CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E3000

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{x^2 - x}{|\,x\,| + x^2 + 1} < 0.$

(2) $\left|\, 5 + \dfrac{4}{x} \,\right| \geq 2.$

(3) Encuentre gráfica, dominio, rango, intervalos de monotonía y paridad de la función:

$$f(x) = \left|\, \frac{x+3}{x} \,\right|, \quad x \neq 0.$$

(4) Determine el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 2}{x - \lfloor x \rfloor}}, \quad \lfloor x \rfloor = \text{parte entera de } x.$$

(5) Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Graficar f y g. Determine rangos
(b) Calcule $(f \circ g)(x)$ para cada número real x

(B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x).$

(2) Considere las funciones

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1} \qquad \& \qquad g(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2}$$

con sus dominios naturales:
(a) Grafique f y g
(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} (g \circ f)(x)$
(c) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f \circ g)(x)$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(3) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 5 \text{ o bien } x \leq -1; \\ ax^2 + b & \text{si } -1 < x \leq 3; \\ cx + d & \text{si } 3 < x < 5; \end{cases}$$

determine valores a, b, c, d con $a \neq 0$ para que f resulte continua en todo $\mathbb{R}$.

(4) Halle un intervalo de longitud no mayor que 0.1 donde se encuentre una raíz del polinomio:

$$\rho(x) = -x^4 + 16x^3 - 60x^2 + 1.$$

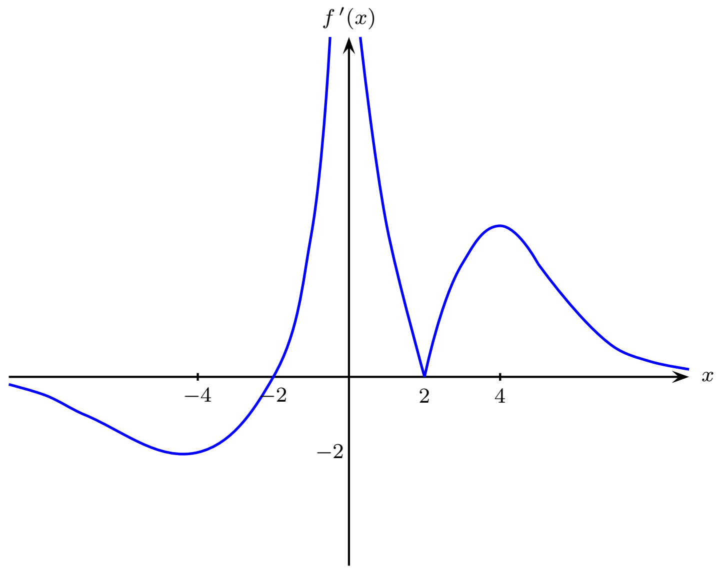
(C) Tercer parcial

(1) H y h son dos números positivos tales que $0 < h < H$. Considere la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{(x-h)(x-H)}$$

(a) Calcule sus puntos críticos
(b) Haga la gráfica de $f(x)$

(2) Observe la figura siguiente donde se bosqueja la gráfica de la función $f'(x)$:



A partir de ésta bosqueje posibles gráficas para $f(x)$ y para $f''(x)$.

(3) Determine las dimensiones de un cono circunscrito a una esfera de radio r que tenga volumen mínimo.

$V = \dfrac{1}{3}\pi a^2 h$ es la fórmula para calcular el volumen de un cono de radio a y altura h.

(4) Obtenga la ecuación de una recta que es tangente simultáneamente a las curvas

$$y = x^2 \qquad \& \qquad y = \frac{1}{x}.$$

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{x^2 - x}{|\,x\,| + x^2 + 1} < 0.$

▼ Notamos que el denominador $(|\,x\,| + x^2 + 1)$ es positivo siempre, ya que, para cada $x \in \mathbb{R}$, sucede que $|\,x\,| \geq 0$ y también que $x^2 \geq 0$, por lo cual $|\,x\,| + x^2 + 1 > 0$. Por lo tanto,

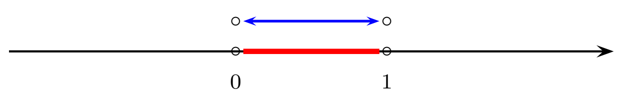
$$\frac{x^2 - x}{|\,x\,| + x^2 + 1} < 0 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} \Leftrightarrow x > 0 \quad \& \quad x - 1 < 0 & \text{o bien} & x < 0 \quad \& \quad x - 1 > 0; \\ x > 0 \quad \& \quad x < 1 & \text{o bien} & x < 0 \quad \& \quad x > 1; \\ 0 < x < 1 & \text{o bien} & x \in \emptyset; \end{array}$$

$$(0,1) \bigcup \emptyset = (0,1)\,.$$

El conjunto solución es:

$$CS = (0,1)$$



□

(2) $\left|\,5 + \dfrac{4}{x}\,\right| \geq 2.$

▼ Vemos que

$$\left|\,5 + \frac{4}{x}\,\right| \geq 2 \Leftrightarrow \left|\,\frac{5x+4}{x}\,\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{5x+4}{x} \leq -2 \text{ o bien } \frac{5x+4}{x} \geq 2.$$

Resolvemos por separado cada desigualdad, para luego unir los conjuntos solución obtenidos.

(a) $\dfrac{5x+4}{x} \leq -2$

$$\frac{5x+4}{x} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{5x+4}{x} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x+4+2x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{7x+4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} \Leftrightarrow 7x + 4 \geq 0 \quad \& \quad x < 0 & \text{o bien} & 7x + 4 \leq 0 \quad \& \quad x > 0; \\ 7x \geq -4 \quad \& \quad x < 0 & \text{o bien} & 7x \leq -4 \quad \& \quad x > 0; \\ x \geq -\dfrac{4}{7} \quad \& \quad x < 0 & \text{o bien} & x \leq -\dfrac{4}{7} \quad \& \quad x > 0; \\ -\dfrac{4}{7} \leq x < 0 & \text{o bien} & x \in \emptyset; \end{array}$$

$$\left[-\frac{4}{7}, 0\right) \bigcup \emptyset = \left[-\frac{4}{7}, 0\right).$$

En este caso el conjunto solución es:

$$CS_1 = \left[-\frac{4}{7}, 0\right).$$

(b) $\dfrac{5x+4}{x} \geq 2$

$$\frac{5x+4}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{5x+4}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x+4-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcccccc} \Leftrightarrow 3x+4 \leq 0 & \& & x<0 & \text{o bien} & 3x+4 \geq 0 & \& & x>0; \\ 3x \leq -4 & \& & x<0 & \text{o bien} & 3x \geq -4 & \& & x>0; \\ x \leq -\dfrac{4}{3} & \& & x<0 & \text{o bien} & x \geq -\dfrac{4}{3} & \& & x>0; \\ x \leq -\dfrac{4}{3} & & & \text{o bien} & & x>0; & \end{array}$$

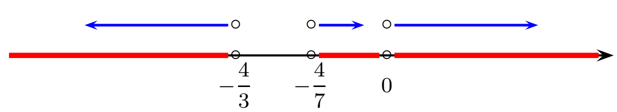
$$\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \bigcup (0, +\infty)\,.$$

Aquí el conjunto solución es:

$$CS_2 = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \bigcup (0, +\infty)\,.$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad original $\left|5 + \dfrac{4}{x}\right| \geq 2$ es:

$$\begin{aligned} CS = CS_1 \bigcup CS_2 &= \left[-\frac{4}{7}, 0\right) \bigcup \left[\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \bigcup (0, +\infty)\right] = \\ &= \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \bigcup \left[-\frac{4}{7}, 0\right) \bigcup (0, +\infty) = \\ &= \left\{\ \mathbb{R} - \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{7}\right)\ \right\} - \{\,0\,\}\,. \end{aligned}$$



□

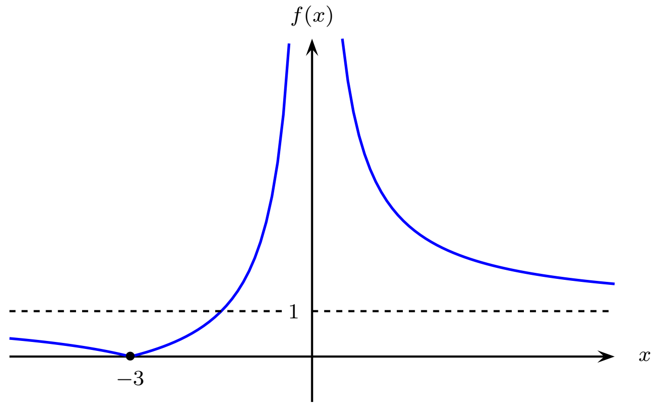
(3) Encuentre gráfica, dominio, rango, intervalos de monotonía y paridad de la función:

$$f(x) = \left|\frac{x+3}{x}\right|, \quad x \neq 0.$$

▼ Puesto que $f(x) = \left|\dfrac{x+3}{x}\right| = \left|1 + \dfrac{3}{x}\right|$.

La gráfica se construye de la siguiente manera: primero se traza la curva $y = \dfrac{3}{x}$, la que es similar a $y = \dfrac{1}{x}$; luego se traza $y = \dfrac{3}{x} + 1$, desplazando una unidad hacia arriba a $y = \dfrac{3}{x}$; finalmente se aplica el valor absoluto a $y = \dfrac{3}{x} + 1$, dejando igual a la parte no-negativa y reflejando en el eje x a la parte negativa.

La gráfica que se obtiene para la función $f(x) = \left|1 + \dfrac{3}{x}\right|$ es:



Dominio: el dominio de la función es

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Rango:
El rango de la función es

$$R_f = [0, +\infty)\,.$$

Monotonía:
La función f es creciente en el intervalo $(-3, 0)$.
La función f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(0, +\infty)$.
Paridad:
La función f no es par ni tampoco es impar.

□

(4) Determine el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 2}{x - \lfloor x \rfloor}}, \quad \lfloor x \rfloor = \text{parte entera de } x.$$

▼ Aquí debemos considerar que para $x \in Z$ (enteros), se tiene que $\lfloor x \rfloor = x$, y que para $x \notin Z$, se cumple $x > \lfloor x \rfloor$. Luego entonces, para $x \in \mathbb{R}$ $\& x \notin Z$ sucede que $x - \lfloor x \rfloor > 0$.
Por lo tanto, el dominio de f es:

$$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \notin Z \;\&\; x^2 + x - 2 \geq 0 \,\right\}.$$

Como

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{array}{ccccc} \Leftrightarrow x + 2 \leq 0 \quad \& \quad x - 1 \leq 0 & \text{o bien} & x + 2 \geq 0 \quad \& \quad x - 1 \geq 0; \\ x \leq -2 \quad \& \quad x \leq 1 & \text{o bien} & x \geq -2 \quad \& \quad x \geq 1; \\ x \leq -2 & \text{o bien} & x \geq 1; \\ (-\infty, -2] & \bigcup & [1, +\infty)\,. \end{array}$$

Es decir,

$$D_f = \left\{\, (-\infty, -2] \bigcup [1, +\infty) \,\right\} - Z.$$

□

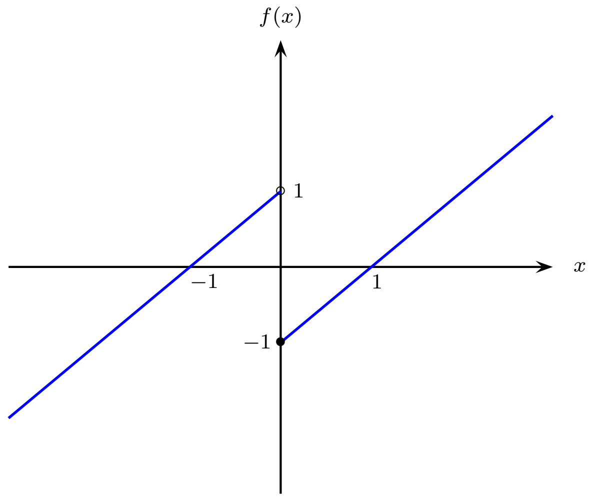
(5) Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 0; \\ 1 + x & \text{si } x < 0; \end{cases} \qquad \text{así como} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \geq 0; \\ x^2 - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

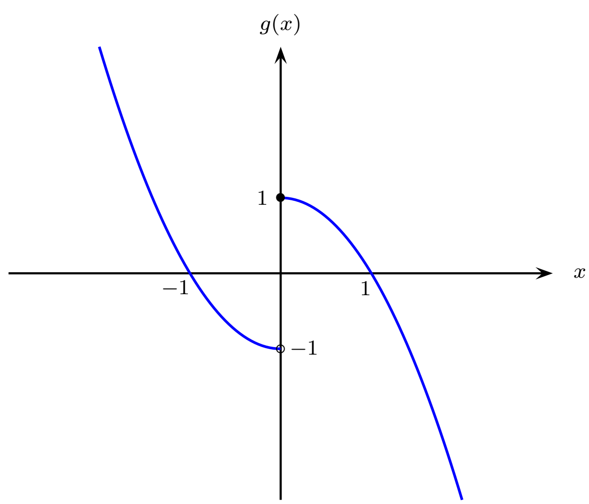
(a) Graficar ambas funciones. Hallar sus rangos.

▼ Las gráficas son:

La de la función $f(x)$:



La de la función $g(x)$:



Sus rangos:

$$\text{Rango de } f = \mathbb{R}\,.$$
$$\text{Rango de } g = \mathbb{R}\,.$$

□

(b) Calcule $(f \circ g)(x)$ para cada número real x

▼ Para obtener $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$, debemos aplicar primero la función g y luego la función f, por lo cual debemos hallar dónde $g(x) \geq 0$ y dónde $g(x) < 0$.

Observando la gráfica de la función g podemos decir que:

- Si $x \le -1$, entonces $g(x) \ge 0$ & $g(x) = x^2 - 1$, por lo cual
$$f[g(x)] = g(x) - 1 = (x^2 - 1) - 1 = x^2 - 2.$$
- Si $-1 < x < 0$, entonces $g(x) < 0$ & $g(x) = x^2 - 1$, por lo cual
$$f[g(x)] = 1 + g(x) = 1 + (x^2 - 1) = x^2.$$
- Si $0 \le x \le 1$, entonces $g(x) \ge 0$ & $g(x) = 1 - x^2$, por lo que
$$f[g(x)] = g(x) - 1 = (1 - x^2) - 1 = -x^2.$$
- Si $x > 1$, entonces $g(x) < 0$ & $g(x) = 1 - x^2$, por lo que
$$f[g(x)] = 1 + g(x) = 1 + (1 - x^2) = 2 - x^2.$$

Luego entonces,
$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \le -1; \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0; \\ -x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1; \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

□

(B) Segundo parcial

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x)$.

▼ Tenemos que

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x) = \lim_{x \to -\infty} [(x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{3}} - x] =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{[(x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{3}} - x][(x^3 + 2x^2)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{3}} x + x^2]}{(x^3 + 2x^2)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{3}} x + x^2} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^3 + 2x^2) - x^3}{(x^3 + 2x^2)^{\frac{2}{3}} + x(x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{[x^3(1 + \frac{2}{x})]^{\frac{2}{3}} + x[x^3(1 + \frac{2}{x})]^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2(1 + \frac{2}{x})^{\frac{2}{3}} + x^2(1 + \frac{2}{x})^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2[(1 + \frac{2}{x})^{\frac{2}{3}} + (1 + \frac{2}{x})^{\frac{1}{3}} + 1]} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{(1 + \frac{2}{x})^{\frac{2}{3}} + (1 + \frac{2}{x})^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{2}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3}.$$

□

(2) Considere las funciones

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1} \qquad \& \qquad g(x) = \frac{x^2-9}{x^2-x-2}$$

con sus dominios naturales.

(a) Grafique f & g

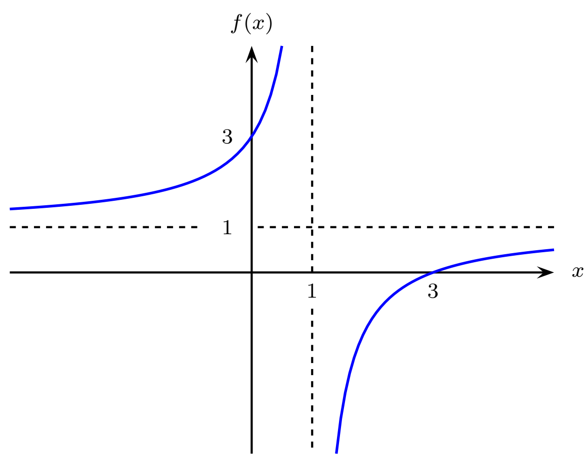
▼ Para tener la gráfica de f efectuamos la división

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1} = 1 - \frac{2}{x-1}\,.$$

Esto nos permite construir la curva $y = f(x)$ por etapas (mediante traslaciones y reflexiones), partiendo de la curva $y = \dfrac{1}{x}$.

A $y = \dfrac{1}{x}$ se le multiplica por 2 y se obtiene $y = \dfrac{2}{x}$; a $y = \dfrac{2}{x}$ se le traslada una unidad a la derecha y se obtiene $y = \dfrac{2}{x-1}$; a ésta se le refleja en el eje x para obtener $y = -\dfrac{2}{x-1}$; finalmente trasladamos una unidad hacia arriba a $y = -\dfrac{2}{x-1}$ para obtener $y = -\dfrac{2}{x-1} + 1$, que es $y = 1 - \dfrac{2}{x-1} = f(x)$.

La función $f(x)$ tiene la gráfica:



Para obtener la gráfica de g, debemos realizar un análisis de la función.

El dominio de $g(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x-2} = \dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-2)}$ es

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, (x+1)(x-2) = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{-1, 2\}\,.$$

Raíces: $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ o bien $x = 3$.

Por ser una función racional, g es continua en todo su dominio:

$$D_g = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 2) \bigcup (2, +\infty)\,.$$

Por lo cual g tiene discontinuidades en $x = -1$ y en $x = 2$. Ahora bien:

- Si $x \to -1^-$, entonces $(x+1) \to 0$ con valores negativos ya que $x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0$. Además

$$(x+3) \to 2 > 0, (x-3) \to -4 < 0 \,\&\, (x-2) \to -3 < 0.$$

Entonces $\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-2)} < 0$, por lo cual

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-2)} \to -\infty; \text{ esto es, } \lim_{x\to -1^-} g(x) = -\infty\,.$$

- Pero si $x \to -1^+$, entonces $(x+1) \to 0$ con valores positivos ya que $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$. Entonces
$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \lim_{x\to -1^+} g(x) = +\infty.$$
- De manera análoga se obtiene que
$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty.$$

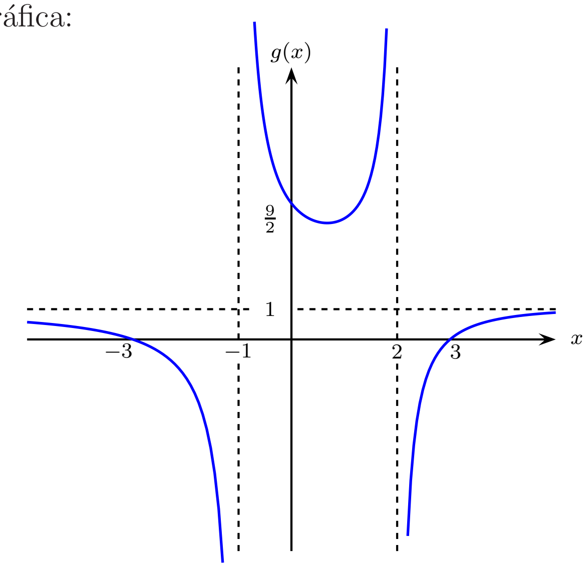
De lo anterior se puede asegurar que la función g tiene en $x = -1$ y en $x = 2$, discontinuidades esenciales y además que las rectas $x = -1$ & $x = 2$ son asíntotas verticales de g.
En cuanto a las asíntotas horizontales se tiene que

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-9}{x^2-x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(1-\frac{9}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1;$$

y de la misma manera se obtiene que

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 1.$$

Por lo tanto la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal de g.
Un posible bosquejo de la gráfica de g es entonces como sigue.
La función $g(x)$ tiene esta gráfica:



□

(b) Calcule $\lim_{x\to 1^+} (g\circ f)(x)$

▼ Tenemos

$$\lim_{x\to 1^+} (g\circ f)(x) = \lim_{x\to 1^+} g[f(x)].$$

Cuando $x \to 1^+$, sucede que $u = f(x) \to -\infty$, por lo cual

$$\lim_{x\to 1^+} g[f(x)] = \lim_{u\to -\infty} g(u) = 1.$$

Luego entonces,

$$\lim_{x\to 1^+}(g\circ f)(x) = 1.$$

$\square$

(c) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)$

▼ Ahora

$$\lim_{x\to+\infty}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to+\infty} f[g(x)].$$

Cuando $x\to+\infty$, sucede que $w = g(x)\to 1$, con valores $g(x) < 1$, por lo cual

$$\lim_{x\to+\infty} f[g(x)] = \lim_{w\to 1^-} f(w) = +\infty.$$

Luego entonces,

$$\lim_{x\to+\infty}(f\circ g)(x) = +\infty.$$

$\square$

(3) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x\geq 5 \text{ o bien } x\leq -1;\\ ax^2+b & \text{si } -1 < x\leq 3;\\ cx+d & \text{si } 3 < x < 5;\end{cases}$$

determine valores a, b, c, d con $a\neq 0$ para que f resulte continua en todo $\mathbb{R}$.

▼ Reescribimos la función f como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x\leq -1;\\ ax^2+b & \text{si } -1 < x\leq 3;\\ cx+d & \text{si } 3 < x < 5;\\ x & \text{si } x\geq 5.\end{cases}$$

Por estar conformada por expresiones polinomiales, la función f es continua en los intervalos

$$(-\infty,-1]\,,(-1,3]\,,(3,5)\ \&\ [5,+\infty)\,.$$

Se debe cuidar entonces la continuidad de f en $x=-1$, $x=3$ & $x=5$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1}(x) = -1$ &
$\displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1}(ax^2+b) = a(-1)^2+b = a+b$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)$ existe si y sólo si
$\displaystyle\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) \Leftrightarrow -1 = a+b.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(ax^2+b) = a(3)^2+b = 9a+b$ &
$\displaystyle\lim_{x\to 3^+} = \lim_{x\to 3}(cx+d) = c(3)+d = 3c+d$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$ existe si y solo si
$\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) \Leftrightarrow 9a+b = 3c+d.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5}(cx+d) = c(5)+d = 5c+d$ &
$\displaystyle\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5} x = 5$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 5} f(x)$ existe si y sólo si
$\displaystyle\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) \Leftrightarrow 5c+d = 5.$

(d) Por lo tanto, a, b, c y d deben cumplir con el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a+b &= -1; \\ 9a+b &= 3c+d; \\ 5c+d &= 5. \end{cases}$$

De $a+b=-1$ se tiene que $b=-1-a$.
De $5c+d=5$ se tiene que $d=5-5c$.
Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos

$$9a+(-1-a)=3c+(5-5c) \Rightarrow 8a-1=-2c+5 \Rightarrow 8a+2c=6 \Rightarrow 4a+c=3.$$

Se tiene una infinidad de soluciones: si $a=t$, entonces $b=-1-t$, $c=3-4t$ & $d=20t-10$, donde t puede ser cualquier número real.
Una solución posible es (para $t=1$):

$$a=1,\ b=-2,\ c=-1\ \&\ d=10.$$

Valores para los cuales la función f resulta ser continua en todo $\mathbb{R}$. □

(4) Halle un intervalo de longitud no mayor que 0.1 donde se encuentre una raíz del polinomio:

$$\rho(x)=-x^4+16x^3-60x^2+1.$$

▼ Por ser un polinomio $\rho(x)=-x^4+16x^3-60x^2+1$, es una función continua en todo $\mathbb{R}$.
Ahora bien, $\rho(0)=1>0$ & $\rho(1)=-44<0$; entonces, por el teorema del Valor Intermedio, podemos asegurar la existencia de al menos un $0<c<1$ tal que $\rho(c)=0$.
El punto medio del intervalo $(0,1)$ es $x=\dfrac{1}{2}$ & $\rho\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{16}-12<0$, por lo cual se puede asegurar que $0<c<\dfrac{1}{2}$.
El punto medio del intervalo $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ es $x=\dfrac{1}{4}$ & $\rho\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4^4}-\dfrac{5}{2}<0$, por lo cual se puede asegurar que $0<c<\dfrac{1}{4}$.
El punto medio del intervalo $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ es $x=\dfrac{1}{8}$ & $\rho\left(\dfrac{1}{8}\right)=-\dfrac{1}{8^4}+\dfrac{3}{32}>0$, lo que permite asegurar que $\dfrac{1}{8}<c<\dfrac{1}{4}$.
El punto medio del intervalo $\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4}\right)$ es $x=\dfrac{3}{16}$ & $\rho\left(\dfrac{3}{16}\right)=-\dfrac{81}{16^4}-\dfrac{257}{16^2}<0$, por lo cual podemos asegurar que $\dfrac{1}{8}<c<\dfrac{3}{16}$. Además la longitud del intervalo $\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{16}\right)$ es $l=\dfrac{1}{16}$ que es menor que $0.1=\dfrac{1}{10}$. Por lo tanto el intervalo buscado es $\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{16}\right)$.

□

(C) Tercer parcial

(1) H & h son dos números positivos tales que $0<h<H$. Considere la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x}{(x-h)(x-H)}.$$

(a) Calcule sus puntos críticos

▼ Derivamos:

$$f'(x) = \frac{(x-h)(x-H) - x(x-H+x-h)}{(x-h)^2(x-H)^2} =$$
$$= \frac{x^2 - (H+h)x + hH - x[2x-(h+H)]}{(x-h)^2(x-H)^2} =$$
$$= \frac{x^2 - (H+h)x + hH - 2x^2 + x(H+h)}{(x-h)^2(x-H)^2} =$$
$$= \frac{-x^2 + hH}{(x-h)(x-H)} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + hH = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = hH \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{hH} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{hH}.$$

Luego, $x = \pm\sqrt{hH}$ son los únicos puntos críticos.

□

(b) Halle su dominio, raíz, asíntotas; dibuje la gráfica de $f(x)$

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{\, h, H \,\}$.

Raíz: $x = 0$.

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to h^{\mp}} \frac{x}{(x-h)(x-H)} = \pm\infty \ \& \ \lim_{x\to H^{\pm}} \frac{x}{(x-h)(x-H)} = \pm\infty.$$

Ya que

$$\lim_{x\to h} x = h > 0,\ \lim_{x\to h^{\mp}} (x-h) = 0^{\mp},\ \lim_{x\to h} (x-H) = h - H < 0,$$
$$\lim_{x\to H} x = H > 0,\ \lim_{x\to H} (x-h) = H - h > 0 \ \& \ \lim_{x\to H^{\pm}} (x-H) = 0^{\pm},$$

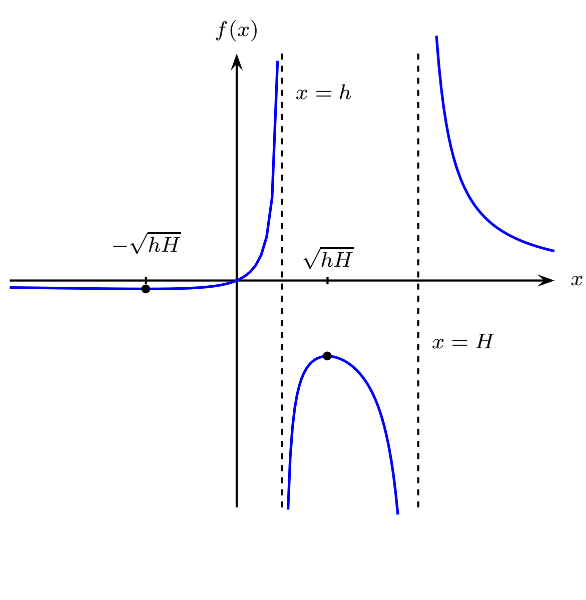
las igualdades $x = h$ & $x = H$ son asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x-h)(x-H)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{h}{x}\right)\left(1-\frac{H}{x}\right)} = \frac{0^{\pm}}{1\times 1} = 0^{\pm}.$$

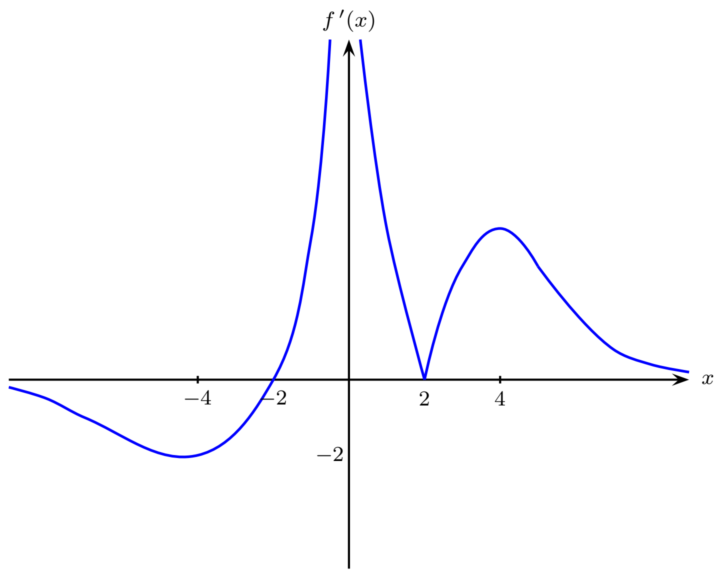
Luego, la recta $y = 0$ es la única asíntota horizontal.

La gráfica de la función $f(x)$ con esas condiciones es:



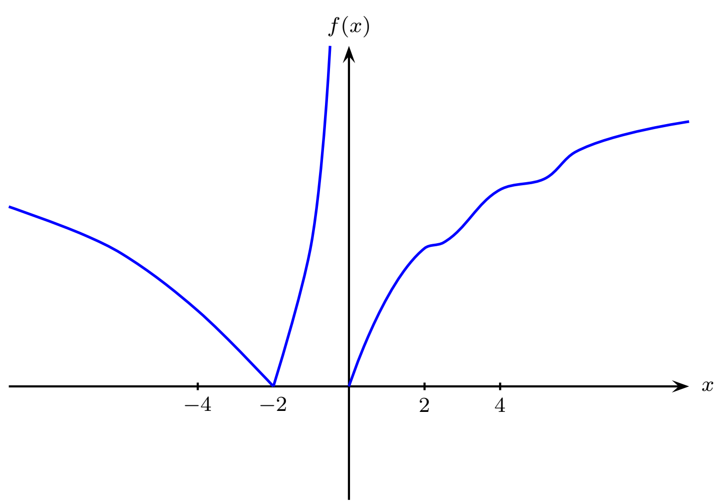
□

(2) Observe la figura siguiente donde se bosqueja la gráfica de la función $f'(x)$:

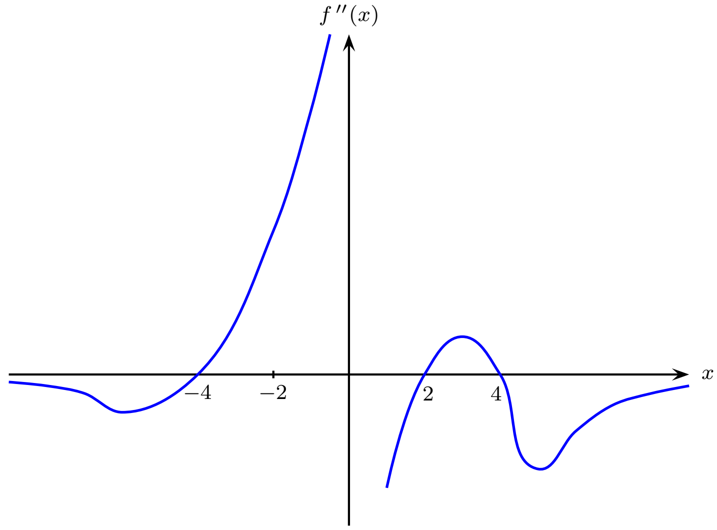


A partir de ésta bosqueje posibles gráficas para $f(x)$ y para $f''(x)$.

▼ Vamos a ver las gráficas correspondientes.
La de $f(x)$:



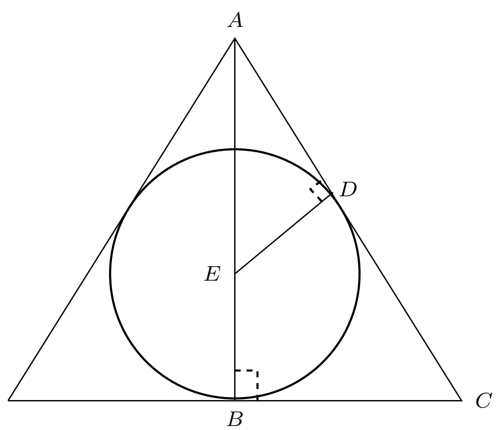
La gráfica de la derivada $f''(x)$ es:



□

(3) Determine las dimensiones de un cono circunscrito a una esfera de radio r que tenga volumen mínimo.

$V = \dfrac{1}{3}\pi a^2 h$ es la fórmula para calcular el volumen de un cono de radio a y altura h. ▼ Usando la figura



Consideramos una esfera de radio $r = \overline{ED} = \overline{EB}$ y considerando un cono circular recto circunscrito de radio $R = \overline{BC}$ con altura $H = \overline{AB}$.
Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son triángulos rectángulos semejantes, por lo cual

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}.$$

Si $\overline{AE} = h$, entonces $\overline{AD} = \sqrt{h^2 - r^2}$ y $\overline{AB} = H = h + r$.
Luego entonces,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{H}{\sqrt{h^2 - r^2}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{h + r}{\sqrt{h^2 - r^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{r(h + r)}{\sqrt{h^2 - r^2}}, \text{ donde } r \text{ es conocido.}$$

El volumen V del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{r(h+r)}{\sqrt{h^2-r^2}}\right]^2(h+r) = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2(h+r)^2}{h^2-r^2}(h+r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2(h+r)^2(h+r)}{(h-r)(h+r)} = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2(h^2+2hr+r^2)}{h-r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(h) = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2h^2+2r^3h+r^4}{h-r}.$$

Derivamos respecto a h

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi\frac{(h-r)(2r^2h+2r^3)-(r^2h^2+2r^3h+r^4)}{(h-r)^2};$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2h^2-2r^3h-3r^4}{(h-r)^2} = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2(h^2-2hr-3r^2)}{(h-r)^2};$$

$$V'(h) = \frac{\pi r^2(h+r)(h-3r)}{3(h-r)^2};$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi r^2(h+r)(h-3r)}{3(h-r)^2} = 0 \Leftrightarrow h+r=0 \text{ o bien } h-3r=0.$$

De $h+r=0$, se tiene que $h=-r$, lo que no tiene sentido (ya que $r>0 \Rightarrow -r<0 \Rightarrow h<0$).
De $h-3r=0$ se tiene que $h=3r$, lo que sí tiene sentido.
Con $h=3r$ se tiene que $H=h+r=4r$, y además

$$R = \frac{r(h+r)}{\sqrt{h^2-r^2}} = \frac{r(4r)}{\sqrt{9r^2-r^2}} = \frac{4r^2}{\sqrt{8r^2}} = \frac{4r^2}{2\sqrt{2}r} = \sqrt{2}r.$$

Es decir, $H=4r$ & $R=\sqrt{2}r$.
Falta ver que el volumen $V(h)$ es mínimo para $h=3r$:

$$\begin{aligned}
V''(h) &= \frac{1}{3}\pi\frac{(h-r)^2(2r^2h-2r^3)-(r^2h^2-2r^3h-3r^4)2(h-r)}{(h-r)^4} = \\
&= \frac{1}{3}\pi\frac{(h-r)^2 2r^2(h-r)-r^2(h^2-2rh-3r^2)2(h-r)}{(h-r)^4} = \\
&= \frac{1}{3}\pi\frac{2r^2(h-r)\left[(h-r)^2-(h^2-2rh-3r^2)\right]}{(h-r)(h-r)^3} = \\
V''(h) &= \frac{2\pi r^2\left[(h-r)^2-(h+r)(h-3r)\right]}{3(h-r)^3}.
\end{aligned}$$

Valuando en $h=3r$, se obtiene que

$$V''(3r) = \frac{2\pi r^2[(2r)^2-(4r)(0)]}{3(2r)^3} = \frac{8\pi r^4}{24r^3} = \frac{\pi r}{3} > 0,$$

lo que implica la existencia de un mínimo para el volumen V cuando $h=3r$.
El volumen mínimo es

$$V_{\text{mín}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{2}r)^2(4r) = \frac{8}{3}\pi r^3;$$

$$V_{\text{mín}} = 2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 2 \text{ (volumen de la esfera).}$$

□

(4) Obtenga la ecuación de una recta que es tangente simultáneamente a las curvas

$$y = x^2 \qquad \& \qquad y = \frac{1}{x}\,.$$

▼ Tal recta debe pasar por puntos de la forma (a, a^2) & $\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$ con $a \neq b \neq 0$ desde luego y su pendiente $m = \dfrac{\frac{1}{b} - a^2}{b - a} = \dfrac{1 - a^2 b}{b^2 - ab}$ debe ser igual a $2a$ y a $-\dfrac{1}{b^2}$, esto es:

$$\frac{1 - a^2 b}{b^2 - ab} = 2a \Rightarrow 1 - a^2 b = 2ab^2 - 2a^2 b \Rightarrow ba^2 - 2b^2 a + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \frac{2b^2 \pm \sqrt{4b^4 - 4b}}{2b}; \frac{1 - a^2 b}{b^2 - ab} = \frac{-1}{b^2} \Rightarrow b^2 - a^2 b^3 = ab - b^2 \Rightarrow b - a^2 b^2 = a - b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2 a^2 + a - 2b = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8b^3}}{2b^2}\,.$$

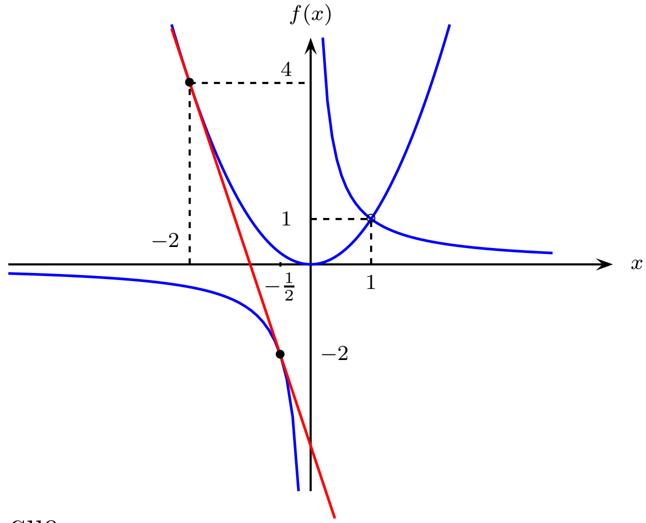
Por lo que:

$$b \pm \frac{\sqrt{b^4 - b}}{b} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8b^3}}{2b^2} \Rightarrow 2b^3 \pm 2b\sqrt{b^4 - b} = -1 \pm \sqrt{1 + 8b^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pm 2b\sqrt{b^4 - b} \mp \sqrt{1 + 8b^3} = -1 - 2b^3.$$

En realidad sólo hay dos ecuaciones:

$$2b\sqrt{b^4 - b} \mp \sqrt{1 + 8b^3} = -(1 + 2b^3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4b^2(b^4 - b) + 1 + 8b^3 \mp 4b\sqrt{(b^4 - b)(1 + 8b^3)} = 1 + 4b^3 + 4b^6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4b^6 - 4b^3 + 1 + 8b^3 \mp 4b\sqrt{(b^4 - b)(1 + 8b^3)} - 1 - 4b^3 - 4b^6 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mp 4b\sqrt{(b^4 - b)(1 + 8b^3)} = 0 \Rightarrow \sqrt{(b^4 - b)(1 + 8b^3)} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b(b^3 - 1)(1 + 8b^3) = 0 \Rightarrow b^3 - 1 = 0 \text{ o bien } 1 + 8b^3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^3 = 1 \text{ o bien } 8b^3 = -1 \Rightarrow b = 1 \text{ o bien } b^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = 1 \text{ o bien } b = -\frac{1}{2}\,.$$

Veamos ambas gráficas:



Claramente, de la figura se ve que

$$b \neq 1.$$

De ahí que $b = -\dfrac{1}{2}$; y como $2a = -\dfrac{1}{b^2} \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2b^2} \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2(-\frac{1}{2})^2} \Rightarrow a = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$

Así los puntos por los que pasa la tangente son $(-2, 4)$ y $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{-\frac{1}{2}}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}, -2\right)$.

La pendiente de la tangente es:

$2a = 2(-2) = -4$, o también $-\dfrac{1}{b^2} = -\dfrac{1}{(-\frac{1}{2})^2} = -\dfrac{1}{\frac{1}{4}} = -4$, o inclusive $\dfrac{-2-4}{-\frac{1}{2}+2} = \dfrac{-6}{\frac{3}{2}} = -4$.

Y la ecuación de la recta tangente es

$$y - 4 = -4(x+2) \Rightarrow y = -4x - 8 + 4 \Rightarrow y = -4x - 4$$

o también

$$y + 2 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x - 2 - 2 \Rightarrow y = -4x - 4.$$

$\square$