CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E3100

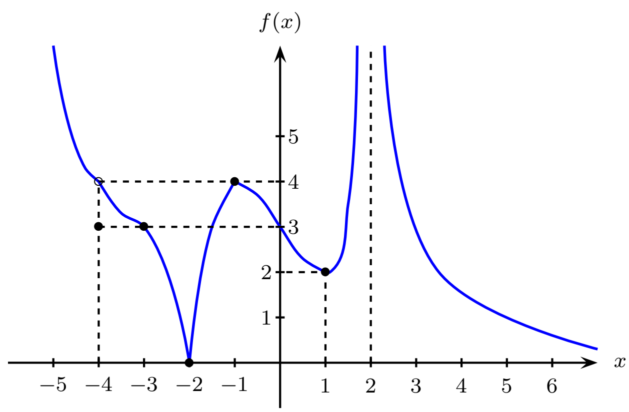
(1) Se lanza una pelota hacia arriba a una velocidad de 15 m/seg desde el borde de un acantilado a 135 m arriba del suelo. La altura de la pelota como función del tiempo está dada por

$$s(t) = -5t^2 + 15t + 135$$

(a) Determinar el dominio de la función
(b) ¿Para que valores de t la pelota se encuentra a lo más a 45 m del suelo?
(c) ¿Cuándo choca contra el suelo?

(2) Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia al oeste a 25 km/h ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles dos horas más tarde?

(3) A partir de la gráfica de f



Determine el conjunto de puntos del dominio de f que satisfacen:
(a) $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$
(b) $f'' > 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$
(c) $f'(x)$ no existe

(4) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$, determine:
(a) Dominio, raíces y paridad
(b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
(c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión
(d) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales
(e) Máximos y mínimos relativos y absolutos
(f) Esbozo gráfico y rango

(5) Calcule los valores de a & b, que hacen de la siguiente función una función continua.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < -1; \\ a & \text{si } x = -1; \\ bx^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2\,. \end{cases}$$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(6) Se va a construir un recipiente cilíndrico con capacidad de 2 litros. La superficie lateral será de cartón con base y tapa de metal. Si el cartón cuesta 2 pesos por metro cuadrado y la superficie metálica cuesta 5 pesos por metro cuadrado, calcular las dimensiones del cilindro que minimicen el costo del material de éste.

Respuestas

(1) Se lanza una pelota hacia arriba a una velocidad de 15 m/seg desde el borde de un acantilado a 135 m arriba del suelo. La altura de la pelota como función del tiempo está dada por

$$s(t) = -5t^2 + 15t + 135$$

(a) ¿Cuándo choca contra el suelo?

▼ Tenemos que hallar t tal que

$$-5t^2 + 15t + 135 = 0 \text{ o bien } -5(t^2 - 3t - 27) = 0\,.$$

Esto es resolver la ecuación

$$t^2 - 3t - 27 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 108}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{117}}{2}\,.$$

Como no debemos considerar tiempos negativos pues el experimento se inicia para $t = 0$ la pelota llega al suelo para

$$t = \frac{3 + \sqrt{117}}{2} \approx 6.9083269$$

(b) Determinar el dominio de la función

▼ Tenemos

$$D_s = \left[0, \frac{3 + \sqrt{117}}{2}\right]\,,$$

pues al llegar al suelo cesa el experimento

(c) ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a lo más a 45 m del suelo?

▼ Cuando

$$-5t^2 + 15t + 135 \leq 45 \Rightarrow -5t^2 + 15t + 90 \leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5t^2 - 15t - 90 \geq 0 \Rightarrow 5(t^2 - 3t - 18) \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^2 - 3t - 18 = (t + 3)(t - 6) \geq 0\,.$$

Esta desigualdad se cumple si:

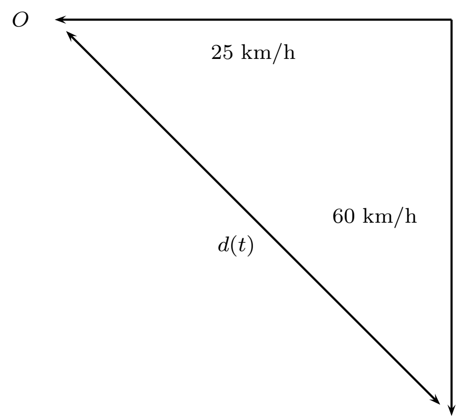
$$\begin{aligned} t + 3 \geq 0 \;\&\; t - 6 \geq 0 \quad &\text{o bien} \quad t + 3 \leq 0 \;\&\; t - 6 \leq 0 \\ t \geq -3 \;\&\; t \geq 6 \quad &\text{o bien} \quad t \leq -3 \;\&\; t \leq 6 \\ t \in [6, +\infty) \quad &\text{o bien} \quad t \in (-\infty, -3]\,. \end{aligned}$$

Entonces la pelota estará a menos de $45\,m$ del suelo si

$$t \in \left[6, \frac{3 + \sqrt{117}}{2}\right] \approx [6, 6.9083269]\,.$$

(2) Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia al oeste a 25 km/h ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles dos horas más tarde?

▼ Usamos la siguiente gráfica



El espacio que recorre el autómovil que va hacia el sur (en km) es $60t$ con t en horas y el del otro automóvil es $25\,t$, por lo que, por el teorema de Pitágoras, la distancia entre ambos automóviles es

$$d(t) = \sqrt{(60t)^2 + (25t)^2} = \sqrt{3600t^2 + 625t^2} = \sqrt{4225}\,t = 65t \text{ km},$$

entonces,

$$\frac{d}{dt}d(t) = d'(t) = 65 \text{ km/h},$$

y en particular

$$\left.\frac{d}{dt}d(t)\right|_{t=2} = d'(t)|_{t=2} = 65 \text{ km/h}.$$

□

(3) (a) $f'(x) > 0,\ f'(x) < 0,\ f'(x) = 0$

▼ $f'(x) > 0$ para $x \in (-2,-1)\bigcup(1,2)$;
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty,-4)\bigcup(-4,-3)\bigcup(-3,-2)\bigcup(-1,1)\bigcup(2,+\infty)$;
$f'(x) = 0$ si $x = -3, -1$ o bien 1 .

□

(b) $f''(x) > 0,\ f''(x) < 0,\ f''(x) = 0$

▼ $f'' > 0$ si $x \in (-\infty,-4)\bigcup(-4,-3)\bigcup(0,2)\bigcup(2,+\infty)$;
$f'' < 0$ si $x \in (-3,-2)\bigcup(-2,0)$;
$f'' = 0$ si $x = -3$ o bien $x = 0$.

□

(c) $f'(x)$
▼ En $x = -4, -2$ & 2 no existe la derivada. □

(4) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$, determine:
(a) Dominio, raíces y paridad
▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.
Raíces: $x = \pm 1$.
La función es impar .

□

(b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

▼ Veamos el signo de la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^2(x^2-1)}{x^6} = \frac{2x^2 - 3x^2 + 3}{x^4} =$$
$$= \frac{3 - x^2}{x^4} > 0 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow |\,x\,| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \text{ con } (x \neq 0)\,.$$

Luego, $f(x)$ es creciente en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y en $\left(0, \sqrt{3}\right)$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3 - x^2}{x^4} < 0 \Leftrightarrow 3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow |\,x\,| > 3 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$ o bien $x < -\sqrt{3}\,$.

Entonces, $f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y en $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

□

(c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión

▼ Calculemos la segunda derivada de $f(x)$

$f'' = [f']' = \left(\dfrac{3 - x^2}{x^4}\right)' = \dfrac{-2x^5 - 4x^3(3 - x^2)}{x^8} = \dfrac{-2x^2 - 12 + 4x^2}{x^5} = \dfrac{2x^2 - 12}{x^5}$;

$f''(x) > 0$ si

$$\begin{array}{rcl}
2x^2 - 12 > 0 \;\&\; x^5 > 0 & \text{o bien} & 2x^2 - 12 < 0 \;\&\; x^5 < 0; \\
x^2 > 6 \;\&\; x > 0 & \text{o bien} & x^2 < 6 \;\&\; x < 0; \\
|\,x\,| > \sqrt{6} \;\&\; x > 0 & \text{o bien} & |\,x\,| < \sqrt{6} \;\&\; x < 0; \\
x > \sqrt{6} & \text{o bien} & -\sqrt{6} < x < 0;
\end{array}$$
$$x \in \left(-\sqrt{6}, 0\right) \bigcup \left(\sqrt{6}, +\infty\right)\,.$$

En ese intervalo, $f(x)$ es cóncava hacia arriba.

Y $f(x)$ será cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\sqrt{6}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{6}\right)$.

Los puntos de inflexión están donde $f''(x) = 0$, como observamos en

$$2x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}\,,$$

pues en ellos la segunda derivada cambia de signo y además la función es continua.

□

(d) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

▼ $x = 0$ es asíntota vertical & $y = 0$ es asíntota horizontal. □

(e) Máximos y mínimos relativos y absolutos

▼ Los puntos críticos están donde

$$f' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}\,.$$

En $x = -\sqrt{3}$ hay un mínimo relativo pues $f(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente.

En $x = \sqrt{3}$ hay un máximo relativo ya que $f(x)$ pasa de ser creciente a decreciente.

Debido a que $\displaystyle\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mp\infty$, la función no tiene valores extremos absolutos.

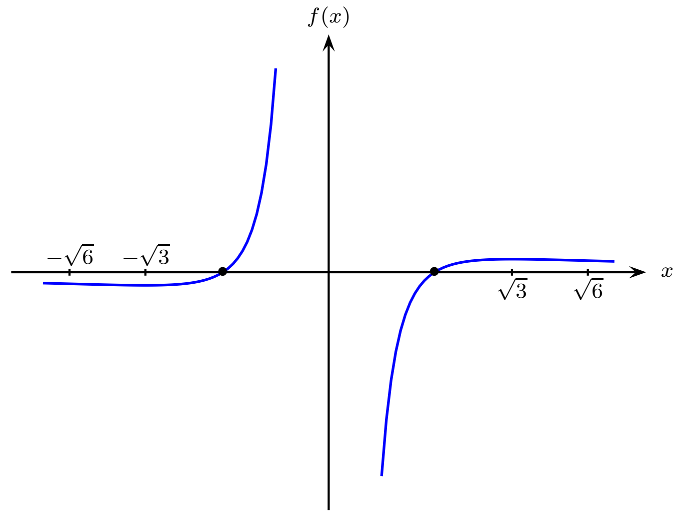
□

(f) Esbozo gráfico y rango

▼ Calculamos los siguientes valores

$$f(\pm\sqrt{3}) = \frac{2}{\pm\sqrt{3}^3} = \pm\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}} \approx \pm 0.385;$$
$$f(\pm\sqrt{6}) = \frac{5}{\pm 6^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{5}{6^{\frac{3}{2}}} \approx \pm 0.34;$$

La gráfica de la función $f(x)$ es:



Rango: el rango de f es todo $\mathbb{R}$.

□

(5) Calcule los valores de a & b, que hacen de la siguiente función una función continua.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < -1; \\ a & \text{si } x = -1; \\ bx^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2\,. \end{cases}$$

▼ La función en -1 tiene que cumplir:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)\,.$$

Y de aquí:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)\,.$$

Pero, como

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -3 - 2 = -5\,,$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = b + 1\,,$$

y como

$$f(-1) = a\,,$$

entonces, para que exista límite en -1.

$$-5 = b + 1 \Rightarrow b = -6\,,$$

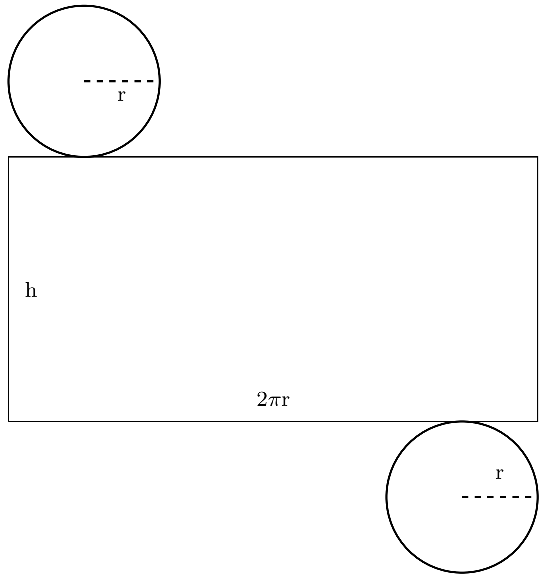
y para que la función sea continua en -1:

$$a = -5\,.$$

□

(6) Se va a construir un recipiente cilíndrico con capacidad de 2 litros. La superficie lateral será de cartón con base y tapa de metal. Si el cartón cuesta 2 pesos por metro cuadrado y la superficie metálica cuesta 5 pesos por metro cuadrado, calcular las dimensiones del cilindro que minimicen el costo del material de éste.

▼ Veamos el correspondiente dibujo:



Puesto que el volumen (V) es 2 litros, consideramos entonces que el $V = 2\,l\, = 2$ dm^3.
Sabemos que el volumen del cilindro es el área de la base, πr^2, por la altura h; para r y h en decímetros.

$$V = 2 = \pi r^2 h.$$

El costo de la superficie lateral será $(2\pi r h)\,2$ y el de la superficie metálica, $(2\pi r^2)5$ por lo que el costo total es:

$$C = 4\pi r h + 10\pi r^2;$$

pero como $h = \dfrac{2}{\pi r^2}$, entonces podemos expresar el costo como función de la variable r:

$$C(r) = 4\pi r\frac{2}{\pi r^2} + 10\pi r^2 = 8r^{-1} + 10\pi r^2.$$

Ahora bien,

$$C'(r) = -\frac{8}{r^2} + 20\pi r = \frac{20\pi r^3 - 8}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 20\pi r^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{8}{20\pi} = \frac{2}{5\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2}{5\pi}}$$

y también

$$h = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{5\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{2\times 25}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}};$$

Éstos son los valores que corresponden al costo mínimo del material: el punto crítico $r = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5\pi}}$ es mínimo puesto que $C''(r) = \dfrac{16}{r^3} + 20\pi > 0$ para $r > 0$. □