CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E2500

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{2}{x} - 5 < \dfrac{3}{x} + 2$.

(2) $|\,2x - 3\,| \geq |\,2 - 3x\,|$.

(3) Un pedazo de cable de 10 m es cortado en dos trozos de longitudes x & $10 - x$. El primero se dobla en forma circular y el segundo en forma de cuadrado. Exprese la suma de las áreas del cuadrado y el círculo por medio de una función f de x.

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -5; \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } |\,x\,| \leq 5; \\ 5 - x & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

Obtenga las raíces, un esbozo de la gráfica y el rango de f. Diga si la función es par, impar o ninguna de las dos.

(5) Sean $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ & $g(x) = \sqrt{1 - x}$
  (a) Determine los dominios de f y g
  (b) Obtenga la regla de correspondencia de la función $h(x) = [f(x)]^2 + [g(x^2)]^2$
  (c) Obtenga la regla de correspondencia de g/f y su dominio
  (d) Obtenga la regla de correspondencia de $f \circ g$ y su dominio

(B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{|\,x\,| - x}{x}$.

(3) Para la función $f(x) = \dfrac{4x^2 - 8x}{x^2 - 4}$, realice lo siguiente:
  (a) Determine su dominio y raíces
  (b) Clasifique sus puntos de discontinuidad
  (c) Encuentre las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales
  (d) Haga un esbozo de la gráfica empleando la información obtenida en los incisos anteriores

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \leq -3; \\ \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} & \text{si } -3 < x < 3; \\ d & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Encuentre los valores de c, d que hacen continua la función con esas características, en todo $\mathbb{R}$.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(5) Verifique que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1. Proporcione un intervalo de longitud $1/4$ que contenga dicha raíz.

(C) Tercer parcial

(1) Verifique que las gráficas de las ecuaciones

$$2x^2 + y^2 = 6 \ \& \ y^2 = 4x$$

en los puntos de corte, presenten tangentes perpendiculares entre sí.

(2) Obtenga la derivada de la función dada y simplifíquela
  (a) $f(x) = \dfrac{[(2x+1)^{10}+1]^{10}}{x}$
  (b) $g(x) = 2x(2x+1)^4(2x+3)^5$

(3) Para la función $f(x) = 3x^5 + 5x^4$, determine:
  (a) Las raíces
  (b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento
  (c) Máximos y mínimos relativos
  (d) Los intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo
  (e) Puntos de inflexión
  (f) La gráfica

(4) Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal sin tapa que tenga una capacidad de un metro cúbico. Encuentre las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material sea mínima (ignore el espesor del material y lo que se desperdicia en la construcción).

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{2}{x} - 5 < \dfrac{3}{x} + 2$.

▼ Transponiendo términos

$$\frac{2}{x} - 5 - \frac{3}{x} - 2 < 0.$$

Efectuando las operaciones indicadas

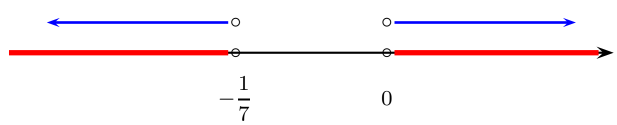
$$\frac{2 - 5x - 3 - 2x}{x} < 0 \Leftrightarrow -\frac{7x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{7x+1}{x} > 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$\begin{array}{rclcrcl}
7x + 1 > 0 & \text{y} & x > 0 & \text{o bien} & 7x + 1 < 0 & \text{y} & x < 0; \\
7x > -1 & \text{y} & x > 0 & \text{o bien} & 7x < -1 & \text{y} & x < 0; \\
x > -\dfrac{1}{7} & \text{y} & x > 0 & \text{o bien} & x < -\dfrac{1}{7} & \text{y} & x < 0; \\
x \in \left(-\dfrac{1}{7}, +\infty\right) & \text{y} & x \in (0, +\infty) & \text{o bien} & x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{7}\right) & \text{y} & x \in (-\infty, 0)\,; \\
x \in \left(-\dfrac{1}{7}, +\infty\right) \bigcap (0, +\infty) = (0, +\infty) & & & \text{o bien} & x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{7}\right) \bigcap (-\infty, 0) = \left(-\infty, -\dfrac{1}{7}\right) & & .
\end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es

$$CS = \left(-\infty, -\frac{1}{7}\right) \bigcup (0, +\infty)$$



Para confirmar, utilizando valores de $x = -1$ y de $x = 1$ que sí estan en el conjunto solución, y sustituyendo en la desigualdad propuesta se obtiene

$$\frac{2}{-1} - 5 < \frac{3}{-1} + 2 \Leftrightarrow -2 - 5 < -3 + 2 \Leftrightarrow -7 < -1;$$
$$\frac{2}{1} - 5 < \frac{3}{1} + 2 \Leftrightarrow 2 - 5 < 3 + 2 \Leftrightarrow -3 < 5;$$

que son sendas identidades.

En cambio, es claro que $x = 0$ no pertenece al conjunto solución, y para $x = -\dfrac{1}{7}$ se tiene

$$\frac{2}{-\frac{1}{7}} - 5 < \frac{3}{-\frac{1}{7}} + 2 \Leftrightarrow -14 - 5 < -21 + 2 \Leftrightarrow -19 < -19,$$

lo cual no se cumple.

□

(2) $|\,2x-3\,| \geq |\,2-3x\,|$.

▼ La desigualdad se cumple si $x=\dfrac{2}{3}$, pues el segundo miembro es 0.

Si $x \neq \dfrac{2}{3}$,

$$|\,2x-3\,| \geq |\,2-3x\,| \Leftrightarrow \frac{|\,2x-3\,|}{|\,2-3x\,|} \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x-3}{2-3x}\right| \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{2x-3}{2-3x} \geq 1 &\quad \text{o bien} \quad \frac{2x-3}{2-3x} \leq -1 \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow \frac{2x-3}{2-3x} - 1 \geq 0 &\quad \text{o bien} \quad \frac{2x-3}{2-3x} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow \frac{2x-3-2+3x}{2-3x} \geq 0 &\quad \text{o bien} \quad \frac{2x-3+2-3x}{2-3x} \leq 0 \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow \frac{5x-5}{2-3x} \geq 0 &\quad \text{o bien} \quad \frac{-x-1}{2-3x} \leq 0 \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow \frac{x-1}{2-3x} \geq 0 &\quad \text{o bien} \quad \frac{x+1}{2-3x} \geq 0.
\end{aligned}$$

Vamos a resolver las desigualdades por separado

(a) La primera: $\dfrac{x-1}{2-3x} \geq 0$ se cumple cuando

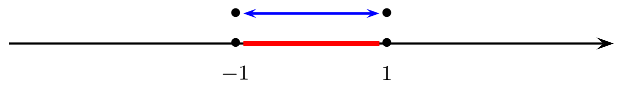
$$\begin{array}{ccccccc}
x-1 \geq 0 & \text{y} & 2-3x > 0 & \text{o bien} & x-1 \leq 0 & \text{y} & 2-3x < 0;\\
x \geq 1 & \text{y} & 2 > 3x & \text{o bien} & x \leq 1 & \text{y} & 2 < 3x;\\
x \geq 1 & \text{y} & x < \dfrac{2}{3} & \text{o bien} & x \leq 1 & \text{y} & x > \dfrac{2}{3};\\
\multicolumn{3}{c}{\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \bigcap [1, +\infty)} & \text{o bien} & \multicolumn{3}{c}{(-\infty, 1] \bigcap \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right);}\\
\multicolumn{3}{c}{x \in \emptyset} & \text{o bien} & \multicolumn{3}{c}{x \in \left(\dfrac{2}{3}, 1\right].}
\end{array}$$

(b) La segunda: $\dfrac{x+1}{2-3x} \geq 0$ se cumple cuando

$$\begin{array}{ccccccc}
x+1 \geq 0 & \text{y} & 2-3x > 0 & \text{o bien} & x+1 \leq 0 & \text{y} & 2-3x < 0;\\
x \geq -1 & \text{y} & 2 > 3x & \text{o bien} & x \leq -1 & \text{y} & 2 < 3x;\\
x \geq -1 & \text{y} & x < \dfrac{2}{3} & \text{o bien} & x \leq -1 & \text{y} & x > \dfrac{2}{3};\\
\multicolumn{3}{c}{\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \bigcap [-1, +\infty)} & \text{o bien} & \multicolumn{3}{c}{(-\infty, -1] \bigcap \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right);}\\
\multicolumn{3}{c}{x \in \left[-1, \dfrac{2}{3}\right)} & \text{o bien} & \multicolumn{3}{c}{x \in \emptyset.}
\end{array}$$

Luego el conjunto solución es

$$CS = \left[-1, \frac{2}{3}\right) \bigcup \left(\frac{2}{3}, 1\right] \bigcup \left\{\, \frac{2}{3} \,\right\} = [-1, 1]\,.$$



Si, por ejemplo, $x = 2$, la desigualdad no se cumple pues $|\,4 - 3\,| \not\geq |\,2 - 6\,|$.

$\square$

(3) Un pedazo de cable de 10 m es cortado en dos trozos de longitudes x & $10 - x$. El primero se dobla en forma circular y el segundo en forma de cuadrado. Exprese la suma de las áreas del cuadrado y el círculo por medio de una función f de x.

▼ Se sabe que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$; como $2\pi r = x \Leftrightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$ y como el área del círculo es $A_\circ = \pi r^2 = \pi\dfrac{x^2}{4\pi^2} = \dfrac{x^2}{4\pi}$, si el lado de un cuadrado es l, su perímetro es $4l$ y como $4l = 10 - x$, entonces, $l = \dfrac{10 - x}{4}$ y el área del cuadrado es $A_\square = l^2 = \dfrac{(10 - x)^2}{16}$.
Por lo tanto, la suma de las dos áreas es

$$A = A_\circ + A_\square = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(10 - x)^2}{16}\,.$$

$\square$

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -5; \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } |\,x\,| \leq 5; \\ 5 - x & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

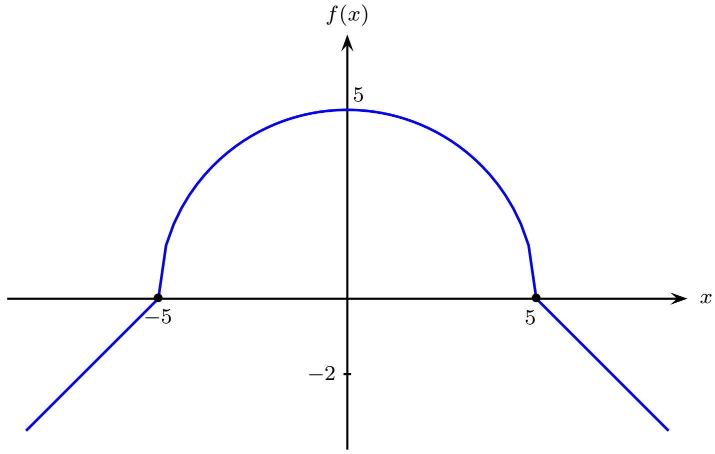
Obtenga las raíces, un esbozo de la gráfica y el rango de f. Diga si la función es par, impar o ninguna de las dos.

▼ Raíces:
$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$, pero $f(x) = x + 5$ sólo si $x < -5$.

$$\sqrt{25 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 25 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 25 = x^2 \Leftrightarrow 5 = |\,x\,| \Leftrightarrow x = \pm 5.$$

Que son raíces de la función.
De la misma forma, $5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$, pero $f(x) = 5 - x$ sólo si $x > 5$, luego las únicas raíces son $x = \pm 5$.

La gráfica de $f(x)$ es la siguiente



Como

$$y = \sqrt{25 - x^2} \Leftrightarrow y^2 = 25 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2,$$

en el intervalo $[-5, 5]$ la gráfica de $f(x)$ es la semicircunferencia superior con centro en el origen y radio 5. En $(-\infty, -5)$ y en $(5, +\infty)$ la gráfica de f son porciones de las rectas $y = x + 5$ & $y = -x + 5$ de pendiente 1 & -1 respectivamente, y ordenada al origen 5.

Así se ve que el rango es

$$R_f = (-\infty, 5]\,.$$

$\square$

(5) Sean

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \;\;\&\; g(x) = \sqrt{1 - x}.$$

(a) Determine sus dominios

▼ Dominios:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 1 \geq 0 \right\} \text{ y } D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 1 - x \geq 0 \right\}.$$

Pero como

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |\,x\,| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ o bien } x \leq -1 \;\&\; 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x,$$

se tiene que

$$D_f = (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1) \;\;\&\; D_g = (-\infty, 1]\,.$$

$\square$

(b) Obtenga la regla de correspondencia de la función: $h(x) = [f(x)]^2 + [g(x^2)]^2$

▼ Tenemos

$$h(x) = (\sqrt{x^2 - 1})^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 = x^2 - 1 + 1 - x^2 = 0.$$

$\square$

(c) Obtenga la regla de correspondencia de $\dfrac{g}{f}$ y su dominio.

▼ Regla de correspondencia:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \sqrt{\frac{-1}{x+1}}\,.$$

Dominio:

$$D_{g/f} = D_f \bigcap D_g - \left\{ x \in D_f \mid f(x) = 0 \right\}.$$

Pero como

$$D_f \bigcap D_g = \Big[(-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)\Big] \bigcap (-\infty, 1] = (-\infty, -1] \bigcup \{1\},$$

entonces,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |\, x \,| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_{g/f} = (-\infty, -1] \bigcup \{ 1 \} - \{ \pm 1 \} = (-\infty, -1).$$

$\square$

(d) Obtenga la regla de correspondencia de $f \circ g$ y su dominio

▼ Regla de correspondencia:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{1 - x}] = \sqrt{(\sqrt{1 - x})^2 - 1} = \sqrt{1 - x - 1} = \sqrt{-x}.$$

Dominio:

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in (-\infty, 1] \;\middle|\; \sqrt{1 - x} \in (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty) \right\}.$$

Y, mientras que no es posible que $\sqrt{1 - x} \leq -1$,
sí puede ser que $\sqrt{1 - x} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$, luego entonces:

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in (-\infty, 1] \mid x \leq 0 \right\} = (-\infty, 0].$$

$\square$

(B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6}$.

▼ Tenemos que

$$\frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x^3 + 2^3}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x + 3)} =$$
$$= \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 3}, \text{ si } x + 2 \neq 0, \text{ es decir, si } x \neq -2.$$

Luego entonces,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 3} = \frac{4 + 4 + 4}{-2 + 3} = \frac{12}{1} = 12.$$

$\square$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{|\, x \,| - x}{x}$.

▼ Tenemos que

$$\frac{|\, x \,| - x}{x} = \begin{cases} \dfrac{x - x}{x} & \text{si } x > 0; \\[2ex] \dfrac{-x - x}{x} & \text{si } x < 0; \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{0}{x} & \text{si } x > 0; \\[2ex] \dfrac{-2x}{x} & \text{si } x < 0; \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0; \\[2ex] -2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por lo que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|-x}{x}=\lim_{x\to 0^+}0=0\ \&\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}-2=-2;$$

y como

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|-x}{x}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|-x}{x},\ \text{entonces no existe}\ \lim_{x\to 0}\frac{|\,x\,|-x}{x}.$$

□

(3) Para la función $f(x)=\dfrac{4x^2-8x}{x^2-4}$, realice lo siguiente:

(a) Determine su dominio y raíces

▼ Dominio:

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x^2-4=0\,\right\}.$$

Pero $x^2-4=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow|\,x\,|=2\Leftrightarrow x=\pm 2$.
Por lo que $D_f=\mathbb{R}-\{\,\pm 2\,\}$.

Raíces:
Para hallar las raíces se considera cuando $f(x)=0$, esto es cuando

$$4x^2-8x=0\Leftrightarrow 4x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0\ \text{y cuando}\ x=2.$$

Pero como $2\notin D_f$, entonces la única raíz es $x=0$.

□

(b) Clasifique sus puntos de discontinuidad

▼ Se sabe que

$$f(x)=\frac{4x^2-8x}{x^2-4}=\frac{4x(x-2)}{(x+2)(x-2)}\,.$$

Por lo que la función es discontinua en $x=2$ y en $x=-2$.
Se calcula

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-8x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{4x(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{4x}{x+2}=\frac{8}{4}=2.$$

Por lo que en $x=2$, la función tiene una discontinuidad removible, ya que, si se define $f(2)=2$, la función resultaría continua.
Por el contrario, como

$$\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2^\pm}\frac{4x^2-8x}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^\pm}\frac{4x(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\mp\infty$$

pues

$$\lim_{x\to -2}[4x(x-2)]=32\ \text{y}\ \lim_{x\to -2^\pm}[(x+2)(x-2)]=0^\mp$$

ya que

$$\lim_{x\to -2}(x-2)=-4\ \text{y}\ \lim_{x\to -2^\pm}(x+2)=0^\pm.$$

La discontinuidad en $x=-2$ es esencial; de hecho es infinita.

□

(c) Encuentre las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales

▼ Por los resultados obtenidos en el inciso anterior $[\lim\limits_{x\to -2^\pm}f(x)=\mp\infty]$, se concluye que la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Para hallar las asíntotas horizontales se determina

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2-8x}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(4-\dfrac{8}{x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)} =$$

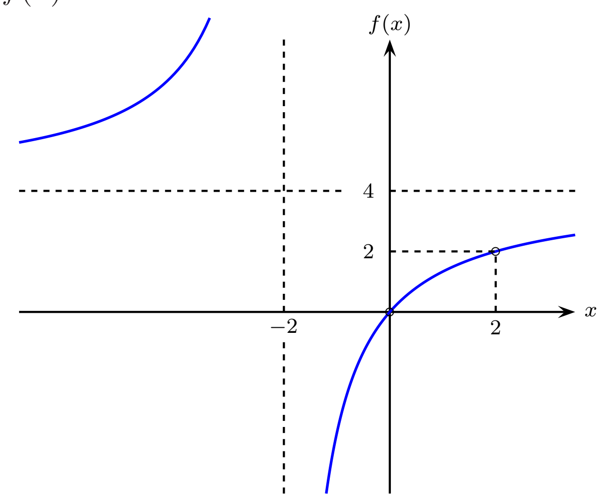
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4-\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{4-0}{1-0} = \frac{4}{1} = 4.$$

Entonces la recta $y = 4$ es una asíntota horizontal.

□

(d) Haga un esbozo de la gráfica empleando la información obtenida en los incisos anteriores

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \le -3; \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & \text{si } -3 < x < 3; \\ d & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$$

Encuentre los valores de c, d que hacen continua la función con esas características, en todo $\mathbb{R}$.

▼ Para que la función sea continua en $x = -3$, se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3)$, esto es, que

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x) = c.$$

Se sabe que

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} c = c.$$

Calculemos

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}}.$$

Ahora, racionalizando el denominador:

$$\frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{(4-\sqrt{x^2+7})(4+\sqrt{x^2+7})} = \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{16-(x^2+7)} =$$

$$= \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{9-x^2} = 4+\sqrt{x^2+7}.$$

Lo anterior si $9-x^2 \neq 0$, es decir, si $9 \neq x^2$, o bien $|\,x\,| \neq 3$, esto es $x \neq \pm 3$.
Entonces,

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = \lim_{x\to -3^-} (4+\sqrt{x^2+7}) = 4+\sqrt{9+7} = 4+\sqrt{16} = 4+4 = 8.$$

Luego la función $f(x)$ será continua en $x=-3$ si $c=8$.
Análogamente, para que $f(x)$ sea continua en $x=3$, se requiere que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$, esto es que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = d.$$

Se sabe que

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} d = d$$

así como también que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (4+\sqrt{x^2+7}) = 8.$$

Luego, $f(x)$ será continua en $x=3$ si $d=8$.
Es claro que en $(-\infty,-3]\,,(-3,3)$ y en $[3,+\infty)$ $f(x)$ es continua, por lo que si $c=d=8$ $f(x)$, resulta continua en $\mathbb{R}$.
Nótese que en $(-\infty,-3]$ y en $[3,+\infty)$ $f(x)$ es constante, por lo que es continua y $\dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}}$ es continua en su dominio, en particular en el intervalo $(-3,3)$, pues como $x^2+7>0$ para cualquier $x\in\mathbb{R}$, los únicos puntos de discontinuidad de $\dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}}$ son aquellos $x\in\mathbb{R}$ tales que $4-\sqrt{x^2+7}=0$, es decir, aquellos para los cuales

$$\sqrt{x^2+7} = 4 \Leftrightarrow x^2+7 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |\,x\,| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

□

(5) Verifique que la ecuación $x^3+x-1=0$ tiene una raíz entre 0 y 1. Proporcione un intervalo de longitud $1/4$ que contenga dicha raíz.

▼ La función $f(x)=x^3+x-1$ es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $[0,1]$.
Se tiene $f(0)=-1<0$ y también $f(1)=1>0$, por lo que en el intervalo $(0,1)$ la función f tiene al menos una raíz, según el teorema del Valor Intermedio.
Además

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 < 0.$$

Por lo que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

Por otro lado,

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 > 0.$$

De donde se sigue que $f(x)$ tiene una raíz c en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ de longitud $\frac{1}{4}$.

□

(C) Tercer parcial

(1) Verifique que las gráficas de las ecuaciones

$$2x^2 + y^2 = 6 \ \& \ y^2 = 4x$$

en los puntos de corte, presenten tangentes perpendiculares entre sí.

▼ Se encuentran los puntos de corte resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 6 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 6 \\ \underline{-y^2 = -4x} \\ 2x^2 = 6 - 4x \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \ \& \ x = 1.$$

Sustituyendo $x = -3$ en la primera ecuación

$$2(-3)^2 + y^2 = 6 \Leftrightarrow 18 + y^2 = 6 \Leftrightarrow y^2 = 6 - 18 < 0,$$

comprobamos que para $x = -3$ no existe punto para la ecuación $2x^2 + y^2 = 6$.
Sustituyendo $x = 1$ se tiene

$$2(1)^2 + y^2 = 6 \Leftrightarrow 2 + y^2 = 6 \Leftrightarrow y^2 = 6 - 2 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow |\, y \,| = 2 \Leftrightarrow y = \pm 2.$$

Entonces $(1, 2)$ y $(1, -2)$ son los puntos de corte.
Ahora, derivando ambas ecuaciones implícitamente se tiene

$$2x^2 + y^2 = 6 \Rightarrow 4x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{4x}{2y} = -\frac{2x}{y} \text{ así como}$$

$$y^2 = 4x \Rightarrow 2yy' = 4 \Rightarrow y' = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}\,.$$

En el punto $(1, 2)$ la pendiente de las respectivas tangentes vale

$$y'_{(1,2)} = -\frac{2(1)}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \ \& \ y'_{(1,2)} = \frac{2}{2} = 1.$$

Luego efectivamente, ambas tangentes son ortogonales al igual que en $(1, -2)$ pues

$$y'_{(1,-2)} = -\frac{2(1)}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ y } y'_{(1,-2)} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Es decir, son negativamente recíprocas.

□

(2) Obtenga la derivada de la función enunciada y simplifíquela.

(a) $f(x) = \dfrac{[(2x+1)^{10} + 1]^{10}}{x}$

▼ Derivamos

$$f'(x) = \frac{10x[(2x+1)^{10} + 1]^9 10(2x+1)^9 2 - [(2x+1)^{10} + 1]^{10}}{x^2} =$$

$$= \frac{[(2x+1)^{10} + 1]^9 \{200x(2x+1)^9 - [(2x+1)^{10} + 1]\}}{x^2}\,.$$

□

(b) $g(x) = 2x(2x+1)^4(2x+3)^5$

▼ Vemos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(2x+1)^4(2x+3)^5 + 2x \times 4(2x+1)^3 \times 2(2x+3)^5 + 2x(2x+1)^4 \times 5(2x+3)^4 \times 2 = \\ &= 2(2x+1)^3(2x+3)^4[(2x+1)(2x+3) + 8x(2x+3) + 10x(2x+1)] = \\ &= 2(2x+1)^3(2x+3)^4(4x^2+8x+3+16x^2+24x+20x^2+10x) = \\ &= 2(2x+1)^3(2x+3)^4(40x^2+42x+3). \end{aligned}$$

□

(3) Para la función $f(x) = 3x^5 + 5x^4$, determine:

(a) Las raíces

▼ Éstas son:

$$3x^5 + 5x^4 = x^4(3x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = -\frac{5}{3}\,.$$

□

(b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento

▼ Se obtienen los puntos críticos si se deriva la función y se iguala a cero

$$f'(x) = 15x^4 + 20x^3 = 0 \Rightarrow 5x^3(3x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = -\frac{4}{3}\,.$$

Estos dos puntos dividen a la recta $\mathbb{R}$ en tres intervalos, donde queremos hallar el signo de la derivada. Como $f'(x)$ es un polinomio, es continua en toda la recta y sólo se anula en los puntos críticos por lo que en cada intervalo $f'(x)$ tiene el mismo signo. Para conocerlo podemos usar el siguiente cuadro

Intervalo	Punto en él	Valor de f'	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$	-2	$f'(-2) > 0$	$+$	creciente
$\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$	-1	$f'(-1) < 0$	$-$	decreciente
$(0, +\infty)$	1	$f'(1) > 0$	$+$	creciente

□

(c) Máximos y mínimos relativos

▼ En el punto crítico

$$\begin{aligned} \left[-\frac{4}{3}, f\left(-\frac{4}{3}\right)\right] &= \left[-\frac{4}{3}, 3\left(-\frac{4}{3}\right)^5 + 5\left(-\frac{4}{3}\right)^4\right] = \\ &= \left[-\frac{4}{3}, 3\left(-\frac{1024}{3^5}\right) + 5\left(\frac{256}{3^4}\right)\right] \approx (-1.\bar{3}, 3.16049), \end{aligned}$$

la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego en $(-1.\bar{3}, 3.16049)$ hay un máximo local. En el punto crítico $[0, f(0)] = (0, 0)$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego el origen es un mínimo local.

□

(d) Los intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo

▼ Se deriva nuevamente la función y se iguala a cero de manera análoga a lo que se hizo en el otro inciso. El signo de la segunda derivada valuada en un punto arbitrario dentro de cada intervalo indicará el sentido de la concavidad.

$$f''(x) = 60x^3 + 60x^2 = 60x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = -1.$$

Intervalo	Punto en él	Valor de f''	Signo de f''	Concavidad de f hacia
$(-\infty, -1)$	-2	$f''(-2) < 0$	$-$	abajo
$(-1, 0)$	$-\dfrac{1}{2}$	$f''\left(-\dfrac{1}{2}\right) > 0$	$+$	arriba
$(0, +\infty)$	1	$f''(1) > 0$	$+$	arriba

□

(e) Puntos de inflexión

▼ En el punto

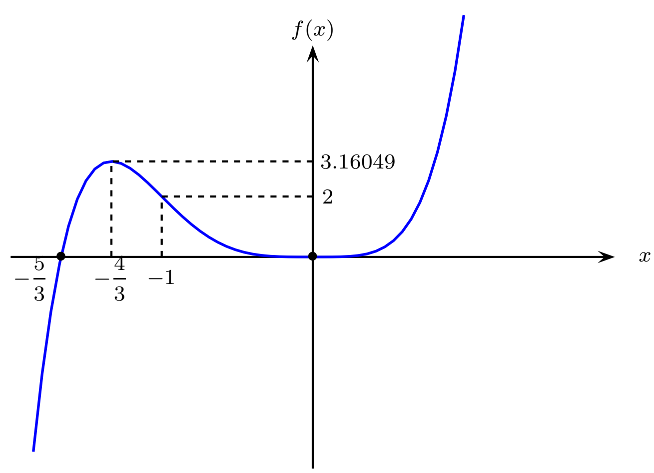
$$[-1, f(-1)] = (-1, 3 \times (-1)^5 + 5 \times (-1)^4) = (-1, -3 + 5) = (-1, 2),$$

la segunda derivada vale cero y la función cambia el sentido de su concavidad, pasando de ser cóncava hacia abajo a ser cóncava hacia arriba, luego es un punto de inflexión.

□

(f) Gráfica de la función $f(x)$

▼ La gráfica de $f(x)$ es:



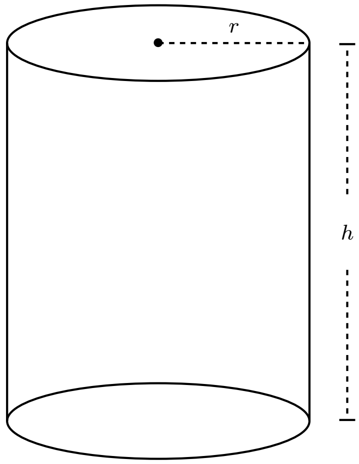
□

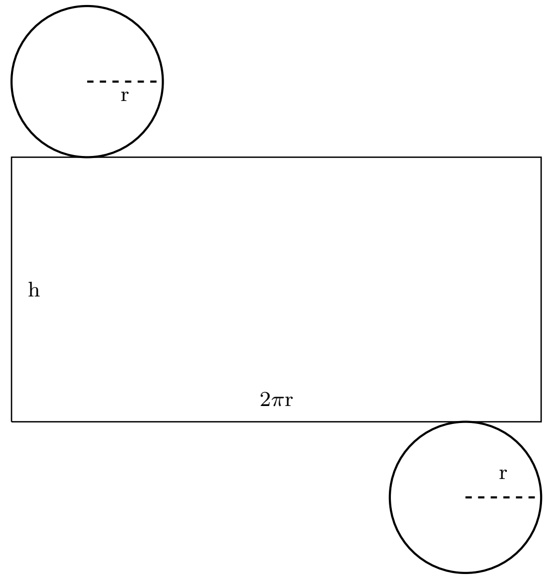
(4) Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal sin tapa que tenga una capacidad de un metro cúbico. Encuentre las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material sea mínima (ignore el espesor del material y lo que se desperdicia en la construcción).

▼ El volumen del cilindro de radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$; puesto que debe ser de 1 m^3, tenemos que:

$$\pi r^2 h = 1.$$

Vamos a dibujarlo:





El material que se usa en su construcción es el área, es decir:

$$A = 2\pi rh + \pi r^2.$$

Esta función es de dos variables, pero por la expresión del volumen $\pi r^2 h = 1$, podemos despejar una de ellas en términos de la otra, por ejemplo $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$; sustituyendo en la expresión del área, la tendremos como función de una sola variable:

$$A(r) = 2\pi r\left(\frac{1}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \frac{2}{r} + \pi r^2 = 2r^{-1} + \pi r^2.$$

Se hallan los puntos críticos de esta función:

$$A'(r) = -\frac{2}{r^2} + 2\pi r = 0 \Leftrightarrow 2\pi r = \frac{2}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{3}}}.$$

En este caso:

$$h = \frac{1}{\pi\frac{1}{\pi^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{3}}} = r.$$

Es decir, el radio debe ser igual a la altura del cilindro.

Como $A''(r) = (-2r^{-2} + 2\pi r)' = \dfrac{4}{r^3} + 2\pi > 0$ siempre, encontramos que es ésta entonces el área mínima.

$\square$