CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E2900

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{|\,3-x\,|}{5x+3} < 1$.

(2) Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{5-x^2}, \qquad g(x) = \sqrt{9-x} \qquad \& \qquad h(x) = x^2 - 4$$

Encontrar D_f, D_g, $f+g$, D_{f+g}, f/g, $D_{f/g}$, $h \circ g$ & $D_{h\circ g}$.

(3) $6x^2 - 7x < 3$.

(B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{|\,x-2\,|}$.

(3) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}\,.$$

Encontrar y clasificar las discontinuidades. Determinar las asíntotas verticales y horizontales.

(4) Sea la función $f(x) = 5x^2 - 3x - 7$. Demostrar que tiene al menos una raíz negativa.

(C) Tercer parcial

(1) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ que pase por el punto $(1, 1)$.

(2) Determine el volumen máximo posible de un cilíndro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo los dos extremos circulares, es de $150\,\pi$.

(3) Sea la función:

$$f(x) = \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$$

(a) Encontrar sus puntos críticos
(b) Encontrar sus intervalos de monotonía
(c) Encontrar sus intervalos de concavidad y puntos de inflexión
(d) Encontrar sus asíntotas verticales y horizontales
(e) Graficar la función

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{|\,3-x\,|}{5x+3} < 1$.

▼ Primero quitamos el valor absoluto considerando que

$$|\,3-x\,| = \begin{cases} 3-x & \text{si } 3-x \geq 0 \\ -(3-x) & \text{si } 3-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \leq 3; \\ x-3 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

De lo cual se desprende que

$$x \leq 3 \Rightarrow \frac{|\,3-x\,|}{5x+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{5x+3} < 1;$$
$$x > 3 \Rightarrow \frac{|\,3-x\,|}{5x+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{5x+3} < 1.$$

Resolvemos por separado cada caso, para luego unir los conjuntos solución obtenidos.

(a) Caso 1: $\dfrac{3-x}{5x+3} < 1$ & $x \leq 3$.

$$\frac{3-x}{5x+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{5x+3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3-x-5x-3}{5x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{-6x}{5x+3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6x > 0 \quad \& \quad 5x+3 < 0 \quad \text{o bien} \quad -6x < 0 \quad \& \quad 5x+3 > 0;$$

$$x < 0 \quad \& \quad 5x < -3 \quad \text{o bien} \quad x > 0 \quad \& \quad 5x > -3;$$

$$x < 0 \quad \& \quad x < -\frac{3}{5} \quad \text{o bien} \quad x > 0 \quad \& \quad x > -\frac{3}{5};$$

$$x < -\frac{3}{5} \quad \text{o bien} \quad x > 0;$$

$$\left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \quad \bigcup \quad (0, +\infty)\,.$$

El conjunto solución es, en este caso,

$$\begin{aligned} CS_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{3-x}{5x+3} < 1 \text{ y } x \leq 3 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \left[\left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \bigcup (0, +\infty)\right] \text{ y } x \leq 3 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \left[\left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \bigcup (0, 3]\right] \right\} = \\ &= \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \bigcup (0, 3]\,. \end{aligned}$$

(b) Caso 2: $\dfrac{x-3}{5x+3} < 1$ & $x > 3$.

$$\frac{x-3}{5x+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{5x+3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3-5x-3}{5x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-6}{5x+3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x-6 > 0 \quad \& \quad 5x+3 < 0 \quad \text{o bien} \quad -4x-6 < 0 \quad \& \quad 5x+3 > 0;$$

$$-4x > 6 \quad \& \quad 5x < -3 \quad \text{o bien} \quad -4x < 6 \quad \& \quad 5x > -3;$$

$$x < -\frac{6}{4} \quad \& \quad x < -\frac{3}{5} \quad \text{o bien} \quad x > -\frac{6}{4} \quad \& \quad x > -\frac{3}{5};$$

$$x < -\frac{3}{2} \quad \& \quad x < -\frac{3}{5} \quad \text{o bien} \quad x > -\frac{3}{2} \quad \& \quad x > -\frac{3}{5};$$

$$x < -\frac{3}{2} \quad \text{o bien} \quad x > -\frac{3}{5};$$

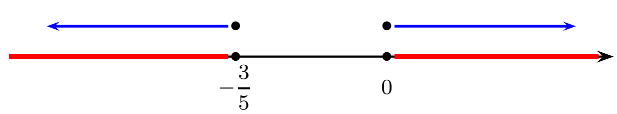
$$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \quad \bigcup \quad \left(-\frac{3}{5}, +\infty\right).$$

El conjunto solución es, en este caso,

$$\begin{aligned} CS_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-3}{5x+3} < 1 \text{ y } x > 3 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \left[\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{5}, +\infty\right)\right] \text{ y } x > 3 \right\} = \\ &= (3, +\infty). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad original $\dfrac{|\,3-x\,|}{5x+3} < 1$ es:

$$\begin{aligned} CS = CS_1 \bigcup CS_2 &= \left[\left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \bigcup (0, 3]\right] \bigcup (3, +\infty) = \\ &= \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \bigcup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\frac{3}{5}, 0\right]. \end{aligned}$$



□

(2) Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{5-x^2}, \qquad g(x) = \sqrt{9-x} \qquad \& \qquad h(x) = x^2 - 4$$

Encontrar D_f, D_g, $f+g$, D_{f+g}, f/g, $D_{f/g}$, $h \circ g$ & $D_{h \circ g}$.

▼ Para cada caso se tiene:

i) $D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{5 - x^2} \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5 - x^2 \geq 0 \}$.
Pero
$$5 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq x^2 \Leftrightarrow \left| x^2 \right| \leq 5 \Leftrightarrow |x|^2 \leq (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}.$$
Luego entonces, $D_f = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$.

ii) $D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{9 - x} \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 9 - x \geq 0 \} =$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid 9 \geq x \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 9 \} = (-\infty, 9] .$$

iii) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{5 - x^2} + \sqrt{9 - x}$.

iv)
$$\begin{aligned} D_{f+g} &= \{ x \in \mathbb{R} \mid (f+g)(x) \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid [f(x) + g(x)] \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \ \& \ g(x) \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \ \& \ x \in D_g \} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in (D_f \bigcap D_g) \right\} = D_f \bigcap D_g = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] \bigcap (-\infty, 9] = \\ &= \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] . \end{aligned}$$

v) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{5 - x^2}}{\sqrt{9 - x}}$.

vi)
$$\begin{aligned} D_{f/g} &= \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} , \ g(x) \in \mathbb{R} \ \text{ y } g(x) \neq 0 \} = \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f , \ x \in D_g \ \& \ \sqrt{9 - x} \neq 0 \} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in (D_f \bigcap D_g) \ \& \ 9 - x \neq 0 \right\} = \\ &= (D_f \bigcap D_g) \text{ y } x \neq 9 = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] - \{9\} = \\ &= \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] . \end{aligned}$$

vii) $(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(\sqrt{9 - x}) = (\sqrt{9 - x})^2 - 4 = 9 - x - 4 = 5 - x$.

viii)
$$\begin{aligned} D_{h \circ g} &= \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R} \ \text{ y } h[g(x)] \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_h \} = \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in \mathbb{R} \} = D_g = (-\infty, 9] . \end{aligned}$$

$\square$

(3) $6x^2 - 7x < 3$.

▼ Vemos que
$$6x^2 - 7x < 3 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x - 3 < 0 \Leftrightarrow (3x + 1)(2x - 3) < 0.$$
Observe que
$$6x^2 - 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12} = \begin{cases} \dfrac{18}{12} \\ -\dfrac{4}{12} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases};$$

por lo que $6x^2 - 7x - 3 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)3\left(x + \frac{1}{3}\right) = (2x-3)(3x+1)$;
y así mismo:

$$(2x-3)(3x+1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+1>0 \quad \& \quad 2x-3<0 \quad \text{o bien} \quad 3x+1<0 \quad \& \quad 2x-3>0;$$

$$3x > -1 \quad \& \quad 2x < 3 \qquad \text{o bien} \qquad 3x < -1 \quad \& \quad 2x > 3;$$

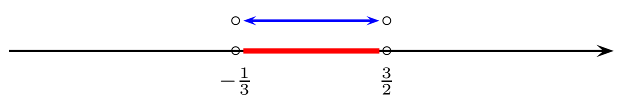
$$x > -\frac{1}{3} \quad \& \quad x < \frac{3}{2} \qquad \text{o bien} \qquad x < -\frac{1}{3} \quad \& \quad x > \frac{3}{2};$$

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2} \qquad \text{o bien} \qquad x \in \emptyset;$$

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right) \bigcup \emptyset = \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

El conjunto solución es

$$CS = \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$$



□

(B) Segundo parcial

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.

▼ Tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Entonces, $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

□

(2) $\lim_{x \to 2^+} \frac{2-x}{|\,x-2\,|}$.

▼ Si $x \to 2^{+}$, entonces $x > 2$; además

$$x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow |\, x - 2\,| = x - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2 - x}{|\, x - 2\,|} = \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1.$$

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 2^{+}} \frac{2 - x}{|\, x - 2\,|} = \lim_{x\to 2^{+}} (-1) = -1.$

□

(3) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}\,.$$

Encontrar y clasificar las discontinuidades. Determinar las asíntotas verticales y horizontales.

▼ Continuidades:

Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio, que es

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\, x \,\middle|\, x^2 + 2x - 8 = 0 \,\right\} = \mathbb{R} - \left\{\, x \,\middle|\, (x + 4)(x - 2) = 0 \,\right\} =$$
$$= \mathbb{R} - \left\{\, x \,\middle|\, x + 4 = 0 \text{ o bien } x - 2 = 0 \,\right\} = \mathbb{R} - \{\, -4, 2 \,\}\,.$$

Entonces f es discontinua en $x = -4$ y en $x = 2$.

Como

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8} = \lim_{x\to -4} \frac{(x + 4)(x - 3)}{(x + 4)(x - 2)} =$$
$$= \lim_{x\to -4} \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{-4 - 3}{-4 - 2} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}\,,$$

la función f tiene en $x = -4$ una discontinuidad removible o evitable.

Y como

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x - 3}{x - 2} = \infty,$$

y puesto que

$x \to 2$, sucede que $(x - 2) \to 0, (x - 3) \to -1$ & $\displaystyle\frac{x - 3}{x - 2} \to \text{“}\left(\frac{-1}{0}\right)\text{”} = \infty,$

entonces la función f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial.

Asíntotas:

Precisemos los límites laterales en torno a $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^{-}} f(x) = \lim_{x\to 2^{-}} \frac{x - 3}{x - 2} = \ ?$$

$$x \to 2^{-} \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \text{ y } x - 3 < -1 \Rightarrow x - 2 < 0 \text{ y } x - 3 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x - 3}{x - 2} > 0 \Rightarrow \frac{x - 3}{x - 2} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2^{-}} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2^{+}} f(x) = \lim_{x\to 2^{+}} \frac{x - 3}{x - 2} = \ ?$$

$$x \to 2^{+} \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \text{ y } x - 3 < 0, \text{ ya que } (x - 3) \to -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x - 3}{x - 2} < 0 \Rightarrow \frac{x - 3}{x - 2} \to -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2^{+}} f(x) = -\infty.$$

Podemos afirmar que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de f y además es la única.

Ahora bien, como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$$

entonces la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal y además es la única ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

□

(4) Sea la función $f(x) = 5x^2 - 3x - 7$. Demostrar que tiene al menos una raíz negativa.

▼ Por ser f una función polinomial, es continua en todo $\mathbb{R}$.
Ahora bien

$$f(0) = -7 < 0;$$
$$f(-1) = 5(-1)^2 - 3(-1) - 7 = 5 + 3 - 7 = 1 > 0.$$

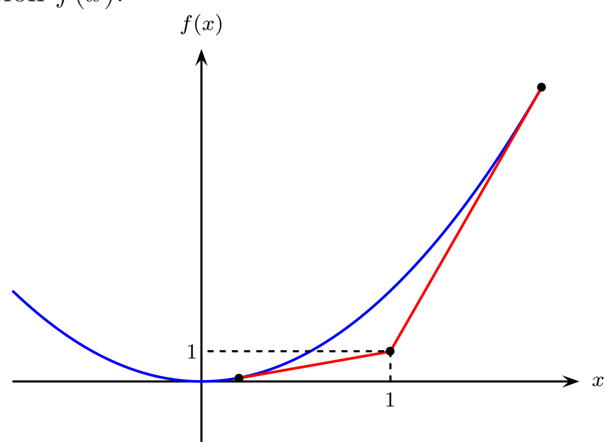
Entonces, por el teorema del Valor Intermedio, para cada γ en el intervalo $(-7, 1)$ existe al menos una c en el intervalo $(-1, 0)$ tal que $f(c) = \gamma$. En particular para $\gamma = 0$ existe al menos un $-1 < c < 0$ tal que $f(c) = 0$.
Aquí c es una raíz negativa de f.

□

(C) Tercer parcial

(1) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ que pase por el punto $(1, 1)$.

▼ El punto $(1, 1)$ no se encuentra sobre la gráfica de la función, ya que $f(1) = 3 \neq 1$.
Nos piden encontrar la ecuación de una recta que pasa por un punto $[a, f(a)] = = (a, 3a^2)$ sobre la gráfica de la función y que además la recta que une a $(1, 1)$ con $(a, 3a^2)$ sea tangente a la gráfica de $y = 3x^2$.
Dibujemos la gráfica de la función $f(x)$:



De la figura vemos que existen dos posibles rectas tangentes. Primero, derivamos:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x.$$

Valuamos $f'(x)$ en $x = a$ y obtenemos $f'(a) = 6a$.
Entonces, la pendiente de la recta tangente es $m = 6a$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2$ en el punto $P(a, 3a^2)$ es:

$$y - 3a^2 = 6a(x - a) \Rightarrow y = 6ax - 6a^2 + 3a^2 \Rightarrow y = 6ax - 3a^2.$$

Las coordenadas del punto $(1, 1)$ deben satisfacer la ecuación anterior de la recta para que se cumpla la condición deseada. Es decir,

$$1 = 6a - 3a^2 \Rightarrow 3a^2 - 6a + 1 = 0.$$

Resolvemos la cuadrática

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \begin{cases} 1.8 \\ 0.2. \end{cases}$$

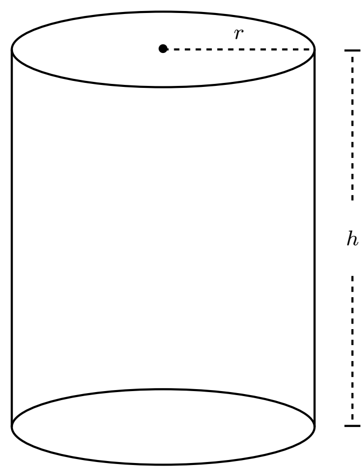
Sustituyendo estos valores en la ecuación general de la recta tangentes obtenemos las ecuaciones deseadas:

$$y = 10.898979x - 9.8989795 \;\&\; y = 1.1010205x - 0.11010205.$$

$\square$

(2) Determine el volumen máximo posible de un cilíndro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo los dos extremos circulares, es de 150 π.

▼ Supongamos un cilindro circular recto de radio r y altura h, donde $r > 0$ & $h > 0$.



¿Qué se nos solicita en este problema?
Maximizar el volumen V del cilindro, donde $V = \pi r^2 h$, que es una función de dos variables r, h.

¿Qué restricción plantea el problema? La siguiente:

El área total de su superficie debe ser de 150π unidades cuadradas. Y debido a que el área superficial de nuestro cilindro es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

debe cumplirse que

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = 150\pi;$$

es decir, debe cumplirse que $r^2 + rh = 75$, que es una ecuación en términos de las mismas dos variables r, h.
Tenemos una función ($V = \pi r^2 h$) y una ecuación ($r^2 + rh = 75$).
De la ecuación despejamos una de las dos variables (la que más convenga) para luego sustituirla en la función. En este caso conviene despejar h:

$$r^2 + rh = 75 \Rightarrow rh = 75 - r^2 \Rightarrow h = \frac{75 - r^2}{r}.$$

Sustituyendo en la función se obtiene

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{75 - r^2}{r}\right) = \pi r(75 - r^2) \Rightarrow V(r) = \pi(75r - r^3),$$

que es la función a maximizar; ahora derivamos:

$$V'(r) = \pi(75 - 3r^2) \Rightarrow V'(r) = 0 \Leftrightarrow 75 - 3r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = -5 \ \& \ r = 5.$$

Esto indica que la función $V(r)$ tiene dos puntos críticos, en $r = -5$ y en $r = 5$.
Debido a que $r > 0$, descartamos a $r = -5$ y sólo nos quedamos con $r = 5$:

$$V'(r) = \pi(75 - 3r^2) \Rightarrow V''(r) = \pi(-6r) = -6\pi r;$$

valuamos $V''(r)$ en $r = 5$ y se obtiene que

$$V''(5) = -6\pi(5) = -30\pi \Rightarrow V''(5) < 0.$$

Entonces existe un máximo local estricto en $r = 5$ para el volumen $V(r)$.
Luego entonces, el volumen V es máximo cuando $r = 5$ así como cuando $h = \dfrac{75 - r^2}{r} = \dfrac{75 - 5^2}{5} = \dfrac{50}{5} = 10$.
Dicho volumen máximo es

$$V_{\text{máx}} = \pi r^2 h = \pi(5)^2(10) = 250\pi.$$

Por lo tanto, el volumen máximo del cilindro es $V_{\text{máx}} = 250\pi$ unidades cúbicas y ocurre cuando $r = 5$ y cuando $h = 10$ unidades de longitud.

□

(3) Sea la función

$$f(x) = \frac{2 + x - x^2}{(x - 1)^2}\,.$$

(a) Encontrar sus puntos críticos

▼ Calculamos la primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)^2(1-2x) - (2+x-x^2)2(x-1)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{(x-1)[(x-1)(1-2x) - 2(2+x-x^2)]}{(x-1)(x-1)^3} = \\ &= \frac{x - 2x^2 - 1 + 2x - 4 - 2x + 2x^2}{(x-1)^3} = \frac{x-5}{(x-1)^3}; \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5;$$

entonces la función f tiene un punto crítico en $x = 5$.

□

(b) Encontrar sus intervalos de monotonía.

▼ Vemos que

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{(x-1)^3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} \Leftrightarrow x - 5 < 0 & \& & (x-1)^3 < 0 & \text{o bien} & x - 5 > 0 & \& & (x-1)^3 > 0; \\ x - 5 < 0 & \& & x - 1 < 0 & \text{o bien} & x - 5 > 0 & \& & x - 1 > 0; \\ x < 5 & \& & x < 1 & \text{o bien} & x > 5 & \& & x > 1; \\ & x < 1 & & \text{o bien} & & x > 5; & \\ & (-\infty, 1) & & \bigcup & & (5, +\infty)\,; & \end{array}$$

entonces la función f es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(5, +\infty)$:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{(x-1)^3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{llllllll}
\Leftrightarrow x-5<0 & \& & (x-1)^3>0 & \text{o bien} & x-5>0 & \& & (x-1)^3<0; \\
x-5<0 & \& & x-1>0 & \text{o bien} & x-5>0 & \& & x-1<0; \\
x<5 & \& & x>1 & \text{o bien} & x>5 & \& & x<1; \\
1<x<5 & & & \text{o bien} & & & x\in\emptyset;
\end{array}$$

$$(1, 5) \bigcup \emptyset = (1, 5)\,.$$

entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo abierto $(1, 5)$.
Aplicando el criterio de la primera derivada, podemos afirmar que f tiene en $x = 5$ un punto mínimo local estricto. Esto debido a que f es decreciente para $x < 5$ y es creciente para $x > 5$. Dicho punto mínimo local se encuentra en $A[5, f(5)] = A\left(5, -\frac{9}{8}\right)$.

□

(c) Encontrar sus intervalos de concavidad y puntos de inflexión

▼ Ahora la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(x-1)^3 - (x-5)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(x-1)^2[(x-1)-3(x-5)]}{(x-1)^2(x-1)^4} =$$
$$= \frac{x-1-3x+15}{(x-1)^4} = \frac{-2x+14}{(x-1)^4} = \frac{-2(x-7)}{(x-1)^4}.$$

Observamos en $f''(x)$ que el denominador $(x-1)^4 > 0$ para cada $x \neq 1$:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x-7)}{(x-1)^4} > 0 \Leftrightarrow -2(x-7) > 0 \Leftrightarrow x-7 < 0 \Leftrightarrow x < 7.$$

Entonces la función f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1) \bigcup (1, 7)$:

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x-7)}{(x-1)^4} < 0 \Leftrightarrow -2(x-7) < 0 \Leftrightarrow x-7 > 0 \Leftrightarrow x > 7.$$

Así mismo la función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(7, +\infty)$.
En $x = 7$ hay cambio de concavidad y además la función es continua, por lo tanto en $x = 7$ hay un punto de inflexión. Dicho punto de inflexión está en $B[7, f(7)] = B\left(7, -\frac{10}{9}\right)$.

□

(d) Encontrar sus asíntotas verticales y horizontales

▼ Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio que es $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Entonces f es discontinua en $x = 1$, donde es posible que exista una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2} = \ ?$$

Si $x \to 1$, entonces $(x-1)^2 \to 0$ con valores positivos y además $(2+x-x^2) \to 2$, por supuesto, con valores positivos. Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2} = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^+} \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Luego entonces, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de f:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + x - x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

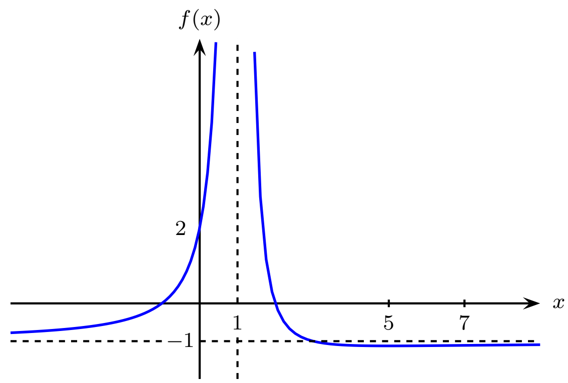
Entonces la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal y además es la única, ya que también

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

□

(e) Graficar la función

▼ La gráfica de $f(x)$ es:



□