CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E2700

(A) Primer parcial

(1) $\left|\dfrac{2x+1}{x-5}\right| > 1$.

(2) Sean las funciones

$$f(t) = \sqrt{t+3},\ g(y) = y^2 - 4\ \&\ h(w) = \sqrt{w-2}.$$

Encontrar f/h, $g \circ f$, $f \circ g$ y sus dominios.

(3) Graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < -1; \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \le x \le 1; \\ |\,x-3\,| & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(B) Segundo parcial

(1) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2-16}$.

Encontrar su dominio y sus raíces. Clasificar sus discontinuidades. Encontrar las asíntotas horizontales y verticales. Hacer un bosquejo de la gráfica.

(2) Sea la función

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < -1; \\ ax^2+b & \text{si } -1 \le x < 2; \\ 2x-5 & \text{si } x \ge 2. \end{cases}$$

Encontrar los valores a, b de tal manera que la función sea continua en todo punto.

(3) Encuentre un intervalo en donde la función $h(x) = -2x^5 - 7x + 1$ tiene una raíz.

(C) Tercer parcial

(1) La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

(2) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$.

Encontrar su dominio, sus raíces, sus intervalos de monotonía, sus intervalos de concavidad. Encontrar también sus asíntotas verticales y horizontales. Graficar la función.

(3) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $4x^2 - 3xy + 5y^3 = 6$ en el punto $(1, 1)$.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\left|\dfrac{2x+1}{x-5}\right| > 1.$

▼ Ésta equivale a

$$\frac{2x+1}{x-5} > 1 \text{ o bien a } \frac{2x+1}{x-5} < -1.$$

Resolvemos cada desigualdad por separado

(a) Primero: $\dfrac{2x+1}{x-5} > 1$:

$$\begin{array}{l}
\dfrac{2x+1}{x-5} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-5} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1-x+5}{x-5} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+6}{x-5} > 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x+6>0 \quad \text{y} \quad x-5>0 \quad \text{o bien} \quad x+6<0 \quad \text{y} \quad x-5<0; \\
x > -6 \quad \text{y} \quad x > 5 \quad \text{o bien} \quad x < -6 \quad \text{y} \quad x < 5; \\
x \in (5, +\infty) \quad \text{o bien} \quad x \in (-\infty, -6)\,.
\end{array}$$

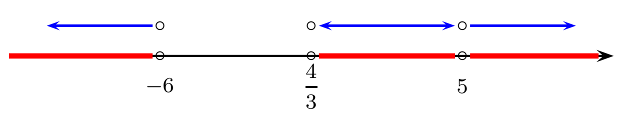
$$x \in (-\infty, -6) \bigcup (5, +\infty)\,.$$

(b) Segundo: $\dfrac{2x+1}{x-5} < -1$:

$$\begin{array}{l}
\dfrac{2x+1}{x-5} < -1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-5} + 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1+x-5}{x-5} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-4}{x-5} < 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 3x-4>0 \quad \text{y} \quad x-5<0 \quad \text{o bien} \quad 3x-4<0 \quad \text{y} \quad x-5>0; \\
x > \dfrac{4}{3} \quad \text{y} \quad x < 5 \quad \text{o bien} \quad x < \dfrac{4}{3} \quad \text{y} \quad x > 5; \\
x \in \left(\dfrac{4}{3}, 5\right) \quad \text{o bien} \quad x \in \emptyset.
\end{array}$$

Luego, el conjunto solución de la desigualdad propuesta es:

$$CS = (-\infty, -6) \bigcup \left(\frac{4}{3}, 5\right) \bigcup (5, +\infty)$$



Se ve que $x = 5$ no pertenece al conjunto solución; así como tampoco $x = -6$ ni $x = \dfrac{4}{3}$:

$$\left|\frac{2(-6)+1}{-6-5}\right| = \left|\frac{-12+1}{-11}\right| = \left|\frac{-11}{-11}\right| = |\,1\,| = 1 \not> 1;$$

$$\left|\frac{2\left(\dfrac{4}{3}\right)+1}{\dfrac{4}{3}-5}\right| = \left|\frac{\dfrac{8}{3}+1}{\dfrac{4-15}{3}}\right| = \left|\frac{\dfrac{8+3}{3}}{-\dfrac{11}{3}}\right| = \left|-\frac{\dfrac{11}{3}}{\dfrac{11}{3}}\right| = |\,-1\,| = 1 \not> 1.$$

Mientras que $x = -7, x = 2$ así como $x = 6$ sí pertenecen, ya que

$$\left|\frac{2(-7)+1}{-7-5}\right| = \left|\frac{-14+1}{-12}\right| = \left|\frac{-13}{-12}\right| = \left|\frac{13}{12}\right| = \frac{13}{12} > 1;$$

$$\left|\frac{2(2)+1}{2-5}\right| = \left|\frac{4+1}{-3}\right| = \left|\frac{5}{-3}\right| = \left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3} > 1;$$

$$\left|\frac{2(6)+1}{6-5}\right| = \left|\frac{12+1}{1}\right| = |\,13\,| = 13 > 1.$$

□

(2) Sean las funciones

$$f(t) = \sqrt{t+3},\ g(y) = y^2 - 4\ \&\ h(w) = \sqrt{w-2}.$$

Encontrar f/h, $g \circ f$, $f \circ g$ y sus dominios.

▼ Tenemos que

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}\,.$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x+3 \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq -3 \,\right\} = [-3, +\infty)\,; \\ D_h &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x-2 \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq 2 \,\right\} = [2, +\infty)\,; \\ h(x) &= 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} D_{f/h} &= D_f \bigcap D_h - \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; h(x) = 0 \,\right\} = [-3, +\infty) \bigcap [2, +\infty) - \{\, 2 \,\} = \\ &= [2, +\infty) - \{\, 2 \,\} = (2, +\infty)\,. \end{aligned}$$

También

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x+3}) = (\sqrt{x+3})^2 - 4 = x + 3 - 4 = x - 1.$$

Y su dominio

$$D_{g\circ f} = \left\{\, x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in D_g \,\right\}.$$

Como $D_g = \mathbb{R}$, se tiene que

$$D_{g\circ f} = \left\{\, x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \,\right\} = D_f = [-3, +\infty)\,.$$

Por último

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 4) = \sqrt{(x^2-4)+3} = \sqrt{x^2-1}$$

y así mismo

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \left\{\, x \in D_g \;\middle|\; g(x) \in D_f \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 4 \geq -3 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 \geq 4 - 3 \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 \geq 1 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\,x\,| \geq 1 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq 1 \text{ o bien } x \leq -1 \,\right\} = \\ &= (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)\,. \end{aligned}$$

□

(3) Graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < -1; \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ |\, x-3 \,| & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

▼ La gráfica de $y = 2x + 3$ es una recta de pendiente 2 y ordenada al origen 3.
Como

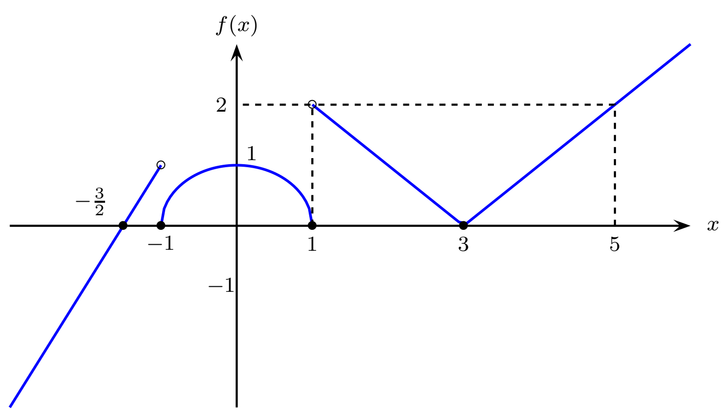
$$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2,$$

los puntos que satisfacen $y = \sqrt{1-x^2}$ están sobre la circunferencia con centro en el origen y radio 1.
Y como $y \geq 0$, se trata de la semicircunferencia superior.
La gráfica de $y = |\, x - 3 \,|$ se obtiene a partir de la gráfica de $y = |\, x \,|$ desplazándola hacia la derecha 3 unidades.
Tabulamos

$$f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1 \;\&\; 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2};$$

$$f(-1^-) = 2(-1^-) + 3 = -2^- + 3 = 1.$$

En resumen, la gráfica de $f(x)$ es:



□

(B) Segundo parcial

(1) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16}$.
Encontrar su dominio y sus raíces. Clasificar sus discontinuidades. Encontrar las asíntotas horizontales y verticales. Hacer un bosquejo de la gráfica.

▼ Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 16 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \neq 16 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\, x \,| \neq 4 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \pm 4 \right\} = \mathbb{R} - \{ \pm 4 \} .$$

Raíces:
Las raíces son los puntos $x \in D_f$ donde el numerador vale cero

$$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ o bien } x = 3.$$

Pero como -4 no forma parte del dominio de f, entonces la única raíz es $x = 3$.
Discontinuidades:

La función es discontinua en $x = \pm 4$; calculemos:

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x\to -4} \frac{x-3}{x-4} = \frac{-7}{-8} = \frac{7}{8}\,.$$

Por lo que la discontinuidad en $x = -4$ es removible; en cambio

$$\lim_{x\to 4^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to 4^{\mp}} \frac{x-3}{x-4} = \mp\infty.$$

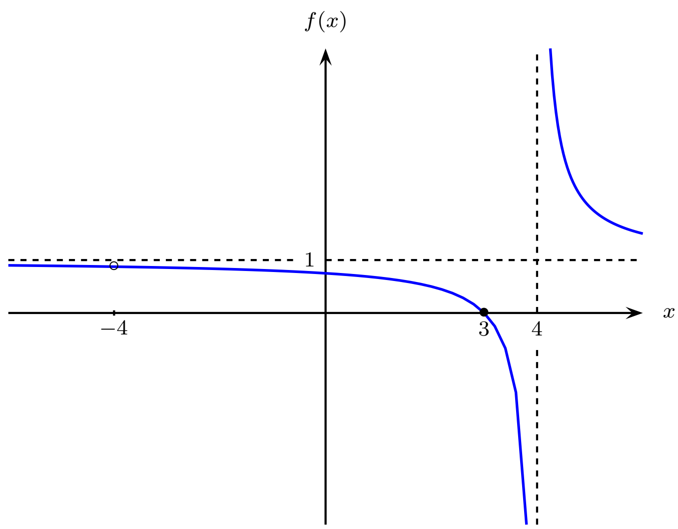
Por lo que la discontinuidad en $x = 4$ es esencial, de hecho es infinita. Para calcular estos límites usamos:

$$\lim_{x\to -4}(x-3) = -7,\ \lim_{x\to -4}(x-4) = -8,\ \lim_{x\to 4}(x-3) = 1 \ \&\ \lim_{x\to 4^{\pm}}(x-4) = 0^{\pm}.$$

Asíntotas:
De aquí comprobamos que $x = 4$ es asíntota vertical.
Para obtener asíntotas horizontales observemos que

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x-3}{x-4} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x(1-\frac{3}{x})}{x(1-\frac{4}{x})} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

De donde comprobamos que $y = 1$ es una asíntota horizontal.
La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(2) Sea la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -1; \\ ax^2 + b & \text{si } -1 \leq x < 2; \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Encontrar los valores a, b de tal manera que la función sea continua en todo punto.

▼ Desde luego la función es continua en $(-\infty, -1)$, $[-1, 2)$ y en $[2, +\infty)$ pues ahí la función es polinomial; los puntos problemáticos son $x = -1$ & $x = 2$ donde la función pasa de ser lineal a cuadrática y viceversa. Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, debe cumplirse que $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ y para ello:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (1 - x) = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2;$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (ax^2 + b) = a(-1)^2 + b = a + b = f(-1).$$

De donde se infiere que $a + b = 2$.
Análogamente, para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ debe cumplirse que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ y para ello:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax^2 + b) = a(2)^2 + b = 4a + b;$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x - 5) = 2(2) - 5 = 4 - 5 = -1 = f(2).$$

Luego se tiene que cumplir $4a + b = -1$.
Entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + b = 2; \\ 4a + b = -1. \end{cases}$$

Dos ecuaciones con dos incógnitas a, b; restándole a la segunda ecuación la primera, tenemos $3a = -3 \Rightarrow a = -\dfrac{3}{3} = -1$ y, sustituyendo este valor en la primera ecuación, $-1 + b = 2 \Rightarrow b = 3$.
Los valores encontrados son:

$$a = -1 \ \& \ b = 3.$$

$\square$

(3) Encuentre un intervalo en donde la función $h(x) = -2x^5 - 7x + 1$ tiene una raíz.

▼ Siendo h una función polinomial cumple con la hipótesis de continuidad del teorema del Valor Intermedio en toda la recta, además

$$h(0) = 1 > 0, h(1) = -2 - 7 + 1 < 0,$$

entonces, entre 0 & 1 existe al menos una raíz de la función, es decir, un punto x tal que

$$-2x^5 - 7x + 1 = 0.$$

$\square$

(C) Tercer parcial

(1) La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

▼ Sean x, y, z los tres números, entonces claramente lo que tenemos que maximizar es el producto xyz. Como aparecen tres variables, vamos a tratar de expresarlo en términos de una única variable, x por ejemplo. Para ello tenemos un par de condiciones adicionales:

$$x + y + z = 30 \ \& \ x + 2y + 3z = 60;$$
$$\text{de } x + y + z = 30 \Rightarrow z = -x - y + 30; \text{ sustituimos en la segunda}$$
$$x + 2y + 3z = 60 \Rightarrow x + 2y + 3(-x - y + 30) = 60 \Rightarrow -2x - y = 60 - 90 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + y = 30 \Rightarrow y = 30 - 2x.$$

Sustituyendo esta expresión en z queda

$$z = -x - 30 + 2x + 30 \Rightarrow z = x.$$

Por último, la función a maximizar es

$$xyz = x^2(30 - 2x) = -2x^3 + 30x^2, \text{ esto es } f(x) = -2x^3 + 30x^2.$$

Ya expresado en función de una sola variable, se puede buscar un máximo hallando sus puntos críticos

$$f'(x) = -6x^2 + 60x = -6x(x - 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = 10.$$

Calculando la segunda derivada,

$$f''(x) = -12x + 60 \Rightarrow f''(10) < 0.$$

Por lo que en $x = 10$ se tiene un máximo.
Entonces $z = 10$ & $y = 30 - (2 \times 10) = 30 - 20 = 10$, es decir:

$$x = y = z = 10.$$

□

(2) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$.
Encontrar su dominio, sus raíces, sus intervalos de monotonía, sus intervalos de concavidad. Encontrar también sus asíntotas verticales y horizontales. Graficar la función.

▼ Dominio:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\, 0 \,\}.$$

Es impar pues

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} = \frac{x^2 - 1}{-x^3} = -\frac{x^2 - 1}{x^3} = -f(x).$$

Raíces:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |\, x \,| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Intervalos de monotonía:

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^2(x^2 - 1)}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{3 - x^2}{x^4} \text{ para } x \neq 0;$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |\, x \,| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.732050808.$$

Siendo $f'(x)$ continua en su dominio, se valúa en un número arbitrario perteneciente a cada uno de los cuatro intervalos en que los puntos 0 & $\pm\sqrt{3}$ dividen a la recta $\mathbb{R}$ para conocer su signo y así, el sentido de su monotonía.

$$-2 \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right), \quad f'(-2) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } \left(-\infty, -\sqrt{3}\right);$$
$$-1 \in \left(-\sqrt{3}, 0\right), \quad f'(-1) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } \left(-\sqrt{3}, 0\right);$$
$$1 \in \left(0, \sqrt{3}\right), \quad f'(1) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } \left(0, \sqrt{3}\right);$$
$$2 \in \left(\sqrt{3}, +\infty\right), \quad f'(2) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } \left(\sqrt{3}, +\infty\right).$$

Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = \frac{-2x^5 - (3 - x^2)4x^3}{x^8} = \frac{-2x^5 - 12x^3 + 4x^5}{x^8} = \frac{2x^5 - 12x^3}{x^8} =$$
$$= \frac{2x^2 - 12}{x^5} = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5};$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6} \approx \pm 2.449489743.$$

Como $f''(x)$ es continua en su dominio, veamos cuál es su signo tomando igualmente puntos arbitrarios en los cuatro intervalos en que los puntos 0 & $\pm\sqrt{6}$ dividen a la recta $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
-3 \in \left(-\infty, -\sqrt{6}\right), &\quad f''(-3) < 0 \Rightarrow f'' < 0 \text{ en } \left(-\infty, -\sqrt{6}\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo;}\\
-1 \in \left(-\sqrt{6}, 0\right), &\quad f''(-1) > 0 \Rightarrow f'' > 0 \text{ en } \left(-\sqrt{6}, 0\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba;}\\
1 \in \left(0, \sqrt{6}\right), &\quad f''(1) < 0 \Rightarrow f'' < 0 \text{ en } \left(0, \sqrt{6}\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo;}\\
3 \in \left(\sqrt{6}, +\infty\right), &\quad f''(3) > 0 \Rightarrow f'' > 0 \text{ en } \left(\sqrt{6}, +\infty\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba.}
\end{aligned}$$

También enfaticemos que en el punto crítico $x = -\sqrt{3}$,

$$\begin{aligned}
[-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})] = \left[-\sqrt{3}, \frac{(-\sqrt{3})^2 - 1}{(-\sqrt{3})^3}\right] = \left[-\sqrt{3}, \frac{2}{-3^{3/2}}\right] \approx\\
\approx \left(-\sqrt{3}, -\frac{2}{5.196152423...}\right) \approx (-\sqrt{3}, -0.384900179),
\end{aligned}$$

$f(-\sqrt{3}) = \dfrac{2}{-3^{3/2}}$ es un valor extremo. Como $f''(-\sqrt{3}) > 0$, entonces hay un mínimo.

También el otro punto $[\sqrt{3}, f(\sqrt{3})] \approx (\sqrt{3}, 0.384900179...)$ $\dfrac{2}{3^{3/2}}$ es un valor extremo.

Como $f''(\sqrt{3}) < 0$, se trata de un máximo.

Notar que los valores extremos también pueden estimarse observando que en $x = -\sqrt{3}$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, por lo que hay un mínimo; a diferencia de lo que ocurre en $x = \sqrt{3}$ donde la función pasa de ser creciente a ser decreciente, por lo que ahí hay un máximo.

Como en $x = \pm\sqrt{6}$ la función cambia el sentido de su concavidad, los puntos

$$\begin{aligned}
[\sqrt{6}, f(-\sqrt{6})] = \left(-\sqrt{6}, \frac{6-1}{-6^{\frac{3}{2}}}\right) \approx \left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{14.69693846...}\right) \approx\\
\approx (-\sqrt{6}, -0.340206908) \text{ así como también}\\
[-\sqrt{6}, f(\sqrt{6})] \approx (\sqrt{6}, 0.340206908)
\end{aligned}$$

son de inflexión.

Asíntotas:

La recta $x = 0$ es asíntota vertical y además

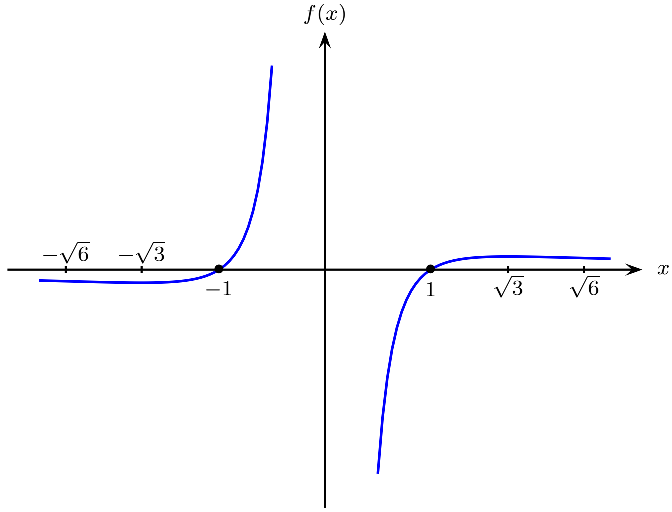
$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2-1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{-1}{0^\pm}\right)\text{”} = \mp\infty.$$

Ahora, para encontrar las asíntotas horizontales calculemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

Por lo que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Graficando la función $f(x)$ con todos los elementos previamente calculados, se tiene:



$\square$

(3) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $4x^2 - 3xy + 5y^3 = 6$ en el punto $(1, 1)$.

▼ Verificamos que el punto $(1, 1)$ satisface la ecuación: $4(1)^2 - 3(1)(1) + 5(1)^3 = 4 - 3 + 5 = 6$.
Hallamos la pendiente de la recta tangente calculando la derivada de la función dada implícitamente.
Derivamos implícitamente con respecto a x

$$8x - 3(y + xy') + 15y^2y' = 0 \Leftrightarrow 8x - 3y - 3xy' + 15y^2y' = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y'(15y^2 - 3x) = 3y - 8x \Leftrightarrow y' = \frac{3y - 8x}{15y^2 - 3x}\,.$$

Esta derivada en el punto $(1, 1)$ vale

$$y'(1, 1) = \frac{3(1) - 8(1)}{15(1)^2 - 3(1)} = \frac{3 - 8}{15 - 3} = -\frac{5}{12}\,,$$

por lo que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(1, 1)$ es

$$y - 1 = -\frac{5}{12}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{12}x + \frac{5}{12} + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -\frac{5}{12}x + \frac{17}{12}\,.$$

$\square$