CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E2300

(A) Primer parcial

(1) Completando el trinomio cuadrado perfecto, dibujar la gráfica de $|\,x^2 + x - 6\,| = y$.

(2) $x^2 + 3x - 6 \ge 2$.

(3) $\left|\dfrac{1}{x-2}\right| \le 6$.

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x < -1 \\ 4 & \text{si } |\,x\,| < 1 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

(a) Proporcionar el dominio, rango y raíces de f.
(b) Hacer un bosquejo gráfico.

(B) Segundo parcial

(1) Una función f se dice que es acotada si existe $M \ge 0$ tal que $|\,f(x)\,| \le M$ para toda x en dominio de f. Pruebe que la función $y = \dfrac{x^2}{1+x^4}$ es acotada en todos los reales $\mathbb{R}$

(2) Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}} \text{ si } x \ne 0 \text{ y } f(0) = 0.$$

¿Es f continua en todo su dominio? Justifique plenamente.

(3) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{si } x \le -1 \\ 2ax + b & \text{si } -1 < x \le 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

(a) Encontrar los valores de a y b para que la función sea continua en todo su dominio
(b) Graficar la función con los valores encontrados

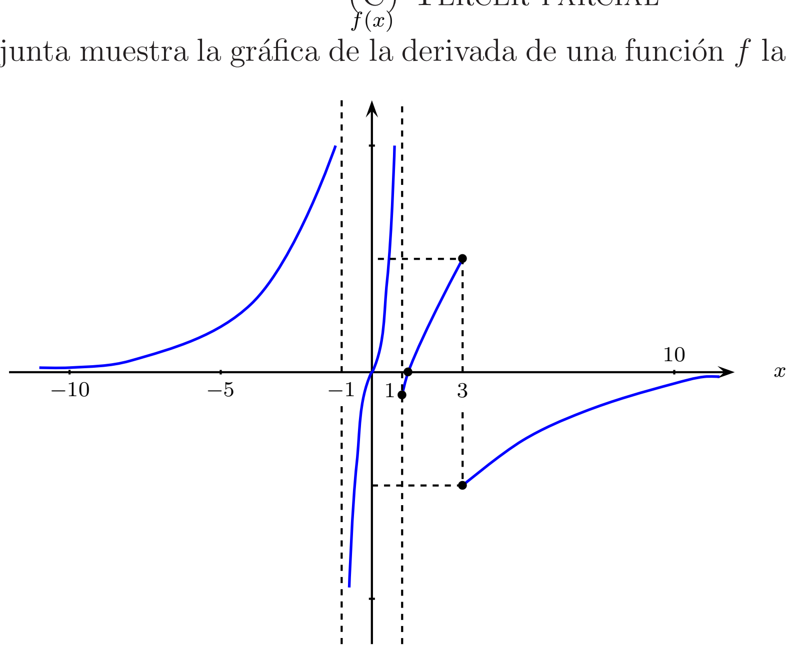
(4) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 16}{-3x^2 + 8x - 4}$.

(5) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{3 + x}$.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(C) Tercer parcial

(1) La figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f la cual es continua en todos los reales.



A partir de ella determine

(a) Intervalos donde f es creciente o decreciente
(b) Puntos críticos de f
(c) Extremos relativos de$f$
(d) Concavidad de f
(e) Abscisas de los puntos de inflexión de f

(2) Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ determinando:

(a) Dominio, raíces y contradominio
(b) Asíntotas
(c) Intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento)
(d) Intervalos de concavidad
(e) Puntos críticos y su clasificación (máximos, mínimos) y puntos de inflexión

(3) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un recipiente cilíndrico cerrado para que la cantidad de material usado sea mínima y su volumen sea V?

(4) Calcule la derivada de $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$ usando la definición

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) Completando el trinomio cuadrado perfecto, dibujar la gráfica de $|\, x^2 + x - 6 \,| = y$.

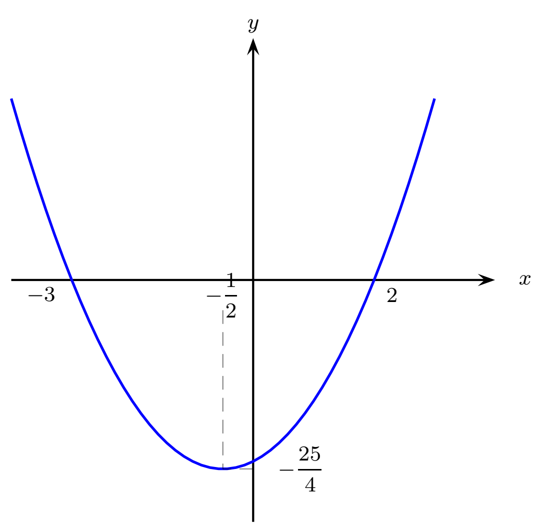
▼ Completando un trinomio cuadrado perfecto vemos cómo es la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 + x - 6$, para luego aplicar el valor absoluto

$$y = x^2 + x - 6 = x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\,,$$

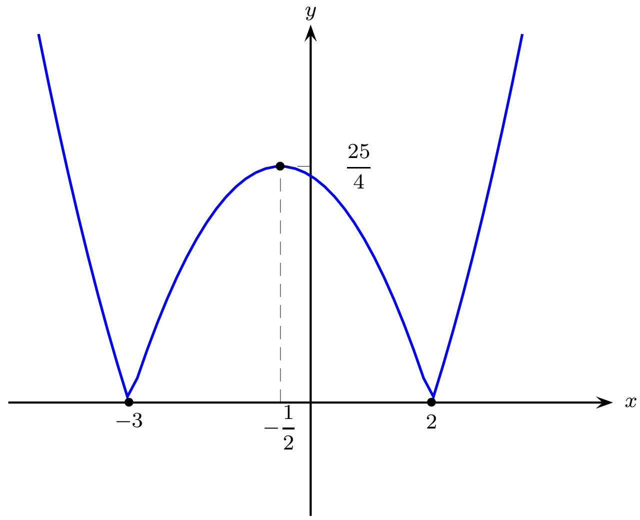
que es una parábola con eje vertical que se abre hacia arriba a partir de su vértice.
Su gráfica se obtiene de la parábola $y = x^2$, trasladándola primero horizontalmente $\frac{1}{2}$ unidad hacia la izquierda y luego verticalmente $\frac{25}{4}$ unidades hacia abajo, quedando su vértice en el punto $V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.
Sus raíces están en

$$\begin{gathered} y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ o bien } x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ o bien } x = -3. \end{gathered}$$

Entonces sus raíces son $x = -3$ & $x = 2$.
Con esto se tiene primero que la gráfica de $y = x^2 + x - 6$ es



Aplicando el valor absoluto tenemos ahora la gráfica de $y = |\, x^2 + x - 6 \,|$:



□

(2) $x^2 + 3x - 6 \geq 2$.

▼ Completando un trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 + 3x - 6 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x \geq 2 + 6 \Leftrightarrow x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \geq 8 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 8 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|\left(x + \frac{3}{2}\right)^2\right| \geq \frac{41}{4} \Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right|^2 \geq \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| \geq \frac{\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{3}{2} \leq -\frac{\sqrt{41}}{2} \quad \text{o bien} \quad x + \frac{3}{2} \geq \frac{\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow$$

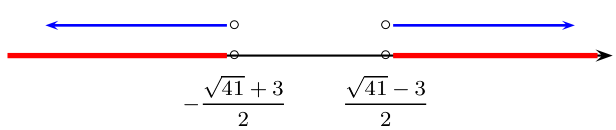
$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{41}}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{o bien} \quad x \geq \frac{\sqrt{41}}{2} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{41} + 3}{2} \quad \text{o bien} \quad x \geq \frac{\sqrt{41} - 3}{2}.$$

El conjunto solución de la desigualdad es entonces

$$CS = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{41} + 3}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\sqrt{41} - 3}{2}, +\infty\right);$$

$$CS = \mathbb{R} - \left(-\frac{\sqrt{41} + 3}{2}, \frac{\sqrt{41} - 3}{2}\right).$$



□

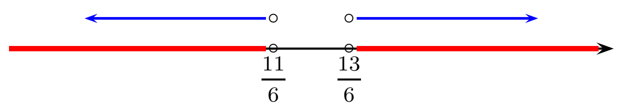
(3) $\left|\dfrac{1}{x-2}\right| \le 6.$

▼ Considerando que $x \neq 2$, se tiene que $x-2 \neq 0$, por lo cual $|\,x-2\,| > 0$. Entonces

$$\left|\frac{1}{x-2}\right| \le 6 \Leftrightarrow \frac{1}{|\,x-2\,|} \le 6 \Leftrightarrow 1 \le 6\,|\,x-2\,| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\,x-2\,| \ge \frac{1}{6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-2 \le -\frac{1}{6} \quad \text{o bien} \quad x-2 \ge \frac{1}{6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \le -\frac{1}{6}+2 \quad \text{o bien} \quad x \ge \frac{1}{6}+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \le \frac{11}{6} \quad \text{o bien} \quad x \ge \frac{13}{6}\,.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$CS = \left(-\infty, \frac{11}{6}\right] \bigcup \left[\frac{13}{6}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(\frac{11}{6}, \frac{13}{6}\right).$$



□

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-2x+3 & \text{si } -3 \le x < -1; \\ 4 & \text{si } |\,x\,| < 1; \\ x^2-2x-3 & \text{si } 1 \le x \le 4. \end{cases}$$

(a) Proporcionar el dominio y raíces de esa función

▼

Dominio: $[-3, 4] - \{-1\}$.

Para $-3 \le x < -1$ se tiene $f(x) = -x^2-2x+3$.

La gráfica de $f(x) = -x^2-2x+3$ es una parábola con eje vertical que se abre hacia abajo. Además

$$y = -x^2-2x+3 = -x^2-2x-1+1+3 = -(x^2+2x+1)+4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -(x+1)^2+4$$

tiene vértice en el punto $V(-1, 4)$ y raíces en

$$-x^2-2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \text{ o bien } x = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Para $-1 < x < 1$, se tiene $f(x) = 4$.

La gráfica es pues el segmento de recta horizontal que va del punto $(-1, 4)$ al punto $(1, 4)$.

Para $1 \le x \le 4$, se tiene $f(x) = x^2-2x-3$.

En este tercer caso, su gráfica es una parábola con eje vertical que se abre hacia arriba.

Además
$$y = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$$
tiene vértice en el punto $W(1, -4)$ y raíces en
$$(x-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x-1)-2][(x-1)+2] = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0; \text{ por lo tanto}$$
$$x = 3; \text{ y también en } x = -1.$$

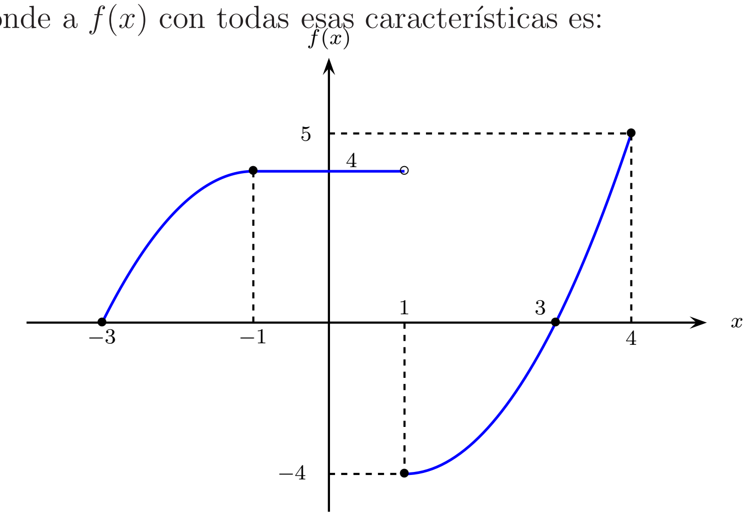
Raíces: $x = -3$ & $x = 3$.

□

(b) Hacer un bosquejo gráfico y proporcionar el rango de la función:

▼ Tabulamos $f(4) = 4^2 - (2 \times 4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$.

La gráfica que corresponde a $f(x)$ con todas esas características es:



Rango: $[-4, 5]$.

□

(B) Segundo parcial

(1) Una función f se dice que es acotada si existe $M \geq 0$ tal que $|\, f(x) \,| \leq M$ para toda x en dominio de f.

Pruebe que la función $y = \dfrac{x^2}{1+x^4}$ es acotada en todos los reales $\mathbb{R}$.

▼ Puesto que la función es par, vamos a demostrar el resultado para $x \geq 0$.

Demostraremos que

$|\, f(x) \,| = \left| \dfrac{x^2}{1+x^4} \right| = \dfrac{x^2}{1+x^4} \leq 1$ o, lo que es lo mismo, que $x^2 \leq 1 + x^4$ si $x \geq 0$.

Si $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 + x^4$, pues $1 \leq 1 + x^4$.

Por otro lado, $1 < x \Rightarrow x < x^2 \Rightarrow 1 < x^2 \Rightarrow x^2 < x^4 \Rightarrow x^2 < 1 + x^4$, pues $x^4 < 1 + x^4$.

Hemos demostrado que tomando $M = 1$ se cumple el resultado.

□

(2) Sea
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0.$$

¿Es f continua en todo su dominio? Justifique plenamente.

▼ Para tener el dominio de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es necesario ver el dominio de $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x+1 \geq 0 \;\&\; x > 0 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq -1 \;\&\; x > 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > 0 \right\} = (0, +\infty)\,. \end{aligned}$$

Como $f(0) = 0$, entonces el dominio de la función f es $D_f = [0, +\infty)$.
Ya que para $x > 0$, las funciones $h(x) = \sqrt{x+1} - 1$ & $\phi(x) = \sqrt{x}$ son continuas, y además $\phi(x) \neq 0$, entonces la función $f(x)$ es continua en el intervalo $(0, +\infty)$.
Hasta aquí, $f(x)$ es una función continua para $x > 0$. Veamos qué sucede en $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \right) = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0; \end{aligned}$$

entonces, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Por ser $f(0) = 0$, así como $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, se cumple que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.
Luego entonces, f es una función continua en el intervalo abierto $(0, +\infty)$ y además $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Por lo tanto, f es una función continua en el intervalo $[0, +\infty)$, que es precisamente el dominio de f. Esto es, f es una función continua en todo su dominio.

□

(3) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{si } x \leq -1; \\ 2ax + b & \text{si } -1 < x \leq 2; \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$

(a) Encontrar los valores de a, b para que la función sea continua en todo su dominio.

▼ Por ser funciones polinomiales,

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 4x + 4 \text{ con } x \in (-\infty, -1]\,; \\ h(x) &= 2ax + b \text{ con } x \in (-1, 2]; \\ \phi(x) &= x^2 - 4x + 4 \text{ con } x \in (2, +\infty)\,. \end{aligned}$$

son funciones continuas en sus dominios.
Sólo debemos cuidar la continuidad de f en $x = -1$ y en $x = 2$. Primero en $x = -1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} (x^2 + 4x + 4) = (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 1; \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} (2ax + b) = 2a(-1) + b = -2a + b; \end{aligned}$$

entonces, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 = -2a + b.$$

Ahora en $x = 2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2}(2ax + b) = 2a(2) + b = 4a + b;\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2} \phi(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 4) = (2)^2 - 4(2) + 4 = 0;\end{aligned}$$

entonces, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4a + b = 0.$$

Luego entonces, las constantes a, b deben cumplir con el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 1 \\ -4a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow -6a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{6};$$

$$4a + b = 0 \Rightarrow b = -4a = -4\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{6} \Rightarrow b = \frac{2}{3};$$

Ahora bien, con $a = -\frac{1}{6}$ y con $b = \frac{2}{3}$ se tiene que $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ si $-1 < x \le 2$; si $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$; y si $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$.

Además, $f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 1$ y también $f(2) = -\frac{1}{3} \times 2 + \frac{2}{3} = 0$,
por lo cual $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ así como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.
Entonces la función $f(x)$ es continua en $x = -1$ y en $x = 2$. Esto es, f es una función continua en todo su dominio.

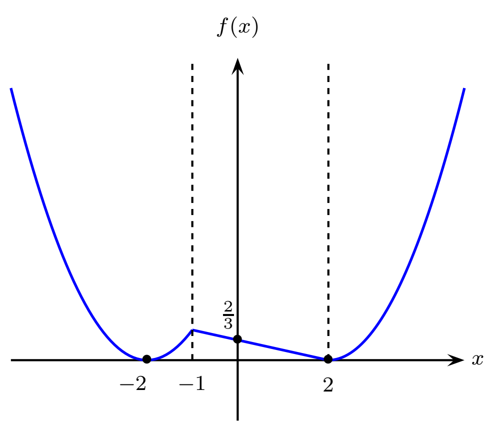
□

(b) Graficar la función con los valores encontrados.

▼ La gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{si } x \le -1; \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } -1 < x \le 2; \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } x > 2; \end{cases}$$

es



ya que

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \le -1; \\ -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3} & \text{si } -1 < x \le 2; \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2; \end{cases}$$

por lo que, a la izquierda de $x = -1$ y a la derecha de $x = 2$, la gráfica está constituida por segmentos de la parábola $y = x^2$ trasladada 2 unidades a la izquierda y a la derecha respectivamente.

En $(-1, 2]$ tenemos el segmento de la recta de pendiente $-\dfrac{1}{3}$ y ordenada en el origen $\dfrac{2}{3}$.

□

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 16}{-3x^2 + 8x - 4}$.

▼ Vemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 16}{-3x^2 + 8x - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x^3 - 8)}{-(3x^2 - 8x + 4)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x^3 - 2^3)}{-(3x^2 - 8x + 4)} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{-(x-2)(3x-2)}$$

en caso de que $x \neq 2$, entonces cancelando $(x-2)$ tenemos

$$\lim_{x\to 2} \frac{2(x^2 + 2x + 4)}{-(3x-2)} = \frac{2(4+4+4)}{-(6-2)} = \frac{24}{-4} = -6.$$

Hemos visto que $3x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \dfrac{8 \pm 4}{6} \begin{cases} 2 \\ \dfrac{2}{3} \end{cases},$

luego $3x^2 - 8x + 4 = 3(x-2)\left(x - \dfrac{2}{3}\right) = (x-2)(3x-2)$.

□

(5) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{3 + x}$.

▼ Tenemos

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{3 + x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{x + 3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(4 + \frac{9}{x^2})}}{x\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{4 + \dfrac{9}{x^2}}}{x\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|\, x \,|\sqrt{4 + \dfrac{9}{x^2}}}{x\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{4 + \dfrac{9}{x^2}}}{x\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)} =$$

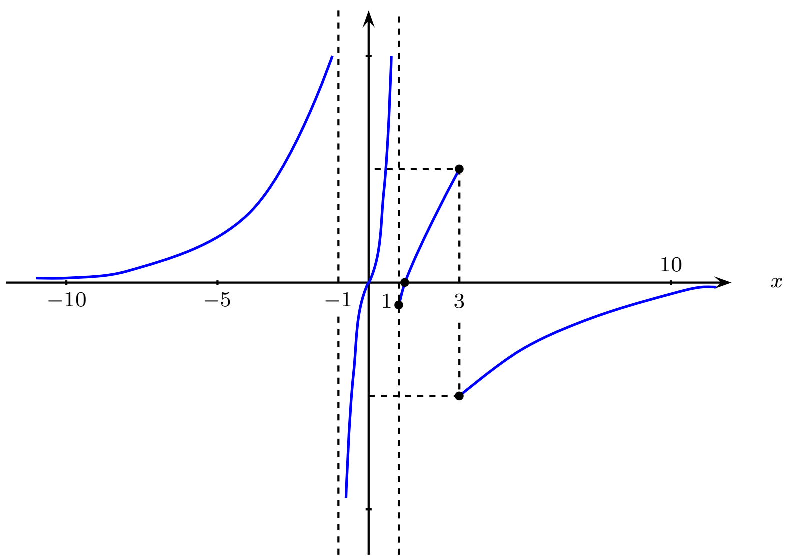
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \dfrac{9}{x^2}}}{1 + \dfrac{3}{x}} = \frac{-\sqrt{4 + 0}}{1 + 0} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Observe que tenemos $|\,-x\,| = -x$ pues $x \to -\infty$, $x < 0$.

□

(C) Tercer parcial

(1) La figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f la cual es continua en todos los reales.



A partir de ella determine:

(a) Intervalos donde f es creciente o decreciente

▼ La función f es creciente donde $f' > 0$, lo cual sucede en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ y $(1.2, 3)$. La función f es decreciente donde $f' < 0$, lo cual sucede en los intervalos $(-1, 0)$, $(1, 1.2)$ y $(3, +\infty)$.

□

(b) Puntos críticos de f

▼ La función f tiene puntos críticos donde $f' = 0$, lo que sucede en $x = 0$ y en $x = 1.2$.

□

(c) Extremos relativos de f

▼ Debido a que $f'(x) < 0$, f es decreciente en el intervalo $(-1, 0)$; $f'(0) = 0$; f es creciente en el intervalo $(0, 1)$ ya que $f'(x) > 0$; entonces, se puede afirmar (por el criterio de la primera derivada) que la función f tiene en $x = 0$ un mínimo local estricto.
Análogamente por ser f decreciente en el intervalo $(1, 1.2)$; $f'(1.2) = 0$ y, puesto que f es creciente en el intervalo $(1.2, 3)$, se puede afirmar (por el criterio de la primera derivada) que la función f tiene también en $x = 1.2$ un mínimo local estricto.

□

(d) Concavidad de f

▼ La función f es cóncava hacia arriba donde $f'' > 0$, es decir, donde la derivada de f' es positiva, o sea donde f' es creciente.
En este caso, f' es creciente en todo su dominio, por lo cual f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$ & $(3, +\infty)$.

□

(e) Abscisas de los puntos de inflexión de f

▼ Por no existir cambios de concavidad, f no tiene puntos de inflexión. □

(2) Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ determinando:

(a) Dominio, raíces y rango

▼ Por ser f una función racional, su dominio es
$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 + x^2 = 0 \right\} = \mathbb{R}$, ya que $1 + x^2 \neq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
Raíces: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
El rango lo veremos al final. Todo lo que calculemos debe ser consistente con el hecho de que $f(x)$ es impar.

□

(b) Asíntotas

▼ Asíntotas verticales:
Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio, que es todo $\mathbb{R}$. Por esta razón f no tiene discontinuidades, lo que permite afirmar que f no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Entonces, la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal.

□

(c) Intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento)

▼ Derivamos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

ya que $(1+x^2)^2 > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$; entonces,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow \left| x^2 \right| < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Por lo cual f es estrictamente creciente en el intervalo $(-1, 1)$.

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \left| x^2 \right| > 1 \Leftrightarrow |x|^2 > 1^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ o bien } x > 1,$$

por lo cual f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.

□

(d) Intervalos de concavidad

▼ Para hallarlos necesitamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{(1+x^2)^2(-2x) - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{[(1+x^2)^2]^2} =$$
$$= \frac{-2x(1+x^2)^2 - 4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(1+x^2)[(1+x^2)+2(1-x^2)]}{(1+x^2)^4} =$$
$$= \frac{-2x(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Ya que $(1+x^2)^3 > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(x^2-3) > 0 \text{ y } f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2x(x^2-3) < 0.$$

Pero, $x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow |\,x\,|^2 < (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow |\,x\,| < \sqrt{3}$.
Por lo cual, $x^2 - 3 < 0$ para $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
y $x^2 - 3 > 0$ en el conjunto $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \bigcup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.
Luego entonces

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow 2x(x^2-3) > 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \text{ y } x^2-3 < 0 \text{ o bien } 2x > 0 \;\&\; x^2-3 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < 0 \;\&\; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \text{ o bien } x > 0 \;\&\; x < -\sqrt{3} \text{ o bien } x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < 0 \text{ o bien } x > \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Por lo cual f es cóncava hacia arriba en el conjunto $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \bigcup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.
Por otra parte

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\Leftrightarrow 2x(x^2-3) < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \;\&\; x^2-3 > 0 \text{ o bien } 2x > 0 \;\&\; x^2-3 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < 0 \;\&\; x < -\sqrt{3} \text{ o bien } x > \sqrt{3} \text{ o bien } x > 0 \;\&\; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < -\sqrt{3} \text{ o bien } 0 < x < \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Por lo cual f es cóncava hacia abajo en el conjunto $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \bigcup \left(0, \sqrt{3}\right)$.

□

(e) Puntos críticos y su clasificación (máximos, mínimos) y puntos de inflexión
▼ Puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ o bien } x = 1.$$

Entonces, f tiene puntos críticos en $x = -1$ y en $x = 1$.
Por ser f decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y creciente en el intervalo $(-1, 1)$, la función f tiene en $x = -1$ un mínimo estricto. Aún más, este mínimo local se encuentra en el punto $[-1, f(-1)] = \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.
Por ser f creciente en el intervalo $(-1, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$, la función f tiene en $x = 1$ un máximo estricto. Aún más, este máximo local se encuentra en el punto $[1, f(1)] = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Puntos de inflexión:

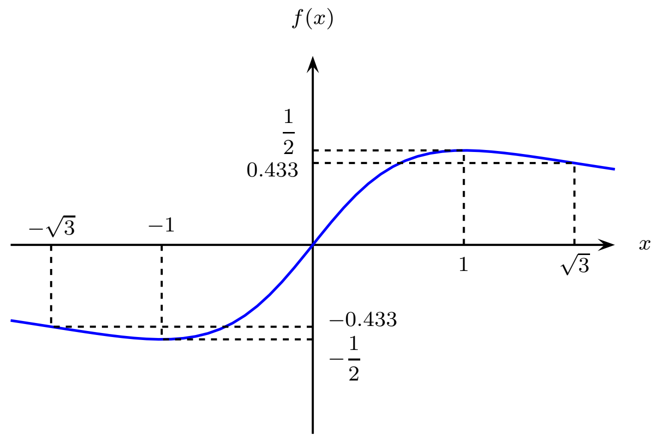
Por el inciso (d) sabemos que f es cóncava hacia arriba en el conjunto $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \bigcup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y que es cóncava hacia abajo en el conjunto $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \bigcup \left(0, \sqrt{3}\right)$.
Luego entonces, f tiene cambios de concavidad en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y en $x = \sqrt{3}$, y, debido a que f es continua en estos números, se puede asegurar que f tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y en $x = \sqrt{3}$. Dichos puntos tienen por coordenadas

$$[-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})] = \left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right) \approx (-1.7320508, -0.4330127);$$

$$[0, f(0)] = (0, 0);$$

$$[\sqrt{3}, f(\sqrt{3})] = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx (1.7320508, 0.4330127).$$

Con toda esta información la gráfica de la función $f(x)$ es:

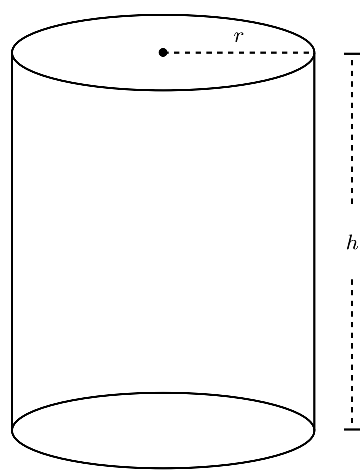


Encontramos con ello que los valores extremos resultan ser absolutos.
Rango: $R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

□

(3) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un recipiente cilíndrico cerrado para que la cantidad de material usado sea mínima y su volumen sea V?

▼ Consideramos un cilindro recto de radio r y altura h.



El volumen V del cilindro es

$$V = \pi r^2 h.$$

noindent El área total de la superficie del cilindro es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

¿Qué es lo que se quiere? Se quiere minimizar el área A suponiendo un volumen V fijo.

De la ecuación

$$V = \pi r^2 h$$

despejamos

$$h = \frac{V}{\pi r^2}\,.$$

Sustituimos en el área A y se obtiene

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

que es la función a minimizar. Derivando $A(r) = 2\pi r^2 + 2Vr^{-1}$ queda

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2};$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{V}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,.$$

Entonces $A(r)$ tiene un punto crítico en $r_1 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$:

$$A''(r) = \frac{d}{dr}(4\pi r - 2Vr^{-2}) = 4\pi + 4Vr^{-3} = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0;$$

además $A(r)$ tiene un mínimo cuando $r = r_1$.

Ahora bien, cuando

$$r = r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}},$$

se tiene que

$$h_1 = \frac{V}{\pi r_1^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{V}{\pi}\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_1.$$

Por lo tanto, el área $A(r)$ es mínima cuando

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ y } h = 2r.$$

Es decir, cuando la altura del cilindro es precisamente el doble del radio de la base.

□

(4) Calcule la derivada de $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$ usando la definición

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

▼ Tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 + 3x - 4;\\
f(x+h) &= 2(x+h)^3 + 3(x+h) - 4 =\\
&= 2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + 3x + 3h - 4 =\\
&= 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 + 3x + 3h - 4 \Rightarrow\\
\Rightarrow f(x+h) - f(x) &= 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 + 3x + 3h - 4 - (2x^3 + 3x - 4) =\\
&= 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 + 3h =\\
&= h(6x^2 + 6xh + 2h^2 + 3) \Rightarrow\\
\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= 6x^2 + 6xh + 2h^2 + 3 \Rightarrow\\
\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}(6x^2 + 6xh + 2h^2 + 3) = 6x^2 + 3.
\end{aligned}$$

□