# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
# EVALUACIÓN GLOBAL E2400

## (A) Primer parcial

(1) $\dfrac{1}{2x-3} \geq \dfrac{1}{|\,x+1\,|}$.

(2) Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{1-3x} \text{ y } g(x) = \frac{1}{x+1}$$

(a) Encuentre $D_f$ y $D_g$
(b) Encuentre $g \circ f$ y $f \circ g$ y sus dominios respectivos

(3) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -3x + 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(a) Proporcionar el dominio de la función, el rango, sus raíces y su paridad
(b) Hacer un bosquejo de la gráfica

## (B) Segundo parcial

(1) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 + b & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

(a) Encontrar los valores de $a$ y $b$ para que la función sea continua en todo punto
(b) Graficar la función con los valores encontrados

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{4 - \sqrt{x+15}}{x^2 - 1}$ .

(3) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$ .

(4) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x^3 - x^2} .$$

Encontrar el dominio y las raíces; clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales; además, hacer un bosquejo de la gráfica.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

## (C) Tercer parcial

(1) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$
   (a) Encuentre los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento
   (b) Encuentre los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad
   (c) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales
   (d) Haga un bosquejo de la gráfica

(2) Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de 10 metros.

(3) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida implícitamente por

$$x^2 - x\sqrt{xy} + y^2 = 1$$

en el punto $(1, 1)$.

# Respuestas

## (A) Primer parcial

(1) $\dfrac{1}{2x-3} \ge \dfrac{1}{|\,x+1\,|}$.

▼ Suponiendo que $x+1 \neq 0$ (es decir, que $x \neq -1$), se tiene que $|\,x+1\,| > 0$ y entonces

$$\frac{1}{2x-3} \ge \frac{1}{|\,x+1\,|} \Leftrightarrow \frac{|\,x+1\,|}{2x-3} \ge 1.$$

Para eliminar el valor absoluto se considera que

$$|\,x+1\,| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1>0 \\ -(x+1) & \text{si } x+1<0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{si } x>-1; \\ -(x+1) & \text{si } x<-1. \end{cases}$$

Como puede suceder que $x+1>0$ o bien que $x+1<0$, se separa el análisis en 2 casos:
(a) Si $x<-1$, entonces $x+1<0$ & $|\,x+1\,| = -(x+1)$, por lo cual

$$\frac{|\,x+1\,|}{2x-3} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{-(x+1)}{2x-3} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-(x+1)-(2x-3)}{2x-3} \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x-1-2x+3}{2x-3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+2}{2x-3} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc}
-3x+2 \ge 0 & \text{y} & 2x-3>0 & \text{o bien} & -3x+2 \le 0 & \text{y} & 2x-3<0; \\
-3x \ge -2 & \text{y} & 2x>3 & \text{o bien} & -3x \le -2 & \text{y} & 2x<3; \\
x \le \dfrac{2}{3} & \text{y} & x > \dfrac{3}{2} & \text{o bien} & x \ge \dfrac{2}{3} & \text{y} & x < \dfrac{3}{2};
\end{array}$$

$$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \bigcap \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \quad \text{o bien} \quad \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \bigcap \left[\frac{2}{3}, +\infty\right);$$

$$\emptyset \qquad \bigcup \qquad \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right);$$

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

Se ha llegado a que $\dfrac{2}{3} \le x < \dfrac{3}{2}$, pero bajo el supuesto de que $x<-1$.
Se debe considerar entonces a los $\mathbb{R}$ tales que $x<-1$ y que $\dfrac{2}{3} \le x < \dfrac{3}{2}$. Se puede notar que tales números reales $x$ no existen.
Por lo tanto, en este caso el conjunto solución es vacío ($\emptyset$).

(b) Si $x > -1$, entonces $x + 1 > 0$ y además $|\,x + 1\,| = x + 1$, por lo cual

$$\frac{|\,x+1\,|}{2x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x-3} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-(2x-3)}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1-2x+3}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc}
-x+4 \geq 0 & \text{y} & 2x-3 > 0 & \text{o bien} & -x+4 \leq 0 & \text{y} & 2x-3 < 0; \\
-x \geq -4 & \text{y} & 2x > 3 & \text{o bien} & -x \leq -4 & \text{y} & 2x < 3; \\
x \leq 4 & \text{y} & x > \dfrac{3}{2} & \text{o bien} & x \geq 4 & \text{y} & x < \dfrac{3}{2};
\end{array}$$

$$(-\infty, 4] \bigcap \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \quad \text{o bien} \quad \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \bigcap [4, +\infty)\,;$$
$$\left(\frac{3}{2}, 4\right] \qquad \bigcup \qquad \emptyset;$$
$$\left(\frac{3}{2}, 4\right].$$

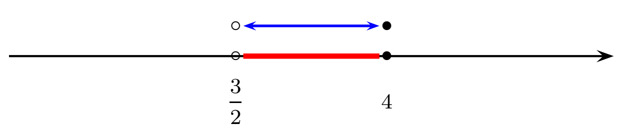
Se ha llegado a que $\dfrac{3}{2} < x \leq 4$, pero bajo el supuesto de que $x > -1$.

Se debe considerar entonces a los $x \in \mathbb{R}$ tales que $x > -1$ y que $\dfrac{3}{2} < x \leq 4$. Se observa que tales números reales $x$ son los que están en el intervalo $\left(\dfrac{3}{2}, 4\right]$.

Por lo tanto, en este caso el conjunto solución es el intervalo $\left(\dfrac{3}{2}, 4\right]$.

Debido a que puede suceder que $x < -1$ o bien que $x > -1$, el conjunto solución de la desigualdad original es la unión de los conjuntos solución parciales $\emptyset$ y $\left(\dfrac{3}{2}, 4\right]$. La unión da como resultado el intervalo $\left(\dfrac{3}{2}, 4\right]$. Por lo tanto, el conjunto solución $CS$ de la desigualdad original es

$$CS = \left(\frac{3}{2}, 4\right].$$




□

(2) Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{1-3x} \;\&\; g(x) = \frac{1}{x+1}\,.$$

(a) Encuentre ambos dominios

▼ El dominio de la función $f(x)$ es:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{1-3x} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1-3x \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \geq 3x \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq \frac{1}{3} \right\} = \left( -\infty, \frac{1}{3} \right].$$

El dominio de la función $g(x)$ es:

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, g(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{x+1} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x+1 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -1 \right\} = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

□

(b) Encuentre $g \circ f$ & $f \circ g$; encuentre ambos dominios

▼ La función $f$ compuesta con $g$ es

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{1-3x}] = \frac{1}{\sqrt{1-3x}+1}.$$

El dominio de la función $g \circ f$ es

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (g \circ f)(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, g[f(x)] \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in D_f \text{ y } f(x) \in D_g \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq \frac{1}{3} \text{ y } \sqrt{1-3x} \neq -1 \right\}.$$

Por ser $\sqrt{1-3x}$ la raíz positiva de $(1-3x)$, siempre será diferente de $-1$, por lo cual

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq \frac{1}{3} \right\} = \left( -\infty, \frac{1}{3} \right].$$

La función $g$ compuesta con $f$ es

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \sqrt{1 - 3\left(\frac{1}{x+1}\right)} =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{3}{x+1}} = \sqrt{\frac{x+1-3}{x+1}} = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}.$$

El dominio de la función $f \circ g$ es

$$D_{f\circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f \circ g)(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f[g(x)] \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -1 \text{ y } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{3} \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -1 \text{ y } \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \leq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -1 \text{ y } \frac{3-(x+1)}{3(x+1)} \leq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -1 \text{ y } \frac{2-x}{3(x+1)} \leq 0 \right\}.$$

Ahora bien, $\dfrac{2-x}{3(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x+1} \le 0$ que se cumple cuando

$$\begin{array}{ccccccc} 2-x \ge 0 & \text{y} & x+1<0 & \text{o bien} & 2-x \le 0 & \text{y} & x+1>0; \\ x \le 2 & \text{y} & x<-1 & \text{o bien} & x \ge 2 & \text{y} & x>-1; \\ & x<-1 & & \text{o bien} & & x \ge 2; & \\ & (-\infty,-1) & & \bigcup & & [2,+\infty)\,. & \end{array}$$

Entonces

$$D_{f\circ g} = (-\infty,-1) \bigcup [2,+\infty) = \mathbb{R} - [-1,2)\,.$$

□

(3) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+x-1 & \text{si } -2 \le x < 0; \\ 3 & \text{si } 0 \le x < 2; \\ -3x+1 & \text{si } 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

(a) Proporcionar el dominio de la función, sus raíces y su paridad.

▼ La función $f$ está definida para $-2 \le x < 0$, $0 \le x < 2$ & $2 \le x \le 4$, por lo cual su dominio es

$$D_f = [-2,0) \bigcup [0,2) \bigcup [2,4] = [-2,4]\,;$$
$$D_f = [-2,4]\,.$$

Raíces:
Para $x \in [-2,0)$ se tiene que $f(x) = 2x^2+x-1$ es una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola vertical que se abre hacia arriba a partir de su vértice
$V(h,k) = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{9}{8}\right)$, cuya abscisa se encuentra en el intervalo $[-2,0)$.

Las raíces de esta parábola cumplen

$$2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4}, \text{ de donde}$$
$$x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \;\&\; x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

pero $x_1 = \dfrac{1}{2}$ no está en el intervalo $[-2,0)$.

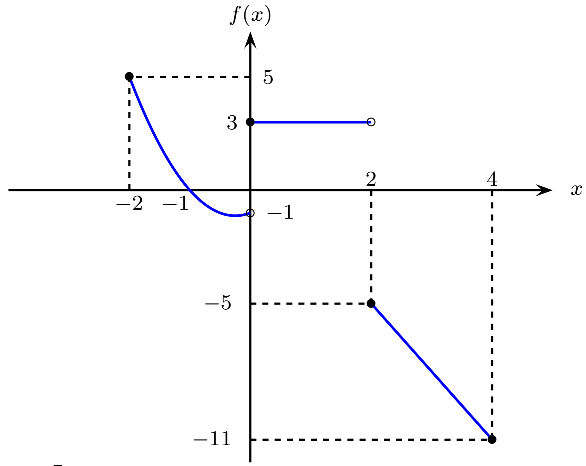
Para $x \in [0,2)$ se tiene que $f(x) = 3$ es una función constante, cuya gráfica es un segmento de la recta horizontal $y = 3$.

Para $x \in [2,4]$ se tiene que $f(x) = -3x+1$ es una función lineal cuya gráfica es un segmento de la recta $y = -3x+1$.
Paridad:
La función $f(x)$ no es par, ni impar.

□

(b) Hacer un bosquejo de la gráfica. Proporcione el rango de la función

▼ Un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ es:




Rango: $R_f = [-11, -5] \bigcup \left(-\frac{9}{8}, 5\right]$.

$\square$

## (B) Segundo parcial

(1) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x \le -1; \\ ax^2 + b & \text{si } -1 < x \le 2; \\ -1 & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$

(a) Encontrar los valores de $a$, $b$ para que la función sea continua en todo punto.

▼ Por ser polinomios son continuas las funciones:

$$f_1(x) = -x + 3 \text{ para } x \in (-\infty, -1]\,;$$
$$f_2(x) = ax^2 + b \text{ para } x \in (-1, 2] \text{ y}$$
$$f_3(x) = -1 \text{ para } x \in (2, +\infty)\,.$$

Sólo falta asegurar la continuidad en $x = -1$ y en $x = 2$.

Para $x = -1$ se tiene

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} (-x+3) = -(-1) + 3 = 4,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} (ax^2 + b) = a(-1)^2 + b = a + b, \text{ y además}$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow 4 = a + b.$$

Para $x = 2$ se tiene

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(ax^2 + b) = a(2)^2 + b = 4a + b,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-1) = -1, \text{ y además}$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4a + b = -1.$$

Entonces, las constantes $a$, $b$ deben cumplir con las ecuaciones $a + b = 4$ & $4a + b = -1$.

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 4a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -4 \\ \underline{4a + b = -1} \\ 3a = -5 \end{cases} \Rightarrow \quad a = -\frac{5}{3};$$

$$a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - a = 4 - \left(-\frac{5}{3}\right) = 4 + \frac{5}{3} = \frac{17}{3} \Rightarrow b = \frac{17}{3}\,.$$

Con los valores obtenidos $a = -\dfrac{5}{3}$ & $b = \dfrac{17}{3}$, se tiene que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 4 = f(-1) \text{ y que } \lim_{x\to 2} f(x) = -1 = f(2),$$

lo que asegura la continuidad de $f$ en $x = -1$ y en $x = 2$. Luego entonces,

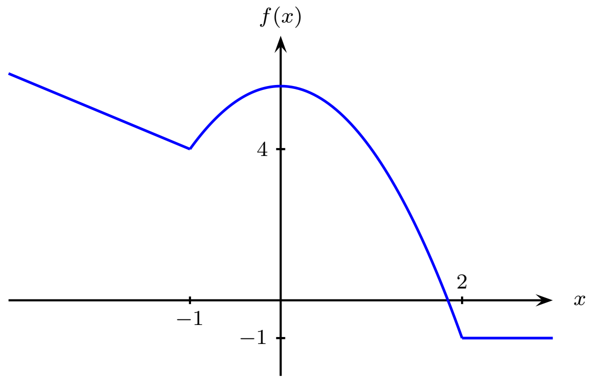
$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x \le -1; \\ -\dfrac{5}{3}x^2 + \dfrac{17}{3} & \text{si } -1 < x \le 2; \\ -1 & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

es una función continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R}\,.$

$\square$

(b) Graficar la función con los valores encontrados

▼ Un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es el siguiente:




$\square$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{4 - \sqrt{x+15}}{x^2 - 1}\,.$

▼ Tenemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{4 - \sqrt{x+15}}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1} \times \frac{4+\sqrt{x+15}}{4+\sqrt{x+15}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{16-(x+15)}{(x^2-1)(4+\sqrt{x+15})} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)}{(x-1)(x+1)(4+\sqrt{x+15})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)(4+\sqrt{x+15})};$$

si $x \neq 1$, entonces cancelamos $(x-1)$ y obtenemos

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x+1)(4+\sqrt{x+15})} = \frac{-1}{(1+1)(4+\sqrt{1+15})} = \frac{-1}{2(4+4)} = -\frac{1}{16}\,.$$

Luego entonces,

$$\lim_{x\to 1} \frac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1} = -\frac{1}{16}\,.$$

$\square$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$.

▼ Vemos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{|\,x\,|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{-5}{\sqrt{1}} = -5.$$

Luego entonces,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}} = -5\,.$$

□

(4) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2}{x^3-x^2}\,.$$

Encontrar el dominio y las raíces; clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales; además, hacer un bosquejo de la gráfica.

▼ Dominio:
Por ser $f(x)$ una función racional, su dominio es:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^3 - x^2 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^2(x-1) = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{\,0, 1\,\}\,.$$

Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ así como también } x = -3.$$

Pero como $x = 0 \notin D_f$, sólo $x = -3$ es raíz.

Discontinuidades:
Por ser $f$ una función racional, es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{\,0, 1\,\}$, por lo que $f$ es discontinua en $x = 0$ y en $x = 1$.
Para averiguar los tipos de discontinuidades calculamos

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{x^3+3x^2}{x^3-x^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2(x+3)}{x^2(x-1)} = \lim_{x\to0} \frac{x+3}{x-1} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Por lo cual $f$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad removible o evitable.

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x+3}{x-1} = \,?$$

(a) Cuando $x \to 1^-$, sucede que $x + 3 \to 4$ y que $x - 1 \to 0$ con valores negativos, por lo tanto $\dfrac{x+3}{x-1} \to -\infty$; entonces, $\displaystyle\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

(b) Cuando $x \to 1^+$, sucede que $x+3 \to 4$ y que $x-1 \to 0$ con valores positivos, por lo tanto $\dfrac{x+3}{x-1} \to +\infty$; entonces, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Por lo cual, $f$ tiene en $x = 1$ una discontinuidad esencial o, más aún, una discontinuidad infinita.

Asíntotas:

Asíntotas verticales

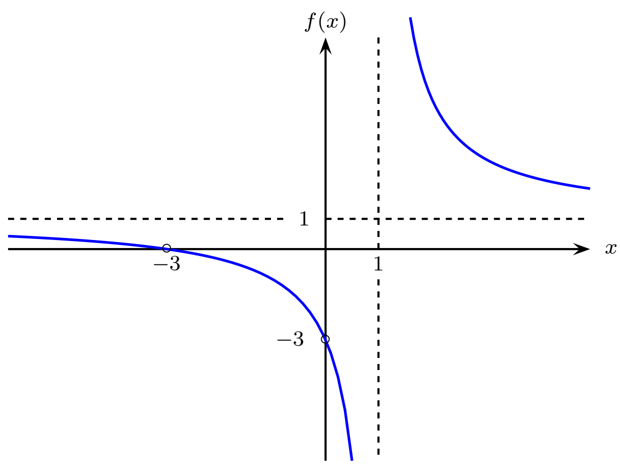
Debido a que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ y a que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, se puede afirmar que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función $f$. Además es la única.

Asíntotas horizontales

Vemos que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+3x^2}{x^3-x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3(1+\frac{3}{x})}{x^3(1-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Entonces, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal y es la única ya que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

El bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ es el siguiente:




□

## (C) Tercer parcial

(1) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$.

(a) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos críticos

▼ Calculamos la derivada:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = x^{-1} - x^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = -x^{-2} + 3x^{-4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{-x^2+3}{x^4} = \frac{3-x^2}{x^4}.$$

Debido a que $x^4 > 0$ para $x \neq 0$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow |\,x\,|^2 < (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow |\,x\,| < \sqrt{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \text{ con } x \neq 0; \\
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow |\,x\,|^2 > (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow |\,x\,| > \sqrt{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x < -\sqrt{3} \text{ o bien } x > \sqrt{3}; \\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ o bien } x = \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,
La función $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $\big(-\sqrt{3}, 0\big)$ y en $\big(0, \sqrt{3}\big)$.
La función $f(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $\big(-\infty, -\sqrt{3}\big)$ y en $\big(\sqrt{3}, +\infty\big)$.
Puntos críticos:
La función $f(x)$ tiene puntos críticos en $x = -\sqrt{3}$ y en $x = \sqrt{3}$.
Además por el criterio de la primera derivada:

- La función $f(x)$ tiene en $x = -\sqrt{3}$ un mínimo local estricto

$$
f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^2 - 1}{-(3^{1/2})^3} = \frac{3-1}{-3^{3/2}} = \frac{2}{-3^{3/2}} \approx -0.3849001
$$

  ya que $f$ decrece antes de $x = -\sqrt{3}$ y crece después de $x = -\sqrt{3}$.
- La función $f(x)$ tiene en $x = \sqrt{3}$ un máximo local estricto, $f(\sqrt{3}) = 0.3849001$ ya que $f$ crece antes de $x = \sqrt{3}$ y decrece después de $x = \sqrt{3}$.

Todo ello concuerda con el hecho de que $f(x)$ es impar.

$\square$

(b) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión

▼ Calculamos la segunda derivada

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3 - x^2}{x^4} = \frac{3}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} = 3x^{-4} - x^{-2} \Rightarrow \\
\Rightarrow f''(x) &= -12x^{-5} + 2x^{-3} = -\frac{12}{x^5} + \frac{2}{x^3} = \frac{-12 + 2x^2}{x^5} = \frac{2x^2 - 12}{x^5}.
\end{aligned}
$$

La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba cuando $f''(x) > 0$, esto es

$$
\begin{array}{ccccccc}
2x^2 - 12 < 0 & \text{y} & x^5 < 0 & \text{o bien} & 2x^2 - 12 > 0 & \text{y} & x^5 > 0; \\
x^2 < 6 & \text{y} & x < 0 & \text{o bien} & x^2 > 6 & \text{y} & x > 0; \\
|\,x\,|^2 < (\sqrt{6})^2 & \text{y} & x < 0 & \text{o bien} & |\,x\,|^2 > (\sqrt{6})^2 & \text{y} & x > 0; \\
|\,x\,| < \sqrt{6} & \text{y} & x < 0 & \text{o bien} & |\,x\,| > \sqrt{6} & \text{y} & x > 0; \\
-\sqrt{6} < x < \sqrt{6} & \text{y} & x < 0 & \text{o bien} & x > \sqrt{6}; & & \\
 & & -\sqrt{6} < x < 0 & \text{o bien} & x > \sqrt{6}. & &
\end{array}
$$

$$
\left(-\sqrt{6}, 0\right) \bigcup \left(\sqrt{6}, +\infty\right) \approx (-2.4494897, 0) \bigcup (2.4494897, +\infty).
$$

La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo cuando $f''(x) < 0$, esto es

$$\begin{array}{ccccccc}
2x^2 - 12 < 0 & \text{y} & x^5 > 0 & \text{o bien} & 2x^2 - 12 > 0 & \text{y} & x^5 < 0; \\
x^2 < 6 & \text{y} & x > 0 & \text{o bien} & x^2 > 6 & \text{y} & x < 0; \\
|\,x\,|^2 < (\sqrt{6})^2 & \text{y} & x > 0 & \text{o bien} & |\,x\,|^2 > (\sqrt{6})^2 & \text{y} & x < 0; \\
|\,x\,| < \sqrt{6} & \text{y} & x > 0 & \text{o bien} & |\,x\,| > \sqrt{6} & \text{y} & x < 0; \\
-\sqrt{6} < x < \sqrt{6} & \text{y} & x > 0 & \text{o bien} & x > \sqrt{6} \text{ o bien } x < -\sqrt{6} & \text{y} & x < 0; \\
 & & 0 < x < \sqrt{6} & \text{o bien} & x < -\sqrt{6}; & & \\
 & & \left(0, \sqrt{6}\right) & \bigcup & \left(-\infty, -\sqrt{6}\right). & &
\end{array}$$

La función $f(x)$ tiene cambios de concavidad en $x = -\sqrt{6}$, $x = 0$ y en $x = \sqrt{6}$; pero sólo es continua en $x = -\sqrt{6}$ y en $x = \sqrt{6}$; de hecho $f''(x)$ no existe en $x = 0$.
Puntos de inflexión
Entonces la función $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{6}$ y en $x = \sqrt{6}$.

□

(c) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales
▼ Asíntotas:
Verticales.
La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$ es continua en toda la recta real, excepto en $x = 0$.
Además:
Cuando $x \to 0^-$, sucede que $(x^2 - 1) \to -1$ y que $x^3 \to 0$ con valores negativos. Por lo que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^3} = +\infty.$$

Cuando $x \to 0^+$, sucede que $(x^2 - 1) \to -1$ y que $x^3 \to 0$ con valores positivos. Por lo que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^3} = -\infty.$$

Luego entonces, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical y es la única.

Horizontales.
Ahora bien,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 0,$$

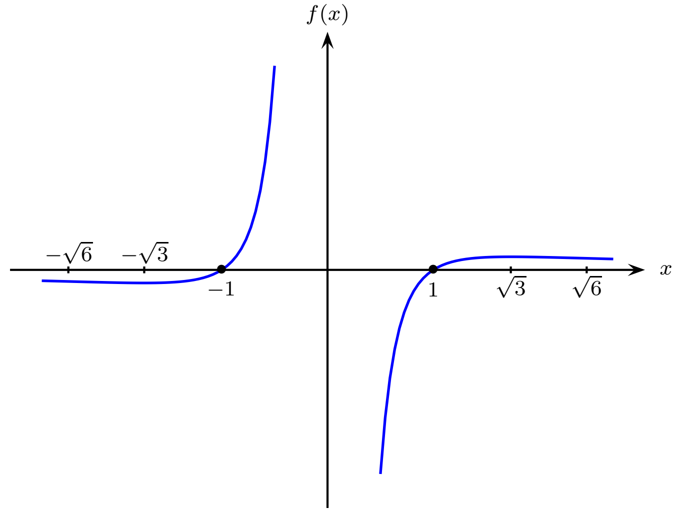
además de que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Por lo tanto, la recta $y = 0$ es la única asíntota horizontal.

□

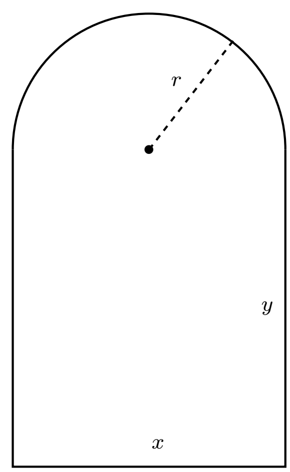
(d) Haga un bosquejo de la gráfica
▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:




□

(2) Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de 10 metros.

▼ Sean $x > 0$ & $y > 0$ en metros las dimensiones de la parte rectangular de la ventana. Sea su figura la siguiente:




Si $A$ es el área y $P$ es el perímetro de la ventana, entonces

$$A = xy + \frac{1}{2}\pi r^2 \ \&\ P = x + 2y + \pi r.$$

Pero, debido a que $r = \dfrac{x}{2}$ y a que $P = 10$:

$$A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \ \&\ 10 = x + 2y + \pi\left(\frac{x}{2}\right);$$
$$A = xy + \frac{\pi}{8}x^2 \ \&\ 10 = x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y.$$

Es decir, tenemos una función $\left[A = xy + \dfrac{\pi}{8}x^2\right]$ y una ecuación $\left[x\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2y = 10\right]$.

De la ecuación despejamos la variable $y$ para luego sustituirla en la función $A$.

$$\left(1+\frac{\pi}{2}\right)x + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - \left(1+\frac{\pi}{2}\right)x \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left[10 - \left(1+\frac{\pi}{2}\right)x\right] =$$
$$= \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2+\pi}{2}\right)x \Rightarrow y = 5 - \frac{2+\pi}{4}x.$$

sustituyendo ahora en $A$:

$$A(x) = xy + \frac{\pi}{8}x^2 = x\left(5 - \frac{2+\pi}{4}x\right) + \frac{\pi}{8}x^2 = 5x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 =$$
$$= \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{2+\pi}{4}x^2 + 5x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2+\pi}{4}\right)x^2 + 5x =$$
$$= \frac{\pi - 2(2+\pi)}{8}x^2 + 5x = \frac{\pi - 4 - 2\pi}{8}x^2 + 5x =$$
$$= \frac{-\pi - 4}{8}x^2 + 5x \Rightarrow A(x) = -\frac{\pi+4}{8}x^2 + 5x;$$

ésa es la función a maximizar.

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{8}(2x) + 5 = -\frac{\pi+4}{4}x + 5;$$
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi+4}{4}x + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi+4}{4}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{20}{\pi+4}.$$

Entonces, $A(x)$ tiene un punto crítico en $x_1 = \dfrac{20}{\pi+4}$.

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{4}x + 5 \Rightarrow A''(x) = -\frac{\pi+4}{4} \text{ para cada } x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A''(x_1) = -\frac{\pi+4}{4} \Rightarrow A''(x_1) < 0.$$

$A(x)$ tiene un máximo local estricto en $x_1 = \dfrac{20}{\pi+4}$, luego entonces el área $A$ de la ventana es máxima cuando $x = \dfrac{20}{\pi+4}$ m y cuando

$$y = 5 - \frac{2+\pi}{4}x = 5 - \left(\frac{\pi+2}{4}\right)\left(\frac{20}{\pi+4}\right) = 5 - \frac{5(\pi+2)}{\pi+4} =$$
$$= 5\left(1 - \frac{\pi+2}{\pi+4}\right) = 5\left(\frac{\pi+4-\pi-2}{\pi+4}\right) = 5\left(\frac{2}{\pi+4}\right) = \frac{10}{\pi+4} = \frac{x}{2};$$

es decir, cuando $x = \dfrac{20}{\pi+4}$ y cuando $y = \dfrac{10}{\pi+4}$ metros.

□

(3) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida implícitamente por

$$x^2 - x\sqrt{xy} + y^2 = 1$$

en el punto $(1, 1)$.

▼ Derivando con respecto a $x$ se obtiene

$$\frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x - \left[x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right] + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(2y - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{4y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 4x}{2}\right) = \frac{3x^{\frac{1}{2}}y - 4xy^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y\sqrt{x} - 4x\sqrt{y}}{4y\sqrt{y} - x\sqrt{x}}\,.$$

Valuando en $x = 1$ y en $y = 1$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{3(1) - 4(1)}{4(1) - 1} = \frac{-1}{3}\,.$$

Luego entonces,

la pendiente de la recta tangente es m$= -\dfrac{1}{3}$ y la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\,.$$

□