# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
# EVALUACIÓN GLOBAL E2200
# TRIMESTRE 02-O FECHA: DICIEMBRE 18 DE 2002
# HORARIO: 13:00-15:00 H

## (A) Primer parcial

(1) Si se lanza una pelota hacia arriba desde la azotea de un edificio que tiene 25 m de altura con una velocidad inicial de 20 m/s, entonces la altura sobre el suelo $t$ segundos después será $h(t) = 25 + 20t - 5t^2$. ¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 40 m arriba del suelo?

(2) Una caja con base y tapa cuadradas de lado $x$ tiene una superficie total de 600 $\text{m}^2$. Expresar el volumen $V$ de la caja como función de $x$.

(3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = \sqrt{3-x}$ & $h(x) = x^2 - 1$, obtener: $(g/h)(x)$, $(h \circ f)(x)$ & $(g \circ h)(x)$, así como sus respectivos dominios.

(4) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } -3 < x \le -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ -1 & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

(a) Obtener la gráfica, el rango y las raíces de $f$

(b) A partir de la gráfica de $f$ hacer un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = 2 - f(x-1)$.

## (B) Segundo parcial

(1) Bosquejar la gráfica de una función $f$ que cumpla las condiciones siguientes:

Es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0, 3\}$; $f(-1) = 0$; $f(\frac{3}{2}) = -3$;
$f(0) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(2) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$, determinar: dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; su gráfica.

(3) Determinar los valores de las constantes $a$, $b$, $c$ que hacen continua en todo su dominio a la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 3; \\ c & \text{si } x = 3; \\ ax + b & \text{si } 3 \le x < 5; \\ x^2 + 2 & \text{si } x \ge 5. \end{cases}$$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(4) La posición instantánea (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta, está dada por $s(t) = t^2 - 8t + 18$, donde $t$ se mide en segundos.
   (a) Calcular las velocidades promedio en cada uno de los siguientes intervalos: [3,4], [3.5,4], [4,4.5] y [4,5]
   (b) Utilizando la definición de derivada, calcular la velocidad instantánea de la partícula en $t = 4$ seg.

## (C) Tercer parcial

(1) Dada la función definida por $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, obtener: raíces, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

(2) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $2x^3 - x^2y + y^3 = 1$ en el punto $P(2, -3)$.

(3) A un depósito cilíndrico de 5 m de radio le está entrando agua a razón de 25 $l$ por segundo. Calcular la rapidez a la que sube el nivel del agua. [Recordar que 1 $l$ es igual a 1 dm$^3$.]

(4) Una página ha de contener 30 cm$^2$ de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

# Respuestas

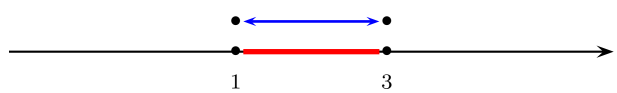
## (A) Primer parcial

(1) Si se lanza una pelota hacia arriba desde la azotea de un edificio que tiene 25 m de altura con una velocidad inicial de 20 m/s, entonces la altura sobre el suelo $t$ segundos después será $h(t) = 25 + 20t - 5t^2$. ¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 40 m arriba del suelo?

▼ Hacemos $25 + 20t - 5t^2 \geq 40 \Leftrightarrow 5t^2 - 20t + 15 \leq 0$.
Como $5t^2 - 20t + 15 = 5(t^2 - 4t + 3) = 5(t-1)(t-3)$,
entonces $5t^2 - 20t + 15 = 0$ para $t = 1$ y también para $t = 3$.
Estos dos puntos dividen a la recta real en tres intervalos: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$.
Se quiere saber cuándo $5t^2 - 20t + 15 = 5(t-1)(t-3) \leq 0$. Es decir, cuando $(t-1)(t-3) \leq 0$.
Esto se puede saber considerando la tabla siguiente:

| | Signo de | | |
|---|---|---|---|
| Intervalos | $t-1$ | $t-3$ | $5t^2 - 20t + 15$ |
| $t < 1\,(< 3)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $1 < t < 3$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $(1 <)\,3 < t$ | $+$ | $+$ | $+$ |

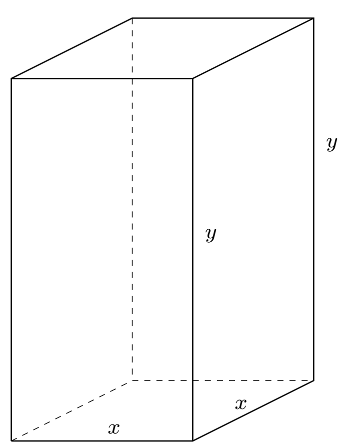
Luego entonces, $5t^2 - 20t + 15 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [1, 3]$.




□

(2) Una caja con base y tapa cuadradas de lado $x$ tiene una superficie total de 600 m$^2$. Expresar el volumen $V$ de la caja como función de $x$.

▼ Usamos la siguiente figura:




Sabemos que el volumen de la caja es

$$V = x^2 y$$

y que la superficie total es

$$A = 2x^2 + 4xy.$$

Como $A = 600$ m$^2$, tenemos que $2x^2 + 4xy = 600 \Rightarrow y = \dfrac{600 - 2x^2}{4x} = \dfrac{300 - x^2}{2x}$.
Si sustituimos este valor en la expresión para el volumen, lo obtendremos expresado como función de $x$ únicamente, esto es

$$V = x^2\left(\frac{300 - x^2}{2x}\right) = \frac{x(300 - x^2)}{2}.$$

□

(3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x + 4}$, $g(x) = \sqrt{3 - x}$ & $h(x) = x^2 - 1$, obtener: $(g/h)(x)$, $(h \circ f)(x)$ & $(g \circ h)(x)$, así como sus respectivos dominios.

▼ Tenemos:

$$\begin{aligned}
(g/h)(x) &= \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{3 - x}}{x^2 - 1};\\
(h \circ f)(x) &= h[f(x)] = h(\sqrt{x + 4}) = x + 4 - 1 = x + 3;\\
(g \circ h)(x) &= g[h(x)] = g(x^2 - 1) = \sqrt{3 - (x^2 - 1)} = \sqrt{4 - x^2}.
\end{aligned}$$

Como $D_f = [-4, +\infty)$, $D_g = (-\infty, 3]$ & $D_h = \mathbb{R}$, tenemos:

$$D_{\frac{g}{h}} = \left\{ D_g \bigcap D_h \right\} - \left\{ x \in D_h \,\middle|\, h(x) = 0 \right\}.$$

Como $D_g \bigcap D_h = (-\infty, 3] \bigcap \mathbb{R} = (-\infty, 3]$ & $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, entonces

$$\begin{aligned}
D_{\frac{g}{h}} &= (-\infty, 3] - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, 3];\\
D_{h\circ f} &= \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_h \right\} = \left\{ x \in [-4, +\infty) \,\middle|\, \sqrt{x + 4} \in \mathbb{R} \right\} = [-4, +\infty);\\
D_{g\circ h} &= \left\{ x \in D_h \,\middle|\, h(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 1 \in (-\infty, 3] \right\}.
\end{aligned}$$

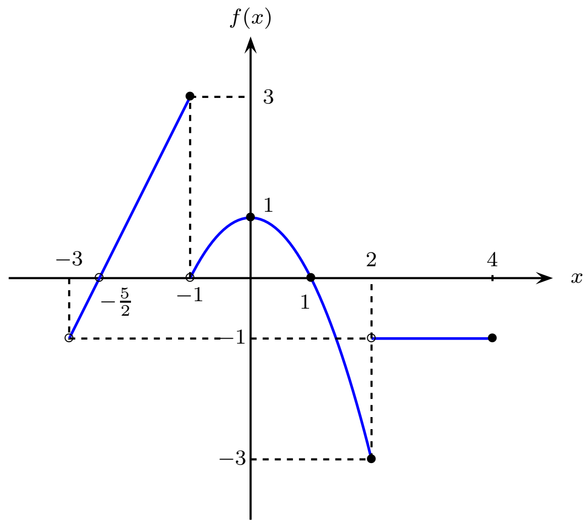
Como $x^2 - 1 \le 3 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \Leftrightarrow |\,x\,| \le 2 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$, resulta que $D_{g\circ h} = [-2, 2]$.

□

(4) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } -3 < x \le -1;\\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \le 2;\\ -1 & \text{si } 2 < x \le 4, \end{cases}$$

(a) obtener su gráfica, su rango y sus raíces. ▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:




Rango: $R_f = [-3, 3]$ .

Raíces:

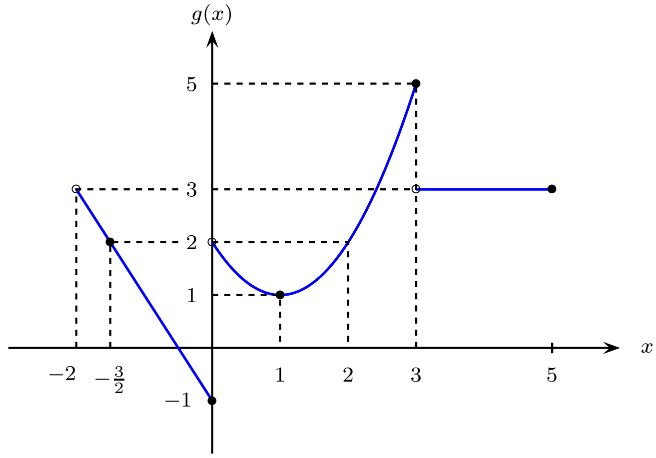
$$2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ es raíz pues } -3 < -\frac{5}{2} \leq -1.$$
$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \text{ es raíz pues } -1 < 1 \leq 2.$$
$$x = -1 \text{ no es raíz pues } -1 \notin (-1, 2] .$$

□

(b) A partir de la gráfica de $f(x)$ hacer un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = 2 - f(x - 1)$.
▼ Tenemos que deslizar la gráfica de $f(x)$ una unidad hacia la derecha, reflejarla con respecto al eje de las $x$, y, por último, deslizarla hacia arriba dos unidades. De hecho, los puntos $(-3, -1)$ (que no están en la gráfica de $f$), $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, $(-1, 3)$, $(-1, 0)$ (que tampoco están en la gráfica de $f$), $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, -3)$, $(2, -1)$ (no en la gráfica) y $(4, -1)$ se trasladarían sucesiva y respectivamente a los puntos

$$\begin{aligned}
&(-3, -1) \to (-2, -1) \to (-2, 1) \to (-2, 3) \, ;\\
&\left(-\frac{5}{2}, 0\right) \to \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \to \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \to \left(-\frac{3}{2}, 2\right) ;\\
&(-1, 3) \to (0, 3) \to (0, -3) \to (0, -1) \, ;\\
&(-1, 0) \to (0, 0) \to (0, 0) \to (0, 2) \, ;\\
&(0, 1) \to (1, 1) \to (1, -1) \to (1, 1) \, ;\\
&(1, 0) \to (2, 0) \to (2, 0) \to (2, 2) \, ;\\
&(2, -3) \to (3, -3) \to (3, 3) \to (3, 5) \, ;\\
&(2, -1) \to (3, -1) \to (3, 1) \to (3, 3) \, ;\\
&(4, -1) \to (5, -1) \to (5, 1) \to (5, 3) \, .
\end{aligned}$$

Por lo que la gráfica solicitada de $g(x)$ es:



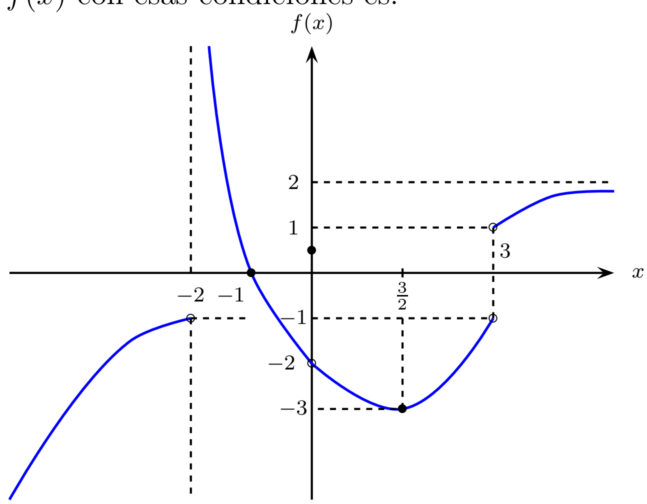

□

## (B) Segundo parcial

(1) Bosquejar la gráfica de una función $f$ que cumpla las condiciones siguientes:

Es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0, 3\}$; $f(-1) = 0$; $f(\frac{3}{2}) = -3$;
$f(0) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$;
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$;
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

▼ Una gráfica de la función $f(x)$ con esas condiciones es:




□

(2) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$, determinar: dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; su gráfica.

▼ Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x+2)(x-2) \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \{ \pm 2 \}\,.$$

Raíces:

Para hallar las raíces se resuelve $x^2+2x-8=0$; como $x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$, se ve que $x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x=2$ & $x=-4$, pero como $2 \notin D_f$, la única raíz de $f$ es $x=-4$.

Continuidades:
La función por ser racional es continua en su dominio, es decir, $(-\infty,-2)\bigcup(-2,2)\bigcup(2,+\infty)$.
Calculamos

$$\lim_{x\to -2^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to -2^{\mp}} \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2^{\mp}} \frac{x+4}{x+2} = \mp\infty.$$

Pues $\lim\limits_{x\to -2}(x+4)=2>0$ & $\lim\limits_{x\to -2^{\mp}}(x+2)=0\mp$.
Asíntotas:
La discontinuidad en $x=-2$ es esencial, de hecho es infinita, y entonces la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Análogamente

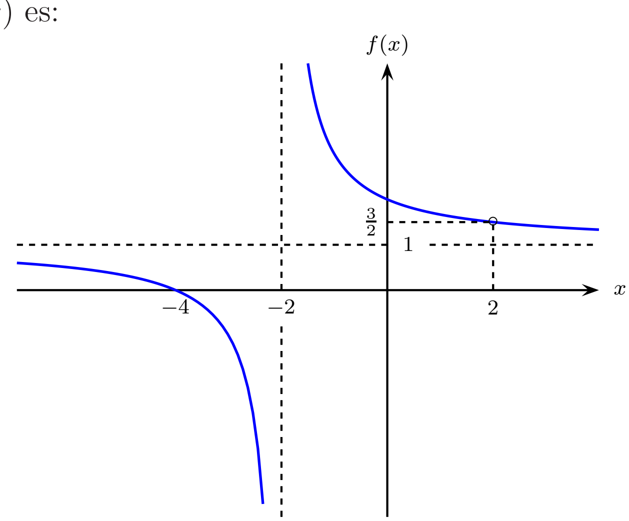
$$\lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\,,$$

por lo que la discontinuidad en $x=2$ es removible, pues si se define $f(2)=\dfrac{3}{2}$, $f(x)$ resultaría continua en $x=2$.

Y ahora:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Entonces, la recta $y=1$ es asíntota horizontal
La gráfica de la función $f(x)$ es:




(3) Determinar los valores de las constantes $a$, $b$, $c$ que hacen continua en todo su dominio a la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<3; \\ c & \text{si } x=3; \\ ax+b & \text{si } 3\le x<5; \\ x^2+2 & \text{si } x\ge 5. \end{cases}$$

▼ Para que $f$ sea continua en $x = 3$ se tiene que cumplir

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \text{ y de aquí que}$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 6 + 1 = 7 = f(3) = c = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3a + b.$$

Por lo que ya se sabe que $c = 7$ y además que $3a + b = 7$.

Análogamente, para que $f(x)$ sea continua en $x = 5$, tiene que ocurrir que

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 5a + b = f(5) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = 5^2 + 2 = 27.$$

Luego se tienen que cumplir simultáneamente las dos ecuaciones $3a + b = 7$ & $5a + b = 27$ por lo que, resolviendo tal sistema tenemos

$$\begin{cases} 3a + b = 7 \\ 5a + b = 27 \end{cases} \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow b = 7 - 3 \times 10 = 7 - 30 = -23.$$

Entonces los valores de las constantes son: $a = 10$, $b = -23$ & $c = 7$.

□

(4) La posición instantánea (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta, está dada por $s(t) = t^2 - 8t + 18$, donde $t$ se mide en segundos.

(a) Calcular las velocidades promedio en cada uno de los siguientes intervalos: [3,4], [3.5,4], [4,4.5] & [4,5]

▼ Calculamos:

$$\begin{aligned}
[3,4] :\bar{v} &= \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3} = \frac{16 - 32 + 18 - (9 - 24 + 18)}{1} = -1;\\
[3.5,4] :\bar{v} &= \frac{s(4) - s(3.5)}{4 - 3.5} = \frac{2 - (3.5^2 - 8 \cdot 3.5 + 18)}{0.5} = \frac{2 - (12.25 - 28 + 18)}{0.5} =\\
&= \frac{2 - 2.25}{0.5} = \frac{-0.25}{0.5} = -0.5;\\
[4,4.5] :\bar{v} &= \frac{s(4.5) - s(4)}{4.5 - 4} = \frac{4.5^2 - 8 \cdot 4.5 + 18 - 2}{0.5} = \frac{20.25 - 36 + 16}{0.5} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5;\\
[4,5] :\bar{v} &= \frac{s(5) - s(4)}{5 - 4} = \frac{5^2 - 8 \cdot 5 + 18 - 2}{1} = \frac{25 - 40 + 16}{1} = 1.
\end{aligned}$$

□

(b) Utilizando la definición de derivada, calcular la velocidad instantánea de la partícula en $t = 4$ segundos.

▼ Por definición:

$$\begin{aligned}
v(4) &= \lim_{t\to 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4} = \lim_{t\to 4} \frac{t^2 - 8t + 18 - 2}{t - 4} =\\
&= \lim_{t\to 4} \frac{t^2 - 8t + 16}{t - 4} = \lim_{t\to 4} \frac{(t - 4)^2}{t - 4} =\\
&= \lim_{t\to 4} (t - 4) = 0.
\end{aligned}$$

□

## (C) Tercer parcial

(1) Dada la función definida por $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, obtener: raíces, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

▼ Calculemos las raíces:

$$3x^5 - 5x^3 = x^3(3x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0, 3x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0; |\, x \,| = \sqrt{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x \approx \pm 1.2909944.$$

Que son las raíces de $f$, y que concuerdan con el hecho de que $f(x)$ es impar.

Para determinar los intervalos de crecimiento se deriva $f$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0; x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0; (x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x = \pm 1.$$

Estos tres puntos críticos $-1, 0$ & $1$ dividen a la recta en cuatro intervalos donde la derivada tiene los siguientes valores:
Eligiendo arbitrariamente $\pm 2 \in (-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$ se tiene que $f'(\pm 2) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.

Análogamente, eligiendo $\pm\frac{1}{2} \in (-1, 0) \bigcup (0, 1)$ se ve que $f'\left(\pm\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$.

Como en $x = -1$, la función pasa de ser creciente a ser decreciente. Luego entonces,

$$[-1, f(-1)] = [-1, 3(-1)^5 - 5(-1)^3] = (-1, -3 + 5) = (-1, 2)$$

es un máximo relativo. Además, por ser $f(x)$ impar, el punto $(1, -2)$ es un mínimo relativo.

Siendo $f(x)$ decreciente en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$, en $(0, 0)$ la función no tiene valor extremo.

Concavidad:
Para la concavidad se deriva nuevamente

$$f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.7071067.$$

Se determina el signo de la segunda derivada en los cuatro intervalos donde la segunda derivada no es cero.
En $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, eligiendo $-1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ se tiene que $f''(-1) < 0$, luego $f(x)$ dirige su concavidad hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Y en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ la dirige hacia arriba, pues $f(x)$ es impar.

En $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $-\frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, luego $f(x)$ dirige su concavidad hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Y en cambio la dirige hacia abajo en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, pues $f(x)$ es impar.

Puntos de inflexión:
Los tres puntos

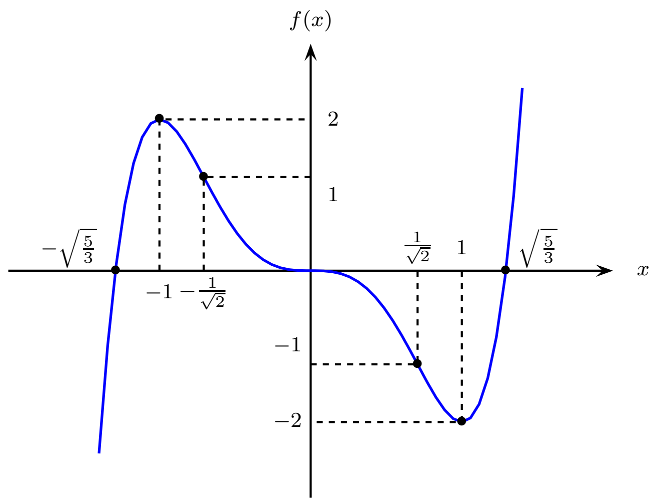
$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 - 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right] =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -0.5303301 + 1.767767\right) = (-0.7071067, 1.2374369);$$

$$[0, f(0)] = (0, 0) \text{ y también}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = (0.7071067, -1.2374369)$$

son de inflexión.
Con toda la información obtenida, conociendo que $f(x)$ y $f''(x)$ son impares y que $f'(x)$ es par, así como que las tres son continuas en todo $\mathbb{R}$, la gráfica de la función $f(x)$ queda de la siguiente manera




□

(2) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $2x^3 - x^2y + y^3 = 1$ en el punto $P(2, -3)$.

▼ Derivando implícitamente con respecto a $x$ se tiene que

$$6x^2 - 2xy - x^2y' + 3y^2y' = 0.$$

Transponiendo términos y factorizando $y'$ queda

$$y'(3y^2 - x^2) = 2xy - 6x^2.$$

Por lo que la pendiente de la tangente a la curva en cualquier punto es

$$y' = \frac{2xy - 6x^2}{3y^2 - x^2}\,.$$

En particular en el punto $P$ es

$$y'(2, -3) = \frac{2(2)(-3) - 6(2)^2}{3(-3)^2 - (2)^2} = \frac{-12 - 24}{27 - 4} = -\frac{36}{23}\,;$$

por fin la ecuación de la recta tangente en $P$ es

$$y' - (-3) = -\frac{36}{23}(x-2) \Rightarrow y' = -\frac{36}{23}x + \frac{72-69}{23};$$
$$y' = -\frac{36}{23}x + \frac{3}{23}\,.$$

□

(3) A un depósito cilíndrico de 5 m de radio le está entrando agua a razón de 25 $l$ por segundo. Calcular la rapidez a la que sube el nivel del agua. [Recordar que 1 $l$ es igual a 1 dm$^3$.]

▼ Recordar también que 5 m = 50 dm, luego el volumen del agua es

$$V = \pi r^2 h = 50^2\pi h \Rightarrow h = \frac{1}{50^2\pi}V.$$

Derivando con respecto al tiempo: $\dfrac{dh(t)}{dt} = \dfrac{1}{50^2\pi}\dfrac{dV}{dt}$, pero, como $\dfrac{dV}{dt} = 25$ dm$^3$/s, entonces:

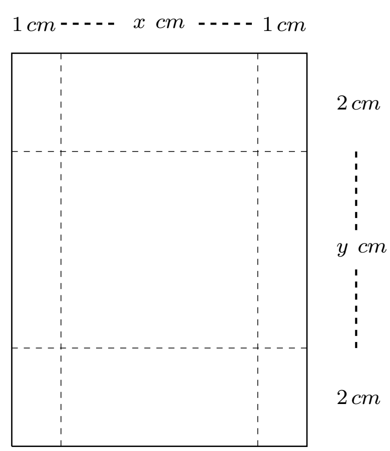
$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{50^2\pi}25 \text{ dm/s} = \frac{1}{50\times 25\times\pi} \text{ dm/s} = \frac{1}{1\,250\pi} \text{ dm/s},$$

que es la rapidez a la que sube el agua.

□

(4) Una página ha de contener 30 cm$^2$ de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

▼ Hagamos un croquis con el tamaño de la página y los datos




Se sabe que $xy = 30$ cm$^2$.

Se quiere minimizar el área de la página de papel, esto es: $A = (x+2)(y+4)$.

Entonces, el área es una función de dos variables, $x$, $y$.

Pero como $xy = 30 \Rightarrow y = \dfrac{30}{x}$, sustituyendo este valor en la expresión para el área de la página, queda como función de la única variable $x$, a saber:

$$A(x) = (x+2)\left(\frac{30}{x}+4\right) = 30 + 4x + \frac{60}{x} + 8 = 4x + 60x^{-1} + 38.$$

Para hallar los puntos críticos se deriva

$$A'(x) = 4 - \frac{60}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{60}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 15 \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{15}.$$

Por lo que

$$x = \sqrt{15};$$

$$y = \frac{30}{\sqrt{15}} = \frac{30\sqrt{15}}{15} = 2\sqrt{15} = 2x.$$

Como $A''(x) = (4 - 60x^{-2})' = \dfrac{120}{x^3} > 0$, se trata, en efecto, de un mínimo.

$\square$