CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E2800

(A) Primer parcial

(1) $\left| \dfrac{4x+1}{2x-3} \right| \leq 5.$

(2) Dadas las funciones $f(y) = \sqrt{y+5}$, $\quad g(u) = u^2 - 4 \quad$ & $\quad h(w) = |\,5 - w\,|$,
obtener $\left(\dfrac{hf}{g}\right)(x)$, $(g \circ f)(x)$ & $(h \circ g)(x)$, así como sus respectivos dominios.

(3) $3x - 3x^2 - 2 \geq 4x - 9x^2 - 1$.

(4) Realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < -1; \\ \dfrac{|\,x\,|}{x} & \text{si } -1 \leq x < 2; \\ 4 & \text{si } x = 2; \\ x^2 - 6x + 6 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

(B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \left(\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 2x - 15} \right)$.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{-x^2}{4 - x^2} \right)$.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 5x - 3})$.

(4) Para la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$, obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación; asíntotas verticales y horizontales.

(5) Determinar los valores de las constantes a, b, c que hacen continua en todo su dominio la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < -1; \\ ax^2 + b & \text{si } -1 \leq x < 2; \\ c & \text{si } x = 2; \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(C) Tercer parcial

(1) Una página ha de contener 300 cm^2 de zona impresa. Los márgenes superior e inferior han de ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Calcular las dimensiones de la página que requieren de la mínima cantidad de papel.

(2) Para la curva $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$, obtener: intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos y su clasificación, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo, así como sus puntos de inflexión.

(3) Suponiendo que en la siguiente ecuación se tiene implícitamente definida a la coordenada $y = \phi(x)$, calcular la ecuación de la recta tangente en el punto (2,1) de la curva

$$2\sqrt{x^2+5y^2} = 3xy.$$

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\left|\dfrac{4x+1}{2x-3}\right| \le 5.$

▼ Se tiene

$$\left|\frac{4x+1}{2x-3}\right| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le \frac{4x+1}{2x-3} \le 5 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl}
\Leftrightarrow -5 \le \dfrac{4x+1}{2x-3} & \& & \dfrac{4x+1}{2x-3} \le 5 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \dfrac{4x+1}{2x-3} + 5 \ge 0 & \& & \dfrac{4x+1}{2x-3} - 5 \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \dfrac{4x+1+5(2x-3)}{2x-3} \ge 0 & \& & \dfrac{4x+1-5(2x-3)}{2x-3} \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \dfrac{4x+1+10x-15}{2x-3} \ge 0 & \& & \dfrac{4x+1-10x+15}{2x-3} \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \dfrac{14x-14}{2x-3} \ge 0 & \& & \dfrac{-6x+16}{2x-3} \le 0.
\end{array}$$

Resolvemos por separado cada una de estas desigualdades, para luego intersecar los conjuntos solución resultantes y así obtener el conjunto solución de la desigualdad original.

(a) La desigualdad $\dfrac{14x-14}{2x-3} \ge 0$ se cumple cuando

$$\begin{array}{rclcrcl}
14x-14 \le 0 & \& & 2x-3<0 & \text{o bien} & 14x-14 \ge 0 & \& & 2x-3>0; \\
14x \le 14 & \& & 2x<3 & \text{o bien} & 14x \ge 14 & \& & 2x>3; \\
x \le 1 & \& & x < \dfrac{3}{2} & \text{o bien} & x \ge 1 & \& & x > \dfrac{3}{2}; \\
 & x \le 1 & & \text{o bien} & & x > \dfrac{3}{2}; & \\
 & (-\infty, 1] & & \bigcup & & \left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right). &
\end{array}$$

El conjunto solución aquí es

$$CS_1 = (-\infty, 1] \bigcup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

(b) La desigualdad $\dfrac{-6x+16}{2x-3} \le 0$ se cumple cuando

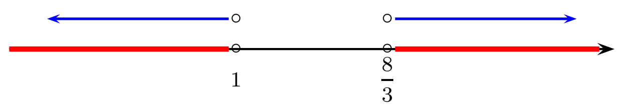
$$\begin{array}{rclcrcl}
-6x+16 \ge 0 & \& & 2x-3<0 & \text{o bien} & -6x+16 \le 0 & \& & 2x-3>0; \\
6x \le 16 & \& & 2x<3 & \text{o bien} & 6x \ge 16 & \& & 2x>3; \\
x \le \dfrac{8}{3} & \& & x < \dfrac{3}{2} & \text{o bien} & x \ge \dfrac{8}{3} & \& & x > \dfrac{3}{2}; \\
 & x < \dfrac{3}{2} & & \text{o bien} & & x \ge \dfrac{8}{3}; & \\
 & \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right) & & \bigcup & & \left[\dfrac{8}{3}, +\infty\right). &
\end{array}$$

El conjunto solución aquí es

$$CS_2 = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \bigcup \left[\frac{8}{3}, +\infty\right).$$

Por lo tanto, el conjunto solución CS de la desigualdad original $\left|\dfrac{4x+1}{2x-3}\right| \leq 5$, es

$$\begin{aligned} CS &= CS_1 \bigcap CS_2 = \\ &= \left[(-\infty, 1] \bigcup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\right] \bigcap \left[\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \bigcup \left[\frac{8}{3}, +\infty\right)\right] = \\ &= (-\infty, 1] \bigcup \left[\frac{8}{3}, +\infty\right) = \\ &= \mathbb{R} - \left(1, \frac{8}{3}\right). \end{aligned}$$



□

(2) Dadas las funciones $f(y) = \sqrt{y+5}$, $\quad g(u) = u^2 - 4 \quad$ & $\quad h(w) = |\, 5 - w\,|$,
obtener $\left(\dfrac{hf}{g}\right)(x)$, $(g \circ f)(x)$ & $(h \circ g)(x)$, así como sus respectivos dominios.

▼ Calculamos

$$\begin{aligned} \left(\frac{hf}{g}\right)(x) &= \frac{(hf)(x)}{g(x)} = \frac{h(x)f(x)}{g(x)} = \frac{|\,5-x\,|\sqrt{x+5}}{x^2-4}; \\ D_{\frac{hf}{g}} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{|\,5-x\,|\sqrt{x+5}}{x^2-4} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x+5 \geq 0 \text{ y } x^2-4 \neq 0 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq -5 \text{ y } x^2 \neq 4 \right\} = [-5, +\infty) - \{-2, 2\}; \\ (g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g(\sqrt{x+5}) = (\sqrt{x+5})^2 - 4 = x + 5 - 4 = x + 1; \\ D_{g \circ f} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \text{ y } g[f(x)] \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sqrt{x+5} \in \mathbb{R} \text{ y } (x+1) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x+5 \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq -5 \right\} = [-5, \infty); \\ (h \circ g)(x) &= h[g(x)] = h(x^2-4) = \left|\,5 - (x^2-4)\,\right| = \left|\,5 - x^2 + 4\,\right| = \left|\,9 - x^2\,\right|; \\ D_{h \circ g} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; g(x) \in \mathbb{R} \text{ y } h[g(x)] \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x^2-4) \in \mathbb{R} \text{ y } \left|\,9-x^2\,\right| \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

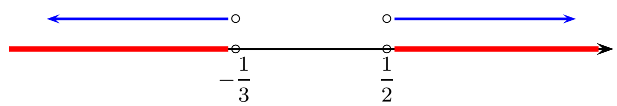
(3) $3x - 3x^2 - 2 \geq 4x - 9x^2 - 1$.

▼ Vemos que

$$
\begin{array}{ccc}
3x - 3x^2 - 2 \geq 4x - 9x^2 - 1 & \Leftrightarrow & 3x - 3x^2 - 2 - 4x + 9x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 \geq 0 & \Leftrightarrow & (3x+1)(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 3x + 1 \leq 0 \quad \& \quad 2x - 1 \leq 0 & \text{o bien} & 3x + 1 \geq 0 \quad \& \quad 2x - 1 \geq 0; \\
3x \leq -1 \quad \& \quad 2x \leq 1 & \text{o bien} & 3x \geq -1 \quad \& \quad 2x \geq 1; \\
x \leq -\dfrac{1}{3} \quad \& \quad x \leq \dfrac{1}{2} & \text{o bien} & x \geq -\dfrac{1}{3} \quad \& \quad x \geq \dfrac{1}{2}; \\
x \leq -\dfrac{1}{3} & \text{o bien} & x \geq \dfrac{1}{2}; \\
\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right] & \bigcup & \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right).
\end{array}
$$

El conjunto solución es

$$
CS = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right).
$$



□

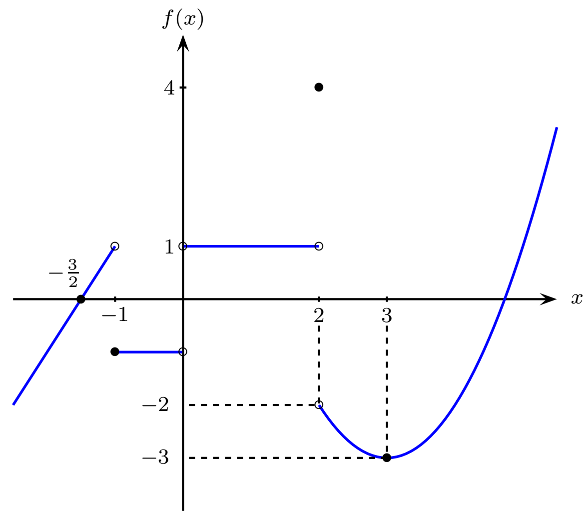
(4) Realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$
f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1; \\ \dfrac{|\,x\,|}{x} & \text{si } -1 \leq x < 2; \\ 4 & \text{si } x = 2; \\ x^2 - 6x + 6 & \text{si } x > 2. \end{cases}
$$

▼ Para $x < -1$, la gráfica de f es una porción de la recta $y = 2x + 3$.
Para $-1 \leq x < 0$, se tiene que $|\,x\,| = -x$ y que $\dfrac{|\,x\,|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$, por lo cual la gráfica de f es una porción de la recta $y = -1$.
Para $0 < x < 2$, se tiene que $|\,x\,| = x$ y que $\dfrac{|\,x\,|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$, por lo cual la gráfica de f es una porción de la recta $y = 1$.
Para $x = 2$, la gráfica es el punto $(2, 4)$.
Para $x > 2$, la gráfica de f es una porción de la parábola vertical

$$
y = x^2 - 6x + 6 = (x^2 - 6x + 9) - 3 = (x - 3)^2 - 3,
$$

que se abre hacia arriba a partir de su vértice $V(3, -3)$. Un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es el siguiente:



$\square$

(B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\left(\frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15}\right)$.

▼ Observe que $2x^2+5x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\dfrac{-5\pm 7}{4}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\\ -3.\end{cases}$

Por lo que $2x^2+5x-3=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3)=(x+3)(2x-1)$.

Ahora, si $x\neq -3$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)(x-5)}=\lim_{x\to -3}\frac{2x-1}{x-5}=\frac{2(-3)-1}{-3-5}=\frac{-7}{-8}=\frac{7}{8}\,.$$

$\square$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{-x^2}{4-x^2}\right)$.

▼ Cuando $x\to 2^+$, sucede que $4-x^2\to 0$ & $-x^2\to -4$.

Además: $x\to 2^+ \Rightarrow x>2 \Rightarrow x^2>4 \Rightarrow 4-x^2<0$, por lo cual $\dfrac{-x^2}{4-x^2}>0$; entonces $\dfrac{-x^2}{4-x^2}\to +\infty$.

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2}{4-x^2}=+\infty$.

$\square$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(2x-\sqrt{4x^2+5x-3})$.

▼ Vemos que

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2+5x-3}) = \lim_{x\to+\infty}\left[(2x-\sqrt{4x^2+5x-3})\frac{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)^2-(\sqrt{4x^2+5x-3})^2}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-(4x^2+5x-3)}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4x^2-5x+3}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+|\,x\,|\sqrt{4+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+x\sqrt{4+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5+\frac{3}{x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-5+\frac{3}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{-5}{2+\sqrt{4}} = \frac{-5}{2+2} = -\frac{5}{4}\,.$$

□

(4) Para la curva $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$, obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación; asíntotas verticales y horizontales.

▼ Dominio:

Por ser $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ una función racional, su dominio es

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\, x \,\middle|\, x^2-1=0 \,\right\} = \mathbb{R} - \left\{\, x \,\middle|\, x^2=1 \,\right\} = \mathbb{R} - \{\,-1,1\,\}\,.$$

Raíces:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow 2x^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Paridad:

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{2x^2}{x^2-1}=f(x) \Rightarrow f \text{ es una función par.}$$

Intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación:
Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio $D_f=\mathbb{R}-\{\,-1,1\,\}$. Es decir, f es continua en el conjunto $(-\infty,-1)\bigcup(-1,1)\bigcup(1,+\infty)$.
Luego entonces, f tiene dos discontinuidades, en $x=-1$ y en $x=1$.
Para decidir qué tipo de discontinuidades son, vemos si existen o no $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; o sea $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ &

En ambos casos notamos que el denominador $x^2 - 1 \to 0$ y que el numerador $2x^2 \to 2$, por lo cual

$$\frac{2x^2}{x^2-1} \to \text{“}\left(\frac{2}{0}\right)\text{”} = \infty.$$

Podemos decir entonces que $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2}{x^2-1} = \infty$ y que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2}{x^2-1} = \infty$. Es decir, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existen, por lo cual las discontinuidades son esenciales.

Asíntotas verticales:
De lo anterior podemos decir que las rectas $x = -1$ & $x = 1$ son asíntotas verticales.
Precisamos estos límites determinando los límites laterales.
Si $x \to 1^-$, entonces $x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{2x^2}{x^2-1} < 0$, por lo cual $\dfrac{2x^2}{x^2-1} \to -\infty$; es decir, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, pues $\lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2 = 2 > 0$.
Si $x \to 1^+$, entonces $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{2x^2}{x^2-1} > 0$, por lo cual $\dfrac{2x^2}{x^2-1} \to +\infty$; es decir, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.
Aún más, por la simetría de la gráfica de f con respecto al eje de las ordenadas, se puede asegurar que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty;$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Esto implica que la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal. Además es la única, ya que por la paridad de f se tiene que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

$\square$

(5) Determinar los valores de las constantes a, b, c que hacen continua en todo su dominio la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < -1; \\ ax^2 + b & \text{si } -1 \le x < 2; \\ c & \text{si } x = 2; \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

▼ Por estar definida mediante funciones polinomiales (las cuales son continuas en todo $\mathbb{R}$), la función f es continua en cada uno de los intervalos $(-\infty, -1)$, $[-1, 2)$ & $(2, +\infty)$.

Necesitamos entonces asegurar la continuidad de f en $x = -1$ y en $x = 2$.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2;$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} (ax^2 + b) = a(-1)^2 + b = a + b;$$

$$\text{y como } \lim_{x \to -1} f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) \Leftrightarrow -2 = a + b.$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (ax^2 + b) = a(2)^2 + b = 4a + b;$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x - 3) = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1;$$

$$\text{y como } \lim_{x \to 2} f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4a + b = 1.$$

Se debe cumplir entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4a + b = 1 \\ a + b = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 1 \\ \underline{-a - b = 2} \\ 3a = 3 \Rightarrow a = 1. \end{cases}$$

Sustituyendo $a = 1$ en $a + b = -2$, se tiene que

$$a + b = -2 \Rightarrow b = -2 - a = -2 - 1 = -3 \Rightarrow b = -3.$$

Con los valores $a = 1$ & $b = -3$ se cumple que $\lim_{x \to -1} f(x) = -2$ & $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

Ya que $f(-1) = a(-1)^2 + b = 1(-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$, entonces $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$, por lo que f es continua en $x = -1$.

Ahora bien, $f(2) = c$ y $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$, entonces f es continua en $x = 2$ si $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, esto es, si $c = 1$.

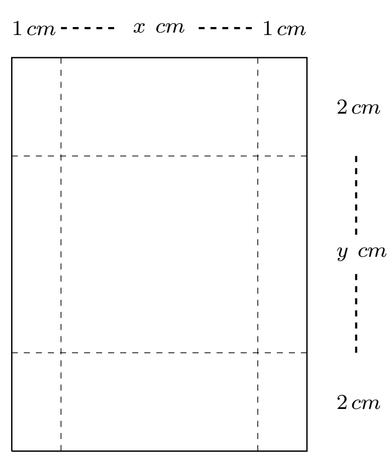
Por lo tanto, f es continua en todo su dominio, que es todo $\mathbb{R}$, cuando $a = 1, b = -3$ & $c = 1$.

□

(C) Tercer parcial

(1) Una página ha de contener 300 cm^2 de zona impresa. Los márgenes superior e inferior han de ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Calcular las dimensiones de la página que requieren de la mínima cantidad de papel.

▼ Usamos la figura



Suponiendo que las dimensiones de la zona impresa son (x cm), (y cm), entonces las dimensiones de la página son $x + 2$ cm $\times$ $y + 4$ cm, donde $x > 0$ & $y > 0$.

¿Qué se pide en el problema? Minimizar el área de la página, la cual es

$$A = (x+2)(y+4) \text{ cm}^2,$$

que es una función de dos variables, x, y.
¿Qué restricción se tiene en el problema? Que el área de la zona impresa, que es xy cm^2, debe ser de 300 cm^2. Es decir, se debe cumplir que $xy = 300$; ésta es una ecuación que relaciona a las mismas variables x, y.
Se tiene pues una función $[A = (x+2)(y+4)]$ y una ecuación $(xy = 300)$.
De la ecuación se despeja una de las variables, para luego sustituirla en la función.
De $xy = 300$ se tiene que $y = \dfrac{300}{x}$, por ejemplo.
Al sustituir en la función área A se obtiene

$$\begin{aligned} A &= (x+2)(y+4) = (x+2)\left(\frac{300}{x}+4\right) = \\ &= x\left(\frac{300}{x}+4\right) + 2\left(\frac{300}{x}+4\right) = 300 + 4x + \frac{600}{x} + 8 = \\ &= 308 + 4x + \frac{600}{x}, \end{aligned}$$

que es una función de una sola variable $A(x) = 308 + 4x + \dfrac{600}{x}$
y es la función a minimizar.

$$A(x) = 308 + 4x + 600x^{-1} \Rightarrow A'(x) = 4 - 600x^{-2};$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{600}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{600}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{600}{4} = 150 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{150}.$$

Esto nos indica que la función $A(x)$ tiene dos puntos críticos, en $x = -\sqrt{150}$ y en $x = \sqrt{150}$; pero debido a que $x > 0$, se desecha $x = -\sqrt{150}$ y sólo nos quedamos con $x = \sqrt{150}$:

$$A'(x) = 4 - 600x^{-2} \Rightarrow A''(x) = 1200x^{-3} = \frac{1200}{x^3}.$$

Valuando $A''(x)$ en $x = \sqrt{150}$, se obtiene que

$$A''(\sqrt{150}) = \frac{1200}{(\sqrt{150})^3} \Rightarrow A''(\sqrt{150}) > 0,$$

lo que implica la existencia de un mínimo local estricto para $A(x)$ en $x = \sqrt{150}$.
Además

$$x = \sqrt{150} \Rightarrow y = \frac{300}{x} = \frac{300}{\sqrt{150}} = 2\sqrt{150}.$$

Por lo tanto, el área de la página es mínima cuando $x = \sqrt{150}$ cm y cuando $y = 2\sqrt{150}$ cm. Es decir, el área de la página es mínima cuando sus dimensiones son:

$$x + 2 = \sqrt{150} + 2 \text{ cm y } y + 4 = 2\sqrt{150} + 4 \text{ cm}.$$

Dicha área mínima es

$$\begin{aligned} A_{\text{mín}} &= (x+2)(y+4) = [(\sqrt{150}+2)+2][(2\sqrt{150}+4)+4] = \\ &= (\sqrt{150}+4)(2\sqrt{150}+8) = (\sqrt{150}+4)2(\sqrt{150}+4) \Rightarrow \\ A_{\text{mín}} &= 2(\sqrt{150}+4)^2 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

$\square$

(2) Para la curva $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$, obtener: intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos y su clasificación, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo, así como sus puntos de inflexión.

▼ Aquí se tiene la función f definida por $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

Monotonía:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)4 - 4x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2} = \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\,.$$

Notemos en $f'(x)$ que el denominador $(x^2+1)^2$ siempre es positivo; es decir, $(x^2+1)^2 > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, luego:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow -4(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow \left| x^2 \right| < 1 \Leftrightarrow |\,x\,|^2 < 1^2 \Leftrightarrow |\,x\,| < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 1. \end{aligned}$$

entonces f es estrictamente creciente en el intervalo abierto $(-1, 1)$.

Notemos también que:

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow -4(x^2-1) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \left| x^2 \right| > 1 \Leftrightarrow |\,x\,|^2 > 1^2 \Leftrightarrow |\,x\,| > 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < -1 \text{ o bien } x > 1. \end{aligned}$$

entonces, f es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.

Puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ o bien } x = 1.$$

Entonces f tiene dos puntos críticos, en $x = -1$ y en $x = 1$. Para clasificarlos utilizamos el criterio de la primera derivada.

Como f es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y creciente en el intervalo $(-1, 1)$, en $x = -1$ se tiene un mínimo local estricto. Dicho punto mínimo está en $A[-1, f(-1)] = A(-1, -2)$.

Como f es creciente en el intervalo $(-1, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$, en $x = 1$ se tiene un máximo local estricto. Dicho punto máximo está en $B[1, f(1)] = B(1, 2)$.

Concavidades:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\right] = (-4)\frac{(x^2+1)^2 2x - (x^2-1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \\ &= (-4)\frac{2x(x^2+1)[(x^2+1) - 2(x^2-1)]}{(x^2+1)(x^2+1)^3} = \frac{-8x(x^2+1-2x^2+2)}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{-8x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\,. \end{aligned}$$

Observamos que en $f''(x)$ el denominador $(x^2+1)^3$ es positivo para cada $x \in \mathbb{R}$; es decir, $(x^2+1)^3 > 0$ siempre.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} > 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{llllllll}
x<0 & \& & x^2-3<0 & \text{o bien} & x>0 & \& & x^2-3>0; \\
x<0 & \& & x^2<3 & \text{o bien} & x>0 & \& & x^2>3; \\
x<0 & \& & |\,x^2\,|<3 & \text{o bien} & x>0 & \& & |\,x^2\,|>3; \\
x<0 & \& & |\,x\,|^2<(\sqrt{3})^2 & \text{o bien} & x>0 & \& & |\,x\,|^2>(\sqrt{3})^2; \\
x<0 & \& & |\,x\,|<\sqrt{3} & \text{o bien} & x>0 & \& & |\,x\,|>\sqrt{3}; \\
x<0 & \& & -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} & \text{o bien} & x>0 & \& & x<-\sqrt{3} \text{ o bien } x>\sqrt{3}; \\
 & & -\sqrt{3}<x<0 & \text{o bien} & & & x>\sqrt{3}; \\
 & & \left(-\sqrt{3},0\right) & \bigcup & & & \left(\sqrt{3},+\infty\right);
\end{array}$$

entonces f es cóncava hacia arriba en el conjunto $\left(-\sqrt{3},0\right)\bigcup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.
Además,

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} < 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{llllllll}
x<0 & \& & x^2-3>0 & \text{o bien} & x>0 & \& & x^2-3<0; \\
x<0 & \& & x^2>3 & \text{o bien} & x>0 & \& & x^2<3; \\
x<0 & \& & |\,x^2\,|>3 & \text{o bien} & x>0 & \& & |\,x^2\,|<3; \\
x<0 & \& & |\,x\,|^2>(\sqrt{3})^2 & \text{o bien} & x>0 & \& & |\,x\,|^2<(\sqrt{3})^2; \\
x<0 & \& & |\,x\,|>\sqrt{3} & \text{o bien} & x>0 & \& & |\,x\,|<\sqrt{3}; \\
x<0 & \& & x<-\sqrt{3} \text{ o bien } x>\sqrt{3} & \text{o bien} & x>0 & \& & -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}; \\
 & & x<-\sqrt{3} & \text{o bien} & & & 0<x<\sqrt{3}; \\
 & & \left(-\infty,-\sqrt{3}\right) & \bigcup & & & \left(0,\sqrt{3}\right);
\end{array}$$

entonces f es cóncava hacia abajo en el conjunto $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\bigcup\left(0,\sqrt{3}\right)$.

Puntos de inflexión:
De lo anterior se desprende que existen cambios de concavidad en $x=-\sqrt{3}, x=0$ y en $x=\sqrt{3}$. Y debido a que f es una función continua en dichos puntos (f es continua en todo $\mathbb{R}$), podemos afirmar que existen puntos de inflexión en $x=-\sqrt{3}, x=0$ y en $x=\sqrt{3}$. Aún más, dichos puntos de inflexión están en

$$I_1[-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})] = I_1(-\sqrt{3},-\sqrt{3});$$
$$I_2[0, f(0)] = I_2(0,0);$$
$$I_3[\sqrt{3}, f(\sqrt{3})] = I_3(\sqrt{3},\sqrt{3}).$$

$\square$

(3) Suponiendo que en la siguiente ecuación se tiene implícitamente definida a la coordenada $y = \phi(x)$, calcular la ecuación de la recta tangente en el punto (2,1) de la curva

$$2\sqrt{x^2 + 5y^2} = 3xy.$$

▼ Derivamos toda la ecuación con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}2\sqrt{x^2 + 5y^2} = \frac{d}{dx}(3xy) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^2)^{\frac{1}{2}} = 3\frac{d}{dx}(xy) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 5y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^2) = 3\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(x^2 + 5y^2)^{\frac{1}{2}}}\left(2x + 10y\frac{dy}{dx}\right) = 3x\frac{dy}{dx} + 3y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 5y^2}} + \frac{10y}{\sqrt{x^2 + 5y^2}}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{10y}{\sqrt{x^2 + 5y^2}}\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3x\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3y - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 5y^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{10y}{\sqrt{x^2 + 5y^2}} - 3x\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{3y\sqrt{x^2 + 5y^2} - 2x}{\sqrt{x^2 + 5y^2}};$$

multiplicando por $\sqrt{x^2 + 5y^2}$ se obtiene:

$$\Rightarrow [10y - 3x\sqrt{x^2 + 5y^2}]\frac{dy}{dx} = 3y\sqrt{x^2 + 5y^2} - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y\sqrt{x^2 + 5y^2} - 2x}{10y - 3x\sqrt{x^2 + 5y^2}}.$$

Valuamos $\frac{dy}{dx}$ en el punto (2,1) (donde $x = 2$ & $y = 1$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sqrt{4 + 5} - 4}{10 - 6\sqrt{4 + 5}} = \frac{9 - 4}{10 - 18} = \frac{5}{-8}.$$

Entonces la pendiente de la recta tangente a la curva es $m = -\frac{5}{8}$.

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (2,1) es:

$$y - 1 = -\frac{5}{8}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{4} + 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{8}x + \frac{9}{4}.$$

□