CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E3200

(A) Primer parcial

(1) Sean las funciones:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \qquad \& \qquad g(x) = \frac{x-1}{x+3}\,.$$

Obtener: D_f, D_g, $(f \circ g)(x)$ & $D_{f\circ g}$.

(2) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \le -2; \\ |\, x^2 - 1 \,| & \text{si } x \in (-2, 2)\,; \\ -2 & \text{si } x \ge 2. \end{cases}$$

Obtener el dominio, raíces y especifique los intervalos donde: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x)$ crece; $f(x)$ decrece. Hallar su gráfica.

(3) Una caja rectangular con tapa y base cuadrada tiene un área (de todas sus caras) igual a 600 cm^2. Exprese el volumen de la caja como una función de x, donde x es la longitud de un lado de la base.

(B) Segundo parcial

(1) Muestre que la función

$$h(x) = x^5 + x - 5,$$

tiene al menos una raíz en los números reales.

(2) Sea

$$f(x) = \sqrt{2x+1}.$$

Aplique la definición de la derivada para encontrar $f'(a)$, con $a \in D_f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(3) Bosqueje la gráfica de una función que cumpla las siguiente condiciones:

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3; & \lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = 5; & \lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = 4; \\ f(0) = 0; & \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1; & \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty. \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty; & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1; & \end{array}$$

(4) Sea la función $f(x) = 2\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$.

(a) Encontrar el dominio y raíces de la función
(b) Clasificar sus discontinuidades
(c) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales
(d) Bosquejar la gráfica de la función

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(C) Tercer parcial

(1) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y^3 - y = x^2 y + x$, en el punto $(0, 1)$.

(2) ¿Con qué razón aumenta el área de un triángulo equilátero cuando su base mide 10 cm y está aumentando a razón de 0.5 cm/s? (El área del triángulo equilátero se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.)

(3) Se construye un recipiente cilíndrico, sin tapa, con un volumen de 1 m^3. La parte cilíndrica del recipiente se fabrica con aluminio y la base con cobre. El cobre es cinco veces más caro que el aluminio. ¿Qué dimensiones minimizarían el costo total del recipiente?

(4) Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{9x^2 - 1}$

(a) Encontrar el dominio, raíces y paridad
(b) Encontrar los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente
(c) Halle los valores máximos y mínimos locales de f
(d) Encuentre los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo; y puntos de inflexión
(e) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales
(f) Bosquejar la gráfica de la función

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) Sean las funciones:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \qquad \& \qquad g(x) = \frac{x-1}{x+3}\,.$$

Obtener: D_f, D_g, $(f \circ g)(x)$ & $D_{f\circ g}$.

▼ Vemos que:

i) $D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2x+1 \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq -\frac{1}{2} \,\right\} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

ii) $D_g = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x+3 \neq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq -3 \,\right\} = \mathbb{R} - \{\, -3 \,\}$;

iii) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \sqrt{2\left(\frac{x-1}{x+3}\right)+1} = \sqrt{\frac{2x-2+x+3}{x+3}} = \sqrt{\frac{3x+1}{x+3}}$;

iv)

$$D_{f\circ g} = \left\{\, x \in D_g \;\middle|\; g(x) \in D_f \,\right\} = \left\{\, x \neq -3 \;\middle|\; g(x) \in D_f \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \neq -3 \;\middle|\; \frac{x-1}{x+3} \geq -\frac{1}{2} \,\right\}.$$

Resolvemos la desigualdad

$$\frac{x-1}{x+3} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+3} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-1)+(x+3)}{2(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x-2+x+3}{2(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{2(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$3x+1 \geq 0 \quad \& \quad x+3 > 0 \quad \text{o bien} \quad 3x+1 \leq 0 \quad \& \quad x+3 < 0;$$
$$x \geq -\frac{1}{3} \quad \& \quad x > -3 \quad \text{o bien} \quad x \leq -\frac{1}{3} \quad \& \quad x < -3;$$
$$x \in \left[-\frac{1}{3}, \infty\right) \quad \text{o bien} \quad x \in (-\infty, -3)\,;$$
$$x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) \bigcup (-\infty, -3) = \mathbb{R} - \left[-3, -\frac{1}{3}\right).$$

□

(2) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq -2; \\ |\, x^2 - 1 \,| & \text{si } x \in (-2, 2)\,; \\ -2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Obtener el dominio, raíces y especifique los intervalos donde: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x)$ crece; $f(x)$ decrece. Hallar su gráfica.

▼ El dominio:

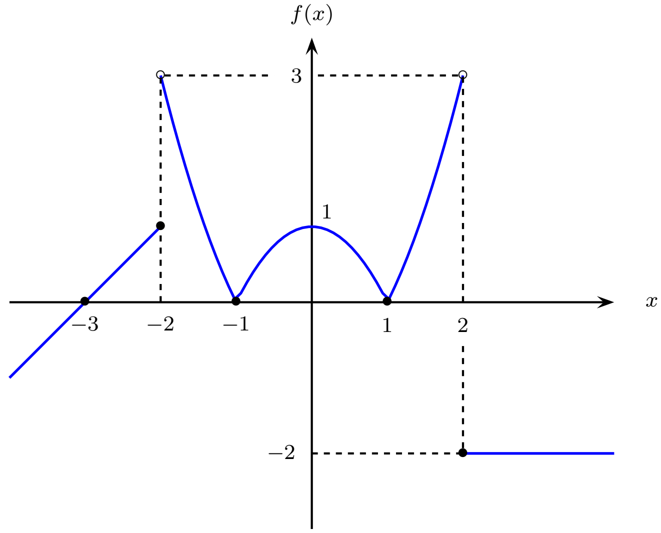
$$D_f = \mathbb{R}\,.$$

Las raíces: $\{\, -3, -1, 1 \,\}$.

(a) $f(x) > 0$ si $x \in (-3, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, 2)$;

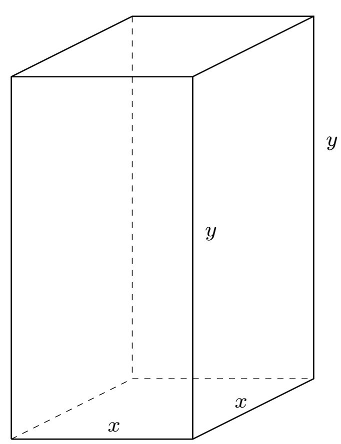
(b) $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3) \bigcup [2, \infty)$;
(c) $f(x)$ crece en $(-\infty, -2)$, en $(-1, 0)$ y en $(1, 2)$;
(d) $f(x)$ decrece en $(-2, -1)$ y en $(0, 1)$.

La gráfica de $f(x)$ con las condiciones expresadas es:



$\square$

(3) Una caja rectangular con tapa y base cuadrada tiene un área (de todas sus caras) igual a 600 cm^2. Exprese el volumen de la caja como una función de x, donde x es la longitud de un lado de la base. ▼ Usamos la figura



El área de todas la caras es

$$A = 2x^2 + 4xy = 600 \text{ cm}^2.$$

El volumen de la caja es

$$V = x^2 y \text{ cm}^3.$$

Esta función se desea exclusivamente en función de la variable x. De la ecuación anterior $2x^2 + 4xy = 600$, se tiene que

$$y = \frac{1}{4x}\left(600 - 2x^2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{600}{x} - 2x\right).$$

Sustituyendo en el volumen obtenemos la función deseada:

$$V(x) = x^2 \times \frac{1}{4}\left(\frac{600}{x} - 2x\right) = \frac{1}{4}(600x - 2x^3).$$

$\square$

(B) Segundo parcial

(1) Muestre que la función

$$h(x) = x^5 + x - 5,$$

tiene al menos una raíz en los números reales.

▼ Valuando en dos puntos pertinentes, tenemos:

$$f(0) = -5 < 0 \ \& \ f(2) = 2^5 + 2 - 5 = 29 > 0.$$

Tenemos, una función $f(x)$ continua en $\mathbb{R}$ y un intervalo $[0, 2]$, en los extremos del cual la función tiene valores con signo distinto. Usando el teorema del Valor Intermedio se sabe que existe al menos un valor $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$, que es lo que se quería mostrar.

$\square$

(2) Sea

$$f(x) = \sqrt{2x + 1}.$$

Aplique la definición de la derivada para encontrar $f'(a)$, con $a \in D_f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

▼ Calculamos el cociente diferencial del cual obtendremos el límite:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2a+1}}{x - a} = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2a+1}}{x - a} \times \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2a+1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2a+1}} =$$
$$= \frac{(2x+1) - (2a+1)}{(x-a)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2a+1})} = \frac{2(x-a)}{(x-a)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2a+1})} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2a+1}} \text{ si } x - a \neq 0, \text{ esto es, si } x \neq a.$$

Así:

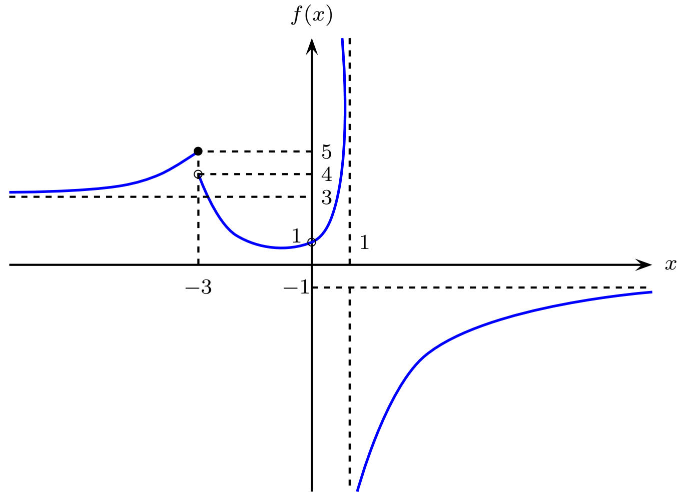
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2a+1}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2a+1} + \sqrt{2a+1}} = \frac{2}{2\sqrt{2a+1}} = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}.$$

Esta última expresión sólo tiene sentido si $2a + 1 > 0$, es decir, si $a > -\frac{1}{2}$. Vemos que $-\frac{1}{2} \in D_f$ pero ahí la función f no es derivable, de hecho ni siquiera está definida a la izquierda de $-\frac{1}{2}$. $\square$

(3) Bosqueje la gráfica de una función que cumpla las siguiente condiciones:

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3; & \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 5; & \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 4; \\
f(0) = 0; & \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1; & \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty. \\
\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty; & \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1; &
\end{array}$$

▼ Una posible gráfica de la función $f(x)$ con las condiciones enunciadas es:



□

(4) Sea la función $f(x) = 2\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$.

(a) Encontrar el dominio y raíces de la función

▼ Vemos que

$$f(x) = 2\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} = 2\frac{(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-2)} = 2\frac{x+1}{x+3} \text{ si } x - 2 \neq 0, \text{ esto es si } x \neq 2.$$

Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{\,-3, 2\,\}$.

Raíces: $x = -1$. □

(b) Clasificar sus discontinuidades

▼ $x = -2$ es un discontinuidad removible, ya que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 2\frac{x+1}{x+3} = 2\frac{3}{5} = \frac{6}{5};$$

$x = -3$ es una discontinuidad esencial infinita. □

(c) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales

▼ $x = -3$ es una asíntota vertical. Vamos a calcular los límites laterales:

$$x \to -3^-. \text{ En este caso } x < -3 \Rightarrow x + 3 < 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^-.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{2(x+1)}{x+3} = \text{``}\left(\frac{-4}{0^-}\right)\text{''} = +\infty;$$

$$x \to -3^+. \text{ En este caso } x > -3 \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^+.$$

Entonces:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{2(x+1)}{x+3} = \text{``}\left(\frac{-4}{0^+}\right)\text{''} = -\infty;$$

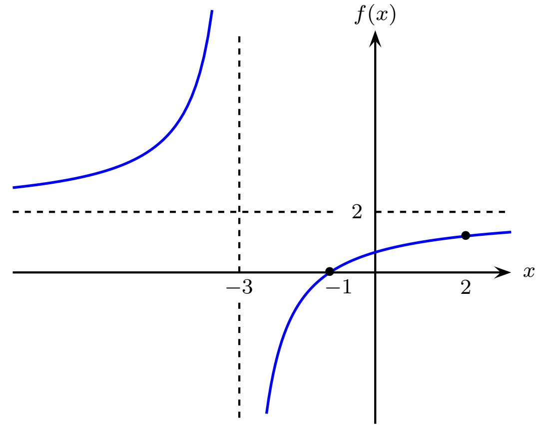
puesto que

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2(x+1)}{x+3} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{1 + \dfrac{3}{x}} = 2,$$

tenemos que $y = 2$ es la única asíntota horizontal. □

(d) Bosquejar la gráfica de la función

▼ La gráfica de $f(x)$ es:



□

(C) Tercer parcial

(1) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y^3 - y = x^2y + x$, en el punto $(0, 1)$.

▼ Vamos a derivar suponiendo que tenemos una función $y(x)$.

$$3y^2y' - y' = 2xy + x^2y' + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'(3y^2 - 1 - x^2) = 2xy + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \frac{2xy + 1}{3y^2 - 1 - x^2}.$$

Calculamos la pendiente de la recta tangente, valuando esta derivada

$$y'(0, 1) = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}.$$

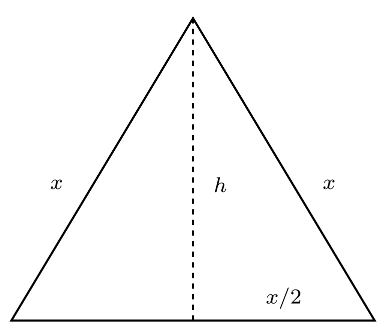
La ecuación de la recta tangente solicitada es

$$\frac{y - 1}{x - 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1.$$

□

(2) ¿Con qué razón aumenta el área de un triángulo equilátero cuando su base mide 10 cm y está aumentando a razón de 0.5 cm/s? (El área del triángulo equilátero se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.)

▼ Usamos la figura



De la figura vemos que:

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2} \times x \times h = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Ya que el lado es una función del tiempo, tenemos que

$$A(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}x(t)^2.$$

Derivando con respecto a la variable independiente t:

$$A'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 \times x(t) \times x'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(t)x'(t).$$

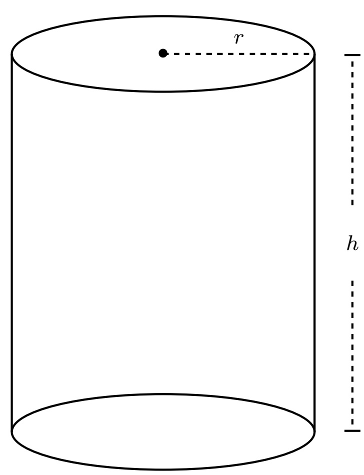
Usando los datos del enunciado se sabe que en un momento, digamos t_0, se tiene que $x(t_0) = 10$ cm y que $x'(t_0) = \dfrac{5}{10}$ cm/s. La variación del área en ese instante es:

$$A'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \times \frac{5}{10} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4.330127019 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

□

(3) Se construye un recipiente cilíndrico, sin tapa, con un volumen de 1 m^3. La parte cilíndrica del recipiente se fabrica con aluminio y la base con cobre. El cobre es cinco veces más caro que el aluminio. ¿Qué dimensiones minimizarían el costo total del recipiente?

▼ Usando esta figura



y considerando que el volumen del cilindro es de 1 m^3, es decir, que

$$V = \pi r^2 h = 1,$$

el área del recipiente sin tapa es

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h.$$

El costo de este cilindro con los datos proporcionados es

$$C = 5\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Nos piden minimizar este costo con la condición dada sobre el volumen. Vamos a despejar la variable h de la condicion del volumen y vamos a sustituir en el costo. Obtenemos así:

$$h = \frac{1}{\pi r^2} \Rightarrow C(r) = 5\pi r^2 + \frac{2}{r}\,.$$

De esta última función, que ahora depende sólo de r, es de la que vamos a calcular su mínimo. Derivamos

$$C' = 10\pi r - \frac{2}{r^2}\,.$$

Calculamos la segunda derivada

$$C'' = 10\pi + \frac{4}{r^3} > 0.$$

Segunda derivada siempre positiva. El valor crítico que encontraremos será un mínimo. Para encontrar los valores críticos, igualamos a cero la derivada

$$10\pi r - \frac{2}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{10\pi r^3 - 2}{r^2} = 0 \Rightarrow 10\pi r^3 - 2 = 0 \Rightarrow r = \left(\frac{1}{5\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Vamos a encontrar el valor de h que hace mínimo el costo

$$h = \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{5\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 5\frac{\frac{1}{5\pi}}{\left(\frac{1}{5\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 5\left(\frac{1}{5\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 5r.$$

□

(4) Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{9x^2 - 1}$,

(a) encontrar el dominio, raíces y paridad

▼ Dominio:

$$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 9x^2 - 1 \neq 0 \,\right\} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}.$$

Raíces: $x = 0$.
Paridad:
La función es par, puesto que

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{9(-x)^2 - 1} = \frac{2x^2}{9x^2 - 1} = f(x).$$

□

(b) Encontrar los intervalos en los cuales f es creciente o bien decreciente

▼ Derivamos $f(x)$:

$$f'(x) = 2\frac{(9x^2 - 1)2x - x^2 \times 18x}{(9x^2 - 1)^2} = 2\frac{18x^3 - 2x - 18x^3}{(9x^2 - 1)^2} =$$
$$= -4\frac{x}{(9x^2 - 1)^2}\,;$$

El signo de la primera derivada lo proporciona $-x$, de aquí hallamos que:

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty, 0)\,,\ f(x) \text{ es creciente en } \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \text{ y en } \left(-\frac{1}{3}, 0\right);$$

$$f'(x) < 0 \text{ si } x \in (0, \infty)\,,\ f(x) \text{ es decreciente en } \left(0, \frac{1}{3}\right) \text{ y en } \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

□

(c) Halle los valores máximos y mínimos locales de f

▼ El único punto crítico en el dominio de f es $x = 0$. Por lo anterior se comprueba que es un máximo local puesto que la función pasa de ser creciente a ser decreciente es este punto.

□

(d) Encuentre los intervalos de concavidad hacia arriba o bien hacia abajo; y puntos de inflexión

▼ Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = -4\frac{(9x^2-1)^2 - x \times 2(9x^2-1)18x}{(9x^2-1)^4} = -4\frac{(9x^2-1) - 36x^2}{(9x^2-1)^3} =$$

$$= -4\frac{-27x^2-1}{(9x^2-1)^3} = 4\frac{27x^2+1}{(9x^2-1)^3}\,.$$

El signo de la segunda derivada la proporciona $g(x) = 9x^2 - 1$. Ésta es una cuadrática cuyas raíces son $x = -\dfrac{1}{3}$ & $x = \dfrac{1}{3}$, las cuales dividen la recta en tres intervalos $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ & $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$. Siendo una función continua, la función tiene el mismo signo dentro de estos intervalos. Elegimos puntos arbitrarios dentro de los mismos:

$$g(-1) = 8 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ en } \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right);$$

$$g(0) = -1 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ en } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);$$

$$g(1) = 8 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ en } \left(\frac{1}{3}, \infty,\right).$$

Concluimos entonces que:

La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba si $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{3}, \infty,\right)$.

La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo si $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

□

(e) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales

▼ $x = \pm\dfrac{1}{3}$ son las dos asíntotas verticales de $f(x)$.

Para calcular la asíntota horizontal obtenemos:

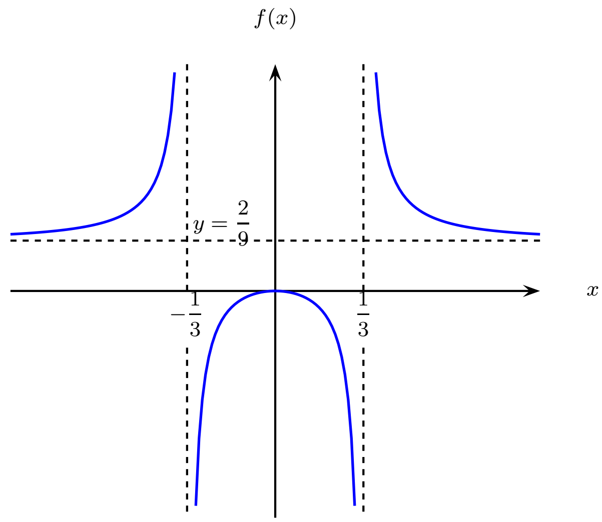
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2\frac{x^2}{9x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} 2\frac{1}{9 - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{2}{9}\,.$$

Así $y = \dfrac{2}{9}$ es la única asíntota horizontal de $f(x)$.

□

(f) Bosquejar la gráfica de la función.

▼ La gráfica de $f(x)$ es:



□