dfrac{-11}{6}\right)(5+5)} = \frac{-17}{\dfrac{-22}{3}(5)} = \frac{51}{110}.$$

$\square$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to -3^-} \frac{|\,|2+x| - 3\,| - 2}{x^2 - 9}$.

▼ Si $x \approx -3 \Rightarrow 2 + x \approx -1 < 0$,
entonces : $|2+x| = -2 - x$ & $|2+x| - 3 = -2 - x - 3 = -x - 5$.
Como $-x - 5 \approx -2 < 0$, entonces $|\,|2+x| - 3\,| = 3 - |2+x| = 3 - (-2 - x) = 5 + x$.
Y, por último, $|\,|2+x| - 3\,| - 2 = 5 + x - 2 = x + 3$.
Por lo que

$$\frac{|\,|2+x| - 3\,| - 2}{x^2 - 9} = \frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3} \text{ si } x \neq -3, \text{ pero } x \approx -3.$$

De aquí que

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{|\,|2+x| - 3\,| - 2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-3-3} = -\frac{1}{6}.$$

$\square$

(4) Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - x^2 - 1.$$

Pruebe que f tiene al menos una raíz positiva y otra negativa.

▼ Vemos que:

$$f(0) = -1 < 0;$$

$$f(2) = \frac{64}{6} + \frac{16}{4} - 4 - 1 = \frac{32}{3} + 4 - 4 - 1 = \frac{32-3}{3} > 0.$$

Luego entonces entre 0 y 2 existe una raíz positiva, pues $f(x)$ es polinomial por lo que es continua en todo intervalo, en particular en $[0, 2]$.
Como $f(-2)$ también es positiva (f es par) entonces y también, por el teorema del Valor Intermedio, entre -2 & 0 hay otra raíz que tiene que ser negativa.

$\square$

(C) Tercer parcial

(1) Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por la ecuación

$$\frac{3x^5}{2y^2+1} + \sqrt{x^2+xy^5} = 4$$

en el punto (1,0).

▼ Derivando implícitamente con respecto a x

$$\frac{15x^4(2y^2+1) - 4yy' \times 3x^5}{(2y^2+1)^2} + \frac{2x + y^5 + 5xy^4y'}{2\sqrt{x^2+xy^5}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [15x^4(2y^2+1) - 4yy' \times 3x^5]2\sqrt{x^2+xy^5} + (2x + y^5 + 5xy^4y')(2y^2+1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'[5xy^4(2y^2+1)^2 - 24yx^5\sqrt{x^2+xy^5}] = -15x^4(2y^2+1)2\sqrt{x^2+xy^5} - (2x+y^5)(2y^2+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-30x^4(2y^2+1)\sqrt{x^2+xy^5} - (2x+y^5)(2y^2+1)^2}{5xy^4(2y^2+1)^2 - 24x^5y\sqrt{x^2+xy^5}}$$

y valuándola en el punto $(1, 0)$,

$$y'(1,0) = \frac{-30 \times 1^4(2 \times 0^2 + 1)\sqrt{1^2 + 1 \times 0^5} - (2 \times 1 + 0^5)(2 \times 0^2 + 1)^2}{5 \times 1 \times 0^4(2 \times 0^2 + 1)^2 - 24 \times 1^5 \times 0\sqrt{1^2 + 1 \times 0^5}} = \text{“}\left(\frac{-30-2}{0}\right)\text{”}.$$

Por lo que la recta tangente en el punto (1,0) es paralela al eje de las y, en cuyo caso su ecuación es $x = 1$ y la de la normal es $y = 0$ (el eje de las x).

$\square$

(2) Un anuncio publicitario tiene forma de un cilindro circular recto. Determinar la variación de su volumen en el proceso de inflado, sabiendo que la altura permanece constante.

▼ Sabemos que $V_{\textbf{cilindro}} = \pi r^2 h$ y que h es constante, por lo que la única variable es $r = r(t)$.
Tenemos que

$$\frac{dV_{\textbf{cilindro}}}{dt} = 2\pi r(t)h\frac{dr(t)}{dt}.$$

Conociendo $r(t)$ en un cierto instante y la razón de cambio del radio $\dfrac{dr(t)}{dt}$ en dicho instante, se puede calcular la razón de cambio del volumen del cilindro.

$\square$

(3) Considere la función $f(x) = 4x - \sqrt{2x-1}$.
Determinar:
(a) Dominio, raíces, intervalos de continuidad y asíntota oblicua
▼ Dominio:

$$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2x - 1 \geq 0 \,\right\} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Raíces:

$$4x - \sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow 4x = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 16x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-64}}{32}.$$

Que no son reales, pues $4 - 64 < 0$, luego la función no tiene raíces.

Continuidad:
La función es continua en todo su dominio.

Asíntota oblicua:
No tiene asíntota oblicua, pues si la tuviera su pendiente debería ser

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right) = 4 - 0 = 4.$$

Pero no existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (4x+b)] = \lim_{x\to+\infty}(4x - \sqrt{2x-1} - 4x - b) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(-\sqrt{2x-1} - b) = 0$$

cualquiera que sea b, pues

$$\lim_{x\to+\infty}(-\sqrt{2x-1} - b) = -\infty.$$

$\square$

(b) Intervalos de monotonía y puntos extremos

▼ Primera derivada:

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-1}} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - 1 > \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2x > \frac{17}{16} \Leftrightarrow x > \frac{17}{32} \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } \left(\frac{17}{32}, +\infty\right)$$

así como

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{17}{32} \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{32}\right).$$

Luego entonces,

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \Leftrightarrow 4\sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow 32x - 16 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{17}{32}$$

así como

$$f''(x) = [4 - (2x-1)^{-1/2}]' = \frac{2}{2(2x-1)^{3/2}} = \frac{1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f''\left(\frac{17}{32}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{17}{16} - 1\right)^3}} > 0 \Rightarrow;$$

en el único punto crítico

$$x = \frac{17}{32},\ y = \frac{17}{8} - \sqrt{\frac{17}{16} - 1} = \frac{17}{8} - \frac{1}{4} = \frac{15}{8} \text{ hay un mínimo absoluto.}$$

□

(c) Intervalos de concavidad

▼ Segunda derivada:

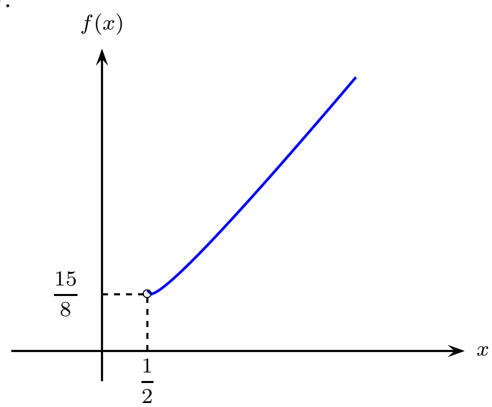
$$f''(x) = \frac{1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}} > 0 \text{ para } x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Luego la función es cóncava hacia arriba.

□

(d) Bosquejo gráfico y rango

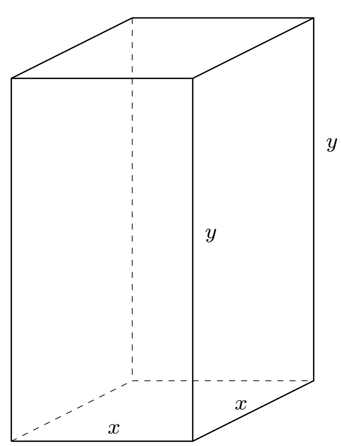
▼ La gráfica de la función $f(x)$:



Rango: $R_f = \left[\frac{15}{8}, +\infty\right).$

□

(4) El interior de un recipiente con el fondo cuadrado y abierto por arriba debe revestirse de plomo. Si el volumen del recipiente será de 32 l, ¿cuáles deben ser las dimensiones del recipiente para que sea mínima la cantidad de plomo empleada? ▼ Veamos la figura correspondiente:



Debemos minimizar el área del recipiente, es decir $A = x^2 + 4xy$. Esto es una función de dos variables, pero sabemos que el volumen del recipiente, x^2y, es 32 l, por lo que

$$x^2y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{x^2}.$$

Y sustituyendo este valor en la expresión del área tenemos que la función que debemos minimizar, ahora como función de la única variable x es

$$A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{32}{x^2}\right) = x^2 + \frac{128}{x} = x^2 + 128x^{-1}.$$

Calculemos sus puntos críticos:

$$A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{128}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$$

y como $A''(x) = (2x - 128x^{-2})' = 2 + \dfrac{2 \times 128}{x^3} > 0$, se trata de un mínimo.

Para $x = 4$ & $y = \dfrac{32}{16} = 2$ decímetros.

$\square$