# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
# EVALUACIÓN GLOBAL E2600

## (A) Primer parcial

(1) $\dfrac{2x-3}{|\,x+1\,|} \leq x.$

(2) $3x - 4 < 9x + 2 < x - 10$

(3) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x+7 & \text{si } x < -5 \\ 2 & \text{si } -5 \leq x < -3 \\ |\,4 - x^2\,| & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x < 6 \\ \dfrac{-x}{6} + \dfrac{7}{6} & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Determine

(a) Gráfica y rango de $f(x)$

(b) ¿Es par o impar $f(x)$? Justifique su respuesta

(4) Sean

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0; \\ 3x-2 & \text{si } 1 < x < 5; \\ 3 & \text{si } x > 7; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 3; \\ 8 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Determine $(f - g)$.

(5) Sean $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ & $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

Determine $(g \circ f)$ y su dominio.

## (B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x+1} \right).$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25} - 5}\,.$

(3) Bosqueje la gráfica de una función $f$ que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ccc} \text{Es continua en } \mathbb{R} - \{\,-3, 0, 2, 4\,\}\,; & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -4; & \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3; \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 5; & \displaystyle\lim_{x\to 4} f(x) = -2; & \displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty; \\ \displaystyle\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty; & \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty; & \displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty; \\ f(-4) = f(-2) = f(1) = f(3) = f(5) = 0; & f(0) = 3; & f(7) = 4\,. \end{array}$$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } 1 < x < 2 \\ ax^3 - 2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Conteste lo siguiente:

(a) ¿Existe la derivada de $f(x)$ en $x = 1$?

(b) Determine el valor de $a$ para que la función sea derivable en $x = 2$

(5) Sea $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$, determine:

(a) Dominio y raíces

(b) Discontinuidad y su clasificación

(c) Asíntotas horizontales y verticales

(d) Bosqueje la gráfica de $f(x)$

## (C) Tercer parcial

(1) Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$, encontrar:

(a) Dominio y raíces

(b) Discontinuidad y su clasificación

(c) Asíntotas verticales y horizontales

(d) Puntos críticos y su clasificación

(e) Intervalos donde la función es creciente y decreciente

(f) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad

(g) Gráfica de $f(x)$

(2) Los costos de la empresa Alfa están dados por la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ donde $x$ representa miles de artículos vendidos. Se pronostica que los costos serán mínimos si se venden entre 1 700 y 1 800 artículos. ¿Es verdadero el pronóstico? Justifique su respuesta.

(3) Encuentre $\dfrac{dx}{dy}$ si $\quad 3x^2y^4 - 2(x^3 - 3y^2)^7 + x^4 = (xy)^4 - 10.$

# Respuestas

## (A) Primer parcial

(1) $\dfrac{2x-3}{|\,x+1\,|} \leq x.$

▼ Sabemos que $x \neq -1$; que $x = 0$ si pertenece al conjunto solución, pues $\dfrac{-3}{|\,1\,|} \leq 0$; y que la desigualdad equivale a $2x - 3 \leq x\,|\,x+1\,|$.

Si $x > 0$ a su vez la última desigualdad equivale a $|\,x+1\,| \geq \dfrac{2x-3}{x}$ y ésta se cumple si:

$$x + 1 \geq \frac{2x-3}{x} \text{ o bien si } x + 1 \leq -\frac{2x-3}{x}\,.$$

Tenemos que la primera equivale a

$$\frac{2x-3}{x} - x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3-x^2-x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 \geq 0.$$

La ecuación $x^2 - x + 3 = 0$ no tiene raíces reales pues su discriminante $b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times 3 < 0$; así como también $x^2 - x + 3$ siempre es positiva ya que al evaluar en $x = 0$, por ejemplo, es igual a $3(> 0)$.
Entonces parte del conjunto solución es $[0, +\infty)$.

Ahora analicemos el caso en que $x < 0$, por lo que la desigualdad propuesta equivale a $|\,x+1\,| \leq \dfrac{2x-3}{x}$ y ésta al sistema de desigualdades:

$$-\frac{2x-3}{x} \leq x + 1 \leq \frac{2x-3}{x}\,.$$

Multiplicando por $x$ (que es negativa), tenemos

$$-(2x-3) \geq x^2 + x \geq 2x - 3 \Leftrightarrow -2x + 3 \geq x^2 + x \geq 2x - 3.$$

Sabemos que $x^2 + x \geq 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 \geq 0$ se cumple siempre, luego no es restricción alguna, por lo que para $x < 0$ la desigualdad propuesta equivale a la única desigualdad

$$-2x + 3 \geq x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 3 \leq 0.$$

Resolviendo

$$x^2 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \approx \begin{cases} 0.7912878 \\ -3.7912878; \end{cases}$$

y por tanto,

$$x^2 + 3x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow;$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \geq 0 \quad \text{y} \quad x - \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \leq 0 \quad \text{o bien} \quad x - \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \leq 0 \quad \text{y} \quad x - \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \geq 0;$$

$$x \geq \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \quad \text{y} \quad x \leq \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \quad \text{o bien} \quad x \leq \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \quad \text{y} \quad x \geq \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\,;$$

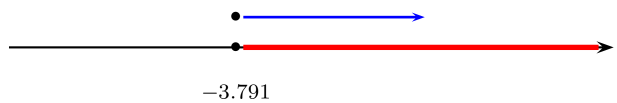
$$x \in \left[\frac{-3-\sqrt{21}}{2}, \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right] \quad \text{o bien} \quad x \in \emptyset;$$

Sin embargo como

$$x < 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{-3-\sqrt{21}}{2}, 0\right),$$

comprobamos que el conjunto solución de la desigualdad es

$$CS = \left[\frac{-3-\sqrt{21}}{2}, 0\right) \bigcup \{\, 0 \,\} \bigcup (0, +\infty) = \left[\frac{-3-\sqrt{21}}{2}, +\infty\right) \approx [-3.7912878, +\infty)\,.$$




$\square$

(2) $3x - 4 < 9x + 2 < x - 10$

▼ La primer desigualdad $3x - 4 < 9x + 2$ equivale a

$$-4 - 2 < 9x - 3x \Leftrightarrow -6 < 6x \Leftrightarrow x > -\frac{6}{6} \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty)\,.$$

Y la segunda desigualdad $9x + 2 < x - 10$ se cumple si

$$8x < -12 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right).$$

Por lo que el conjunto solución será

$$CS = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \bigcap (-1, +\infty) = \emptyset.$$

$\square$

(3) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x + 7 & \text{si } x < -5; \\ 2 & \text{si } -5 \leq x < -3; \\ |\, 4 - x^2 \,| & \text{si } -3 \leq x \leq 3; \\ 2 & \text{si } 3 < x < 6; \\ \dfrac{-x}{6} + \dfrac{7}{6} & \text{si } x \geq 6, \end{cases}$$

determine:

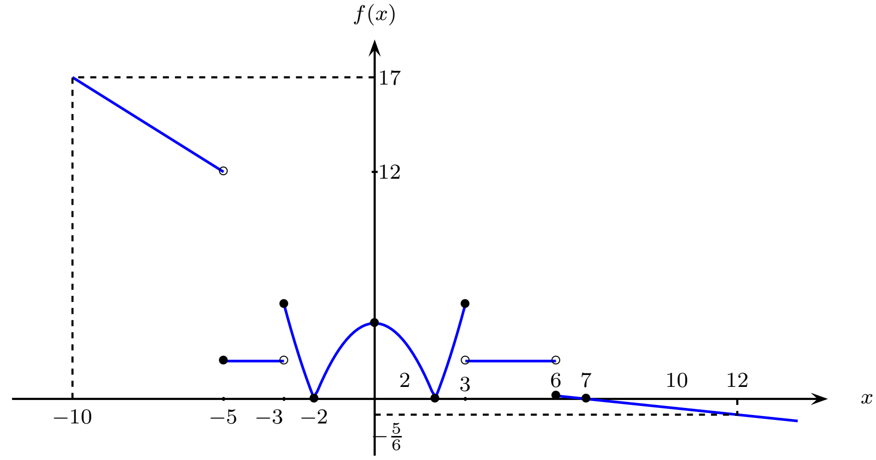
(a) Gráfica y rango de $f(x)$

▼ Calculamos $f(-10) = 17$, $f(-6) = 13$, $f(6) = \dfrac{1}{6}$ & $f(12) = -\dfrac{5}{6}$.

Y observamos que

$$|\, 4 - x^2 \,| = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |\, x \,| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } 4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |\, x \,| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \text{ o bien } x < -2. \end{cases}$$

Por lo tanto, la gráfica de $f(x)$ es:




El rango es:

$$R_f = (-\infty, 5] \bigcup (12, +\infty) .$$

$\square$

(b) ¿Es par o impar $f(x)$? Justifique su respuesta

▼ En la gráfica se ve que la función no es par ni impar, porque no es simétrica ni con respecto al eje de las $y$ ni con respecto al origen.

Por ejemplo, vemos que $f(6) \neq f(-6)$.

$\square$

(4) Sean

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0; \\ 3x-2 & \text{si } 1 < x < 5; \\ 3 & \text{si } x > 7; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 3; \\ 8 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Determine $(f - g)$.

▼ Como $D_g = \mathbb{R}$, tenemos que $D_{f-g} = D_f \bigcap D_g = D_f \bigcap \mathbb{R} = D_f = (-\infty, 0] \bigcup (1, 5) \bigcup (7, +\infty)$. Entonces

$$(f-g)(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0; \\ 3x-2-x & \text{si } 1 < x < 3; \\ 3x-2-8 & \text{si } 3 \leq x < 5; \\ 3-8 & \text{si } x > 7; \end{cases} = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0; \\ 2x-2 & \text{si } 1 < x < 3; \\ 3x-10 & \text{si } 3 \leq x < 5; \\ -5 & \text{si } x > 7. \end{cases}$$

$\square$

(5) Sean $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ & $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

Determine $(g \circ f)$ y su dominio.

▼ Ambas funciones son racionales, luego sus respectivos dominios son el complemento de las raíces del denominador:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - x \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x(x-1) \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq 0 \text{ y } x \neq 1 \right\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{0, 1\} ;$$
$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 9 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x+3)(x-3) \neq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x+3 \neq 0 \text{ y } x - 3 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -3 \text{ y } x \neq 3 \right\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{\pm 3\} .$$

Entonces:

$$D_{g\circ f} = \left\{\, x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} - \{\,0, 1\,\} \;\middle|\; \frac{1}{x^2 - x} \neq \pm 3 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{\,0, 1\,\} \;\middle|\; x^2 - x \neq \pm\frac{1}{3} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{\,0, 1\,\} \;\middle|\; x^2 - x \pm \frac{1}{3} \neq 0 \right\}.$$

Resolviendo

$$x^2 - x - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{3}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{7}{3}}}{2};$$

$$x^2 - x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}}}{2} \notin \mathbb{R},$$

por lo que

$$D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \left\{ 0, 1, \frac{1 \pm \sqrt{\frac{7}{3}}}{2} \right\}.$$

Por otro lado

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{x^2 - x}\right) = \frac{\frac{1}{x^2 - x}}{\left(\frac{1}{x^2 - x}\right)^2 - 9} = \frac{\frac{1}{x^2 - x}}{\frac{1}{(x^2 - x)^2} - 9} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2 - x}}{\frac{1 - 9(x^2 - x)^2}{(x^2 - x)^2}} = \frac{x^2 - x}{1 - 9(x^2 - x)^2}.$$

□

## (B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1}\right)$.

▼ Tenemos que:

$$\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} = \frac{x^3(2x + 1) - x^2(2x^2 - 1)}{(2x^2 - 1)(2x + 1)} = \frac{2x^4 + x^3 - 2x^4 + x^2}{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1} =$$

$$= \frac{x^3 + x^2}{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1} = \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^3\left(4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x}}{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \text{ si } x \neq 0.$$

Por lo que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1+0}{4+0}=\frac{1}{4}\,.$$

□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5}\,.$

▼ Racionalizando el denominador

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5}=\frac{x^3(\sqrt{x^2+25}+5)}{(\sqrt{x^2+25}-5)(\sqrt{x^2+25}+5)}=\frac{x^3(\sqrt{x^2+25}+5)}{x^2+25-25}=$$
$$=\frac{x^3(\sqrt{x^2+25}+5)}{x^2}=x(\sqrt{x^2+25}+5).$$

Por lo que hallamos:

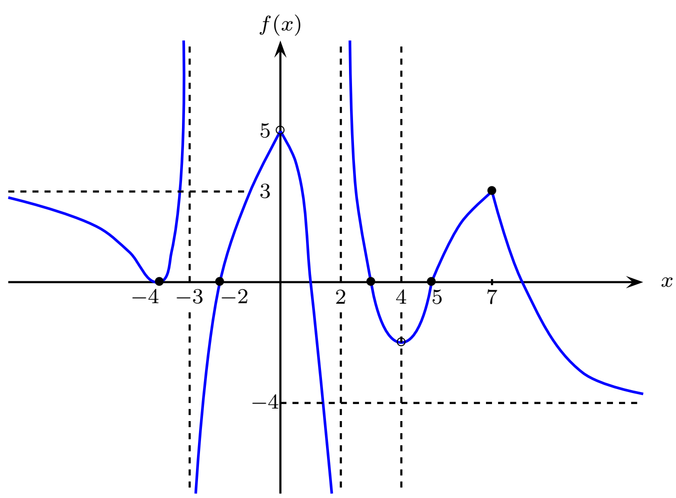
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5}=\lim_{x\to 0}[x(\sqrt{x^2+25}+5)]=0.$$

□

(3) Bosqueje la gráfica de una función $f$ que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Es continua en } \mathbb{R}-\{-3,0,2,4\}; & \displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=-4; & \displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=3;\\
\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=5; & \displaystyle\lim_{x\to 4}f(x)=-2; & \displaystyle\lim_{x\to -3^+}f(x)=-\infty;\\
\displaystyle\lim_{x\to -3^-}f(x)=+\infty; & \displaystyle\lim_{x\to 2^+}f(x)=+\infty; & \displaystyle\lim_{x\to 2^-}f(x)=-\infty;\\
f(-4)=f(-2)=f(1)=f(3)=f(5)=0; & f(0)=3; & f(7)=4\,.
\end{array}$$

▼ Una gráfica posible de la función $f(x)$ que satisfaga esas condiciones es:




□

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1; \\ x^2 - 4 & \text{si } 1 < x < 2; \\ ax^3 - 2 & \text{si } 2 \le x. \end{cases}$$

Conteste lo siguiente:

(a) ¿Existe la derivada de $f(x)$ en $x = 1$?

▼ Como $f(x)$ cambia de valor en $x = 1$, calculemos las derivadas laterales

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1;$$
$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 5}{x - 1} = \text{“}\left(\frac{-4}{0^+}\right)\text{”}.$$

Este último límite no existe, por lo que tampoco existe la derivada en $x = 1$.
De hecho tampoco es continua en $x = 1$ pues

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq -3 = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

□

(b) Determine el valor de $a$ para que la función sea derivable en $x = 2$

▼ Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$, primero debe ser continua en ese punto, por lo que

$$f(2) = 8a - 2 = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 0.$$

Entonces tenemos que,

$$8a - 2 = 0 \Leftrightarrow 8a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Para este valor de $a$ verifiquemos si $f(x)$ es derivable en $x = 2$:

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$
$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} (x + 2) = 4;$$
$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{4}x^3 - 2 - 0}{x - 2}.$$

Como en $x = 2$, la función $\dfrac{1}{4}x^3 - 2 = 0$, entonces $\dfrac{1}{4}x^3 - 2$ es divisible entre $x - 2$. Efectuemos pues la división:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \\
\hline
x - 2 & \frac{1}{4}x^3 \qquad\qquad\quad - 2 \\
 & -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad \frac{1}{2}x^2 \\
 & \qquad -\frac{1}{2}x^2 + x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad x - 2 \\
 & \qquad\qquad -x + 2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0.
\end{array}
$$

Tenemos $\frac{1}{4}x^3 - 2 = (x - 2)(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1)$.
Y en fin, hallamos:

$$
\begin{aligned}
f'(2^+) &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{4}x^3 - 2}{x - 2} = \\
&= \frac{(x - 2)(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \right) = 1 + 1 + 1 = 3.
\end{aligned}
$$

Y como $f'(2^-) \neq f'(2^+)$, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

□

(5) Sea $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$, determine:

(a) Dominio y raíces

▼ Como $f(x)$ es una función racional, su dominio es el complemento de las raíces del denominador, es decir

$$D_f = \mathbb{R} - \{ \pm 1, \pm 2 \}.$$

Calculamos las raíces

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1 \text{ o bien cuando } -2.$$

Pero como $1$ & $-2$ no están en el dominio de $f$, entonces la única raíz es $x = 0$.

□

(b) Discontinuidad y su clasificación

▼ La función es discontinua en $x = \pm 1$ así como en $x = \pm 2$.
Como

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)} = \frac{x(x - 1)(x + 2)}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{x}{(x + 1)(x - 2)},$$

entonces,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{1}{(2)(-1)} = -\frac{1}{2};$$

luego la discontinuidad en $x = 1$ es removible.

De igual forma

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{-2}{(-1)(-4)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}\,,$$

por lo que también la discontinuidad en $x = -2$ es removible.
En cambio

$$\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to -1^{\mp}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = \mp\infty;$$
$$\lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to 2^{\mp}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = \mp\infty.$$

Por lo que las discontinuidades en $x = -1$ y en $x = 2$ son esenciales, de hecho son infinitas.

Para determinar el signo de los últimos cuatro límites tomamos en cuenta que

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} x = -1 < 0, \quad \lim_{x\to -1^{\pm}} (x+1) = 0^{\pm} \quad \& \quad \lim_{x\to -1^{\pm}} (x-2) = -3 < 0.$$
$$\lim_{x\to 2^{\pm}} x = 2 > 0, \quad \lim_{x\to 2^{\pm}} (x+1) = 3 > 0 \quad \& \quad \lim_{x\to 2^{\pm}} (x-2) = 0^{\pm}.$$

□

(c) Asíntotas horizontales y verticales

▼ Como $\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = \mp\infty$ & $\lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = \mp\infty$, entonces las rectas $x = -1$ & $x = 2$ son asíntotas verticales, y son las únicas.

Ahora

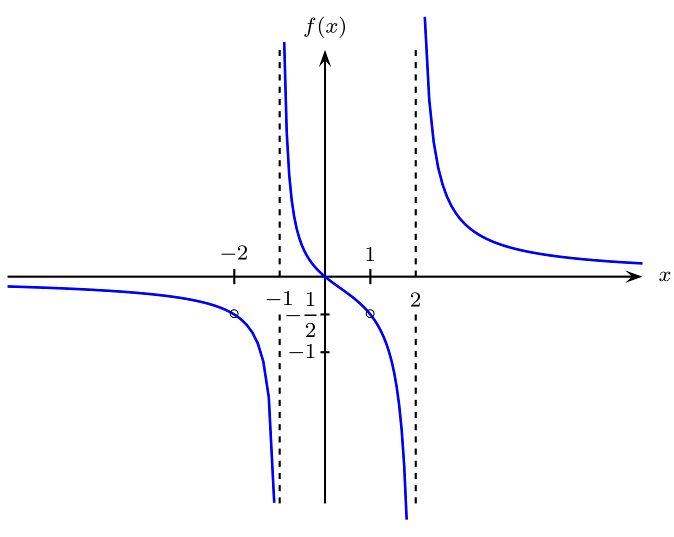
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{(x^2-1)(x^2-4)} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^4 - 5x^2 + 4} =$$
$$= \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)}{x^4\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right)} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0.$$

De donde inferimos que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

□

(d) Bosqueje la gráfica de $f(x)$

▼ La gráfica de $f(x)$ es:




□

## (C) Tercer parcial

(1) Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$, encontrar:

(a) Dominio y raíces

▼ Dominio:

Resolvemos $3x^2 - 10x + 3 = 0$,

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} 3 \\ \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3) = (3x - 1)(x - 3) \text{ y } (3x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \text{ o bien } x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \text{ o bien } x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ o bien } x = 3,$$

Entonces,

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}.$$

Raíces:

Resolvemos $2x^2 - 5x + 2 = 0$,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x - 1)(x - 2) \text{ y } (2x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ o bien } x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \text{ o bien } x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ o bien } x = 2.$$

Las raíces de $f$ son,

$$x = \frac{1}{2} \;\&\; x = 2.$$

□

(b) Discontinuidad y su clasificación

▼ La función siendo racional es continua en su dominio:

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^{\mp}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{3}^{\mp}} \frac{(2x - 1)(x - 2)}{(3x - 1)(x - 3)} = \pm\infty.$$

Observe que $\lim_{x \to \frac{1}{3}^{\mp}} (2x - 1) = \dfrac{2}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$, $\lim_{x \to \frac{1}{3}^{\mp}} (x - 2) = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$ así como también $\lim_{x \to \frac{1}{3}^{\mp}} (x - 3) = \dfrac{1}{3} - 3 = -\dfrac{8}{9}$ son los tres negativos, mientras que

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^{\mp}} (3x - 1) = 0^{\mp};$$

$$\lim_{x \to 3^{\mp}} f(x) = \lim_{x \to 3^{\mp}} \frac{(2x - 1)(x - 2)}{(3x - 1)(x - 3)} = \mp\infty.$$

Ahora $\lim\limits_{x\to 3^{\mp}}(2x-1)$, $\lim\limits_{x\to 3^{\mp}}(x-2)$ así como $\lim\limits_{x\to 3^{\mp}}(3x-1)$ son positivos, valen respectivamente 5, 1, 8.
Por lo que las discontinuidades en $x=\dfrac{1}{3}$ y en $x=3$ son esenciales, de hecho son infinitas.

□

(c) Asíntotas verticales y horizontales

▼ Por los límites calculados anteriormente, observamos que las rectas $x=\dfrac{1}{3}$ & $x=3$ son asíntotas verticales.
Calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{10}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{3-\dfrac{10}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{2-0+0}{3-0+0}=\frac{2}{3}\,.$$

La recta $y=\dfrac{2}{3}$ es asíntota horizontal.

□

(d) Puntos críticos y su clasificación

▼ Calculamos la derivada

$$f'(x)=\frac{(4x-5)(3x^2-10x+3)-(6x-10)(2x^2-5x+2)}{(3x^2-10x+3)^2}=$$

$$=\frac{12x^3-40x^2+12x-15x^2+50x-15-12x^3+30x^2-12x+20x^2-50x+20}{(3x^2-10x+3)^2}=$$

$$=\frac{-5x^2+5}{(3x^2-10x+3)^2}=\frac{-5(x^2-1)}{(3x^2-10x+3)^2}=\frac{-5(x+1)(x-1)}{(3x^2-10x+3)^2}\,.$$

Y hallamos que la derivada se anula cuando

$$(x+1)(x-1)=0.$$

Luego los puntos críticos son $x=\frac{1}{3}$, 3 & $\pm 1$.

□

(e) Intervalos donde la función es creciente y decreciente

▼ De $f'(x)=\dfrac{-5(x+1)(x-1)}{(3x^2-10x+3)^2}$ se observa que el signo del denominador siempre es positivo; entonces, el signo de la derivada nos lo da el numerador, así

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -5(x+1)(x-1)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)<0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{lllllll}\Leftrightarrow x+1>0 & \text{y} & x-1<0 & \text{o bien} & x+1<0 & \text{y} & x-1>0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow x>-1 & \text{y} & x<1 & \text{o bien} & x<-1 & \text{y} & x>1 \Leftrightarrow\\ \quad\Leftrightarrow x\in(-1,1) & & & \text{o bien} & & x\in\emptyset. & \end{array}$$

Luego, $f'(x)>0$ en $(-1,1)$, por lo que $f(x)$ es creciente en $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$; es decreciente en $(-\infty,-1)\,,(1,3)$ y en $(3,+\infty)$ donde $f'(x)<0$.

De aquí constatamos que en el punto $[-1, f(-1)] = \left(-1, \dfrac{2+5+2}{3+10+3}\right) = \left(-1, \dfrac{9}{16}\right)$ hay un mínimo, pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente, mientras que en $[1, f(1)] = \left(1, \dfrac{2-5+2}{3-10+3}\right) = \left(1, \dfrac{-1}{-4}\right) = \left(1, \dfrac{1}{4}\right)$ hay un máximo, pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

□

(f) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad

▼ Calculando ahora la segunda derivada de $f$ hallamos que:

$$
\begin{aligned}
f''(x) = [f'(x)]' &= \left[\frac{-5(x^2-1)}{(3x^2-10x+3)^2}\right]' = \\
&= \frac{-10x(3x^2-10x+3)^2 + 10(x^2-1)(3x^2-10x+3)(6x-10)}{(3x^2-10x+3)^4} = \\
&= \frac{-10x(3x^2-10x+3) + 10(x^2-1)(6x-10)}{(3x^2-10x+3)^3} = \\
&= \frac{-30x^3+100x^2-30x+60x^3-100x^2-60x+100}{(3x^2-10x+3)^3} = \\
&= \frac{30x^3-90x+100}{(3x^2-10x+3)^3} = 10 \times \frac{3x^3-9x+10}{(3x^2-10x+3)^3} = 10 \times \frac{(3x^3-9x+10)(3x^2-10x+3)}{(3x^2-10x+3)^4} = \\
&= 10 \times \frac{9x^5-30x^4+9x^3-27x^3+90x^2-27x+30x^2-100x+30}{(3x^2-10x+3)^4} = \\
&= 10 \times \frac{9x^5-30x^4-18x^3+120x^2-127x+30}{(3x^2-10x+3)^4}\,.
\end{aligned}
$$

Escrita la segunda derivada de esta manera, su signo nos lo da en numerador y así confirmamos ahora, con el criterio de la segunda derivada, que:

$$
f''(-1) = \frac{10}{(3+10+3)^4}(-9-30+18+120+127+30) > 0.
$$

Por lo que en $x = -1$ hay un mínimo.

Observamos ahora

$$
f''(1) = \frac{10}{(3-10+3)^4}(9-30-18+120-127+30) < 0.
$$

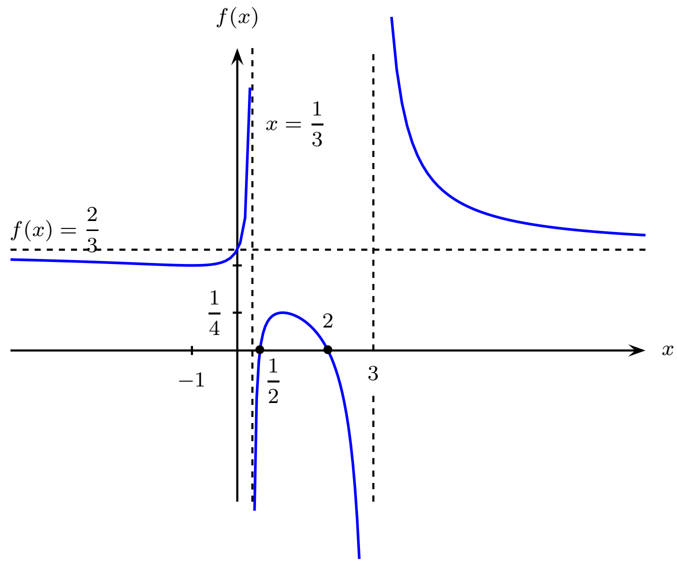
Se confirma que en $x = 1$ hay un máximo.

Parece demasiado ambicioso pedirle a nuestros alumnos que analicen los puntos de inflexión y la concavidad de $f(x)$, por lo que directamente pasaremos a graficarla.

□

(g) Gráfica de $f(x)$.

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:




□

(2) Los costos de la empresa Alfa están dados por la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ donde $x$ representa miles de artículos vendidos. Se pronostica que los costos serán mínimos si se venden entre 1 700 y 1 800 artículos. ¿Es verdadero el pronóstico? Justifique su respuesta.

▼ El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, pues $\sqrt[3]{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |\,x\,| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - \dfrac{2x^2}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3(x^2-1) - 2x^2}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}\,;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x \approx \pm 1.7320508.$$

Se toma el valor positivo por tratarse de costos en una empresa.
Para saber si son extremos calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{6x(x^2-1)^{\frac{4}{3}} - 4(x^2-1)^{\frac{1}{3}}2x(x^2-3)}{9(x^2-1)^{\frac{8}{3}}} = \frac{6x(x^2-1) - 8x(x^2-3)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}} =$$

$$= \frac{6x^3 - 6x - 8x^3 + 24x}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}} = \frac{-2x^3 + 18x}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}\,.$$

Como

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{-2 \times 3^{\frac{3}{2}} + 18 \times \sqrt{3}}{9(3-1)^{\frac{7}{3}}} = \frac{-6 \times \sqrt{3} + 18 \times \sqrt{3}}{9 \times 2^{\frac{7}{3}}} > 0,$$

se trata de un mínimo, luego, efectivamente, este mínimo se produce cuando se venden 1 732 058 de artículos.

□

(3) Encuentre $\dfrac{dx}{dy}$ si $\quad 3x^2y^4 - 2(x^3 - 3y^2)^7 + x^4 = (xy)^4 - 10.$

▼ Derivando implícitamente con respecto a la variable $y$:

$$6xy^4\frac{dx}{dy} + 12x^2y^3 - 14(x^3 - 3y^2)^6\left(3x^2\frac{dx}{dy} - 6y\right) + 4x^3\frac{dx}{dy} = 4(xy)^3\left(y\frac{dx}{dy} + x\right).$$

Transponiendo términos y factorizando $\dfrac{dx}{dy}$ se tiene,

$$\frac{dx}{dy}[6xy^4 - 42x^2(x^3 - 3y^2)^6 + 4x^3 - 4(xy)^3y] = 4(xy)^3x - 12x^2y^3 - 84y(x^3 - 3y^2)^6.$$

Por último, despejando,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4x^4y^3 - 12x^2y^3 - 84y(x^3 - 3y^2)^6}{6xy^4 - 42x^2(x^3 - 3y^2)^6 + 4x^3 - 4x^3y^4}.$$

En donde $x$ es función de $y$.

$\square$