CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E0400

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{2x+3}{x+8} < 5$.

(2) $|\,4x+8\,| \leq 3x$.

(3) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -3 \\ |\,x^2+x-2\,| & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ 1-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Trace su gráfica
(b) Determine su dominio, rango y raíces

(4) Sean

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } -10 < x \leq 6; \\ x & \text{si } x > 6; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Obtenga el dominio y la fórmula de la función $f+g$.

(5) Un alambre de 100 cm de longitud se corta en dos partes. Una de ellas se dobla para formar un cuadrado y con la otra forma un triángulo equilátero. Obtener el área de ambas figuras como función del lado del cuadrado.

(B) Segundo parcial

(1) Para la función

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$$

determine:
(a) Los puntos de discontinuidad y su clasificación
(b) Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales
(c) Un esbozo de la gráfica

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}$.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(4) Trace la gráfica de una función f que tenga una discontinuidad removible en $x = -2$ y que además satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{llll} f(0) = 3; & f(4) = 0; & f(6) = 0; & \\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2; & \lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty; & \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0; & \lim_{x\to\infty} f(x) = 2. \end{array}$$

(5) Calcule los valores a & b de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1; \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \le x < 2; \\ 3x & \text{si } x \ge 2\,, \end{cases}$$

sea continua en todos los reales.

(C) Tercer parcial

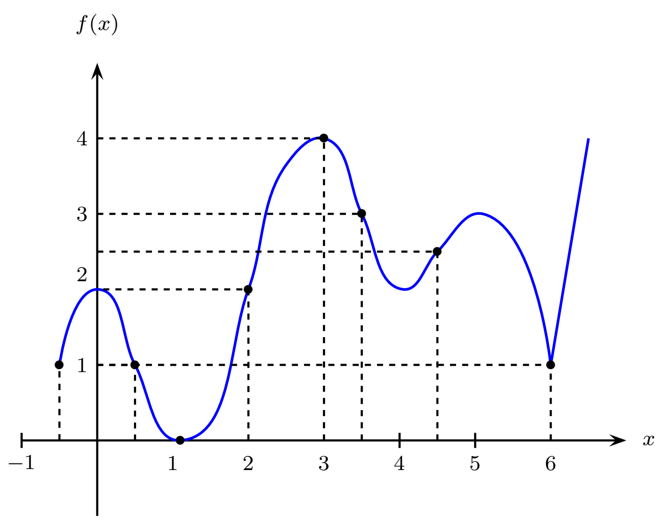
(1) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2y - y^3 = 8$, en el punto $(-3, 1)$.

(2) Para la función $f(x) = (x^2 - 4)^3$

determine:

(a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. Los extremos relativos
(b) Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo. Los puntos de inflexión
(c) La gráfica

(3) A partir de la gráfica dada de f, cuyo dominio es $[-0.5, \infty)$



Determine:

(a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento
(b) Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo
(c) Los máximos y mínimos relativos, los máximos y mínimos absolutos y los puntos de inflexión

(4) Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. (Por consiguiente, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo.) Si el perímetro de la ventana es de 30 cm solamente, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{2x+3}{x+8} < 5.$

▼ Es equivalente a:

$$\frac{2x+3}{x+8} - 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-5x-40}{x+8} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-37}{x+8} < 0\,.$$

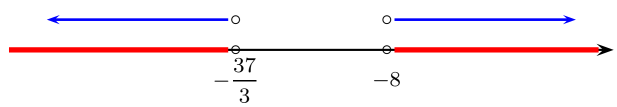
Lo cual se cumple si

$$\begin{array}{ccc}
-3x-37>0 \;\&\; x+8<0 & \text{o bien} & -3x-37<0 \;\&\; x+8>0;\\
3x<-37 \;\&\; x<-8 & \text{o bien} & 3x>-37 \;\&\; x>-8;\\
x<-\dfrac{37}{3} \;\&\; x<-8 & \text{o bien} & x>-\dfrac{37}{3} \;\&\; x>-8;\\
x<-\dfrac{37}{3} & \text{o bien} & x>-8\,;\\
x\in\left(-\infty,-\dfrac{37}{3}\right) & \text{o bien} & x\in(-8,+\infty)\,.
\end{array}$$

Luego, el conjunto solución de la desigualdad propuesta es

$$CS = \left(-\infty, -\frac{37}{3}\right) \bigcup (-8, +\infty)\ .$$

Como vemos en la siguiente figura:



□

(2) $|\,4x+8\,| \le 3x.$

▼ Esta desigualdad equivale al sistema de desigualdades

$$-3x \le 4x + 8 \le 3x\,.$$

Resolvemos la primera desigualdad:

$$-3x \le 4x+8 \Leftrightarrow -7x \le 8 \Leftrightarrow x \ge -\frac{8}{7} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{8}{7}, +\infty\right)\ .$$

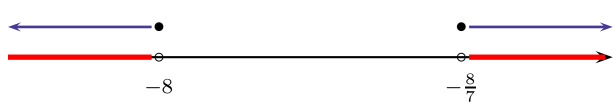
Resolvemos la segunda:

$$4x+8 \le 3x \Leftrightarrow x \le -8 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -8]\ .$$

Por lo que el conjunto solución es

El conjunto solución es: $\emptyset$

Como vemos en la figura:



□

(3) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -3; \\ |\, x^2 + x - 2 \,| & \text{si } -3 \le x \le 1; \\ 1 - x & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

(a) trace su gráfica

▼ Para $x < -3$, la gráfica es una parte de la recta paralela al eje de las x de "altura" 4.
Y para $x > 1$, es parte de la recta de pendiente -1 y ordenada en el origen 1, que "casi" llega al punto $(1, 0)$.
La parábola

$$y = x^2 + x - 2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

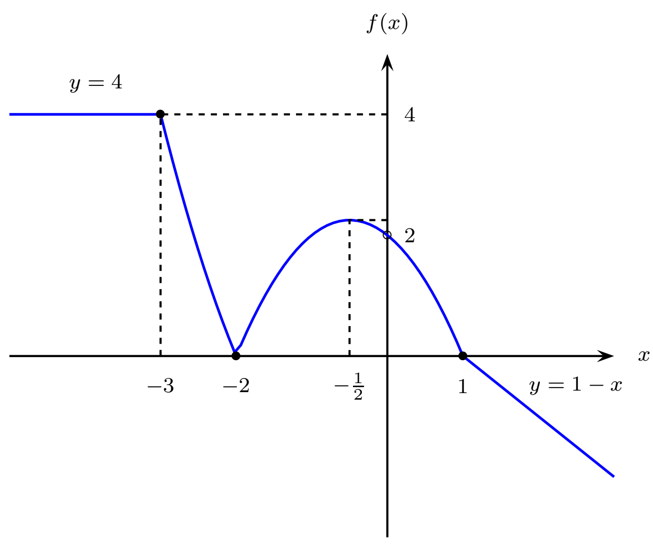
tiene su vértice en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, dirige su concavidad hacia arriba y corta al eje de las x cuando

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2; \end{cases}$$

por eso, $x^2 + x - 2 > 0$ si x es menor que -2 o bien mayor que 1.
Entonces, del intervalo $[-3, 1]$ es positiva en $[-3, -2)$ y es negativa en $(-2, 1]$.
Siendo así

$$f(x) = \left|\, x^2 + x - 2 \,\right| = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \in [-3, -2]\,; \\ -(x^2 + x - 2) & \text{si } x \in (-2, 1]\,. \end{cases}$$

Por lo anterior, su gráfica es un segmento de la parábola $y = x^2 + x - 2$ "sobre" $[-3, -2]$ y el reflejo de la parábola con respecto al eje x en el intervalo $(-2, 1]$. Ya por último, la gráfica de $f(x)$ es:



□

(b) Determine su dominio, rango y raíces

▼ Dominio: $D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}\,.$
Rango: $R_f = (-\infty, 4]$.
Y raíces: $x = -2$ & $x = 1$.

□

(4) Sean

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } -10 < x \le 6; \\ x & \text{si } x > 6; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \le 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Obtenga el dominio y la fórmula de la función $f + g$.

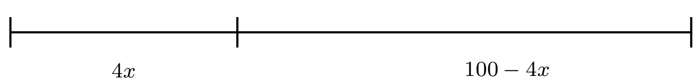
▼ Dominio de $f(x)$: $D_f = (-10, +\infty)$.
Dominio de $g(x)$: $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = D_f = (-10, +\infty)$ pues $(-10, +\infty) \subset \mathbb{R}$.
Su fórmula:

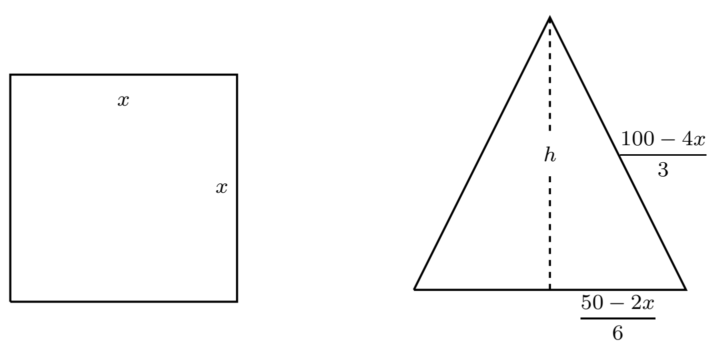
$$(f+g)(x) \begin{cases} x^3 + 1 - 2x & \text{si } x \in (-10, 0]\,; \\ x^3 + x^2 & \text{si } x \in (0, 6]\,; \\ x + x^2 & \text{si } x \in (6, +\infty)\,. \end{cases}$$

□

(5) Un alambre de 100 cm de longitud se corta en dos partes. Una de ellas se dobla para formar un cuadrado y con la otra forma un triángulo equilátero. Obtener el área de ambas figuras como función del lado del cuadrado.

▼ Usamos las siguientes gráficas:





Llamemos x al lado del cuadrado (por lo que su área es obviamente $A_{\square} = x^2$); luego, una parte del alambre mide $4x$; la otra, la parte con la que vamos a formar un triángulo equilátero, mide $100 - 4x$. Cada lado de dicho triángulo medirá por lo tanto $\dfrac{100 - 4x}{3}$. Su altura entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{\frac{(100 - 4x)^2}{9} - \frac{(50 - 2x)^2}{9}} = \frac{\sqrt{10\,000 - 800x + 16x^2 - 2\,500 + 200x - 4x^2}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{12x^2 - 600x + 7\,500}}{3} = \frac{\sqrt{12(x^2 - 50x + 625)}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 \times 3(x - 25)^2}}{3} = \frac{2\sqrt{3}\,|\,x - 25\,|}{3} = \frac{2\,|\,x - 25\,|}{\sqrt{3}}\,.$$

Y su área:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2}\,\frac{100-4x}{3}\,\frac{2\,|\,x-25\,|}{\sqrt{3}} = \frac{(100-4x)(25-x)}{3\sqrt{3}}\,.$$

Observe que $\sqrt{(x-25)^2} = |\,x-25\,| = 25-x$, pues $x \leq 25$.

□

(B) Segundo parcial

(1) Para la función

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$$

determine:

(a) Los puntos de discontinuidad y su clasificación

▼ Como es una función racional, los puntos de discontinuidad son las raíces del denominador

$$x^2-2x = x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\&\; x = 2\,.$$

Como

$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \;\&\; x = -1,$$

$x = 2$ es un punto de discontinuidad removible; lo vemos en:

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)x} = \frac{x+1}{x} \text{ si } x \neq 2$$

y en:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{3}{2}\,.$$

Por lo que definiendo $f(2) = \dfrac{3}{2}$, $f(x)$ resultaría continua en $x = 2$.

En $x = 0$ hay una discontinuidad infinita pues, $\displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty\,.$

□

(b) Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales

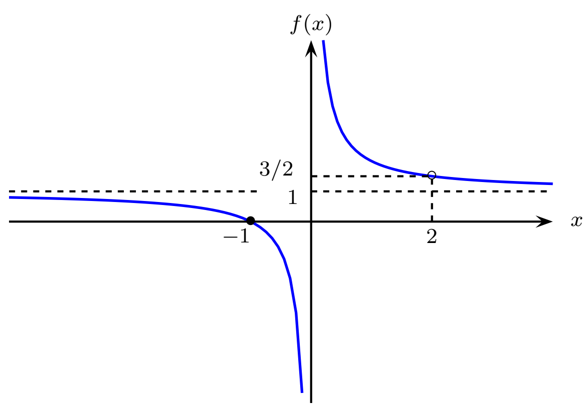
▼ Según lo que acabamos de calcular, $x = 0$ es una asíntota vertical; para hallar la asíntota horizontal calculamos

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+0 = 1$; $y = 1$ es la asíntota horizontal.

□

(c) Un esbozo de la gráfica

▼ Vemos que $x = -1$ es la única raíz de $f(x)$, esto es que $f(-1) = 0$. Entonces, la gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

▼ Racionalizando el numerador

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\ \text{si } x-3\neq 0,\ \text{esto es } x\neq 3.$$

Por lo que

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}\,.$$

□

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}$.

▼ Dividiendo numerador y denominador entre $\sqrt{x^2}=|\,x\,|$, si $x<0$, se tiene $|\,x\,|=-x$.

$$\frac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}=\frac{-8-\dfrac{6}{x}}{\sqrt{5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{x^2}}}\,.$$

Y entonces:

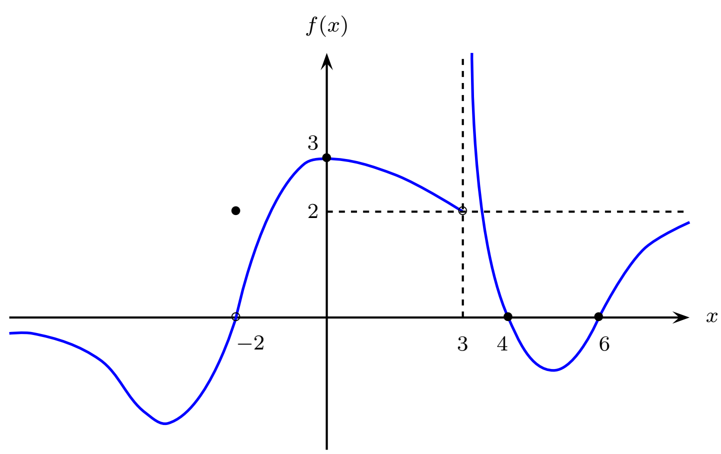
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-8-\dfrac{6}{x}}{\sqrt{5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{x^2}}}=\frac{-8}{\sqrt{5}}=-\frac{8}{\sqrt{5}}\,.$$

□

(4) Trace la gráfica de una función f que tenga una discontinuidad removible en $x=-2$ y que además satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{cccc} f(0)=3; & f(4)=0; & f(6)=0; & \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^-}f(x)=2; & \displaystyle\lim_{x\to 3^+}f(x)=\infty; & \displaystyle\lim_{x\to -\infty}f(x)=0; & \displaystyle\lim_{x\to \infty}f(x)=2. \end{array}$$

▼ Una posible gráfica de la función $f(x)$ que satisfaga todas esas condiciones es:



En nuestra gráfica vemos que $f(-2) = 2$, pero $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$.

$\square$

(5) Calcule los valores a & b de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1; \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \le x < 2; \\ 3x & \text{si } x \ge 2\,, \end{cases}$$

sea continua en todos los reales.

▼ Claramente la función es continua en $(-\infty, 1)\,, [1, 2)$ y en $[2, +\infty)$, por lo que necesitamos comprobar que sea continua en $x = 1$ y en $x = 2$. Para ello se tiene que cumplir que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = a + b, \text{ que es } f(1)$$

y que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 6, \text{ que es } f(2)\,.$$

De aquí tenemos que

$$2 = a + b\,, \text{ de la primera condición,}$$

y que

$$4a + b = 6\,, \text{ de la segunda condición.}$$

Esto es, tenemos que resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para hallar a & b.

$$\begin{cases} a + b = 2; \\ 4a + b = 6\,. \end{cases}$$

Restando la primera de la segunda tenemos que $3a = 4$; entonces, $a = \dfrac{4}{3}$ & $b = 2 - a$, de la primera ecuación, por lo que $b = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{6-4}{3} = \dfrac{2}{3}$.

$\square$

(C) Tercer parcial

(1) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2y - y^3 = 8$, en el punto $(-3, 1)$.

▼ Efectivamente, el punto $(-3, 1)$ pertenece a la curva, pues sus coordenadas $x = -3$ & $y = 1$ satisfacen la ecuación, ya que $(-3)^2 \times 1 - 1^3 = 9 \times 1 - 1 = 9 - 1 = 8$.
Para calcular la pendiente de la recta tangente, derivemos implícitamente la ecuación, donde estamos suponiendo que y es una función derivable de x. Tenemos

$$2xy + x^2y' - 3y^2y' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'(x^2 - 3y^2) = -2xy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2}\,.$$

Esto es, para cualquier punto de la curva donde $3y^2 - x^2 \neq 0$; en particular en el punto $(-3, 1)$, tenemos que la pendiente es

$$y'(-3, 1) = \frac{2(-3)1}{3(1)^2 - (-3)^2} = \frac{-6}{3 - 9} = \frac{-6}{-6} = 1$$

y que la ecuación de la tangente es

$$y - 1 = 1(x + 3) \Rightarrow y = x + 3 + 1 \Rightarrow y = x + 4\,.$$

$\square$

(2) (a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. Los extremos relativos

▼ Calculemos:

$$f'(x) = 3(x^2 - 4)^2 2x = 6x(x + 2)^2(x - 2)^2\,.$$

Los puntos críticos están en $x = -2, 0$ y en 2.
$f'(x) > 0$ si $x > 0 (x \neq 2)$, luego $f(x)$ es creciente en $[0, 2]$ y en $[2, +\infty)$ también en $[0, +\infty)$
$f'(x) < 0$ si $x < 0 (x \neq -2)$, luego $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2]$ y en $[-2, 0]$ también en $(-\infty, 0)$
Entonces el único extremo relativo es $(0, -64)$, donde la función pasa de ser decreciente a ser creciente luego es un mínimo.

$\square$

(b) Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo. Los puntos de inflexión

▼ Calculemos la derivada de $f'(x) = 6x(x^2 - 4)^2$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6(x^2 - 4)^2 + 6x \times 2(x^2 - 4) \times 2x = 6(x^2 - 4)(x^2 - 4 + 4x^2) = \\ &= 6(x^2 - 4)(5x^2 - 4) = 6(x + 2)(x - 2)(\sqrt{5}x + 2)(\sqrt{5}x - 2)\,. \end{aligned}$$

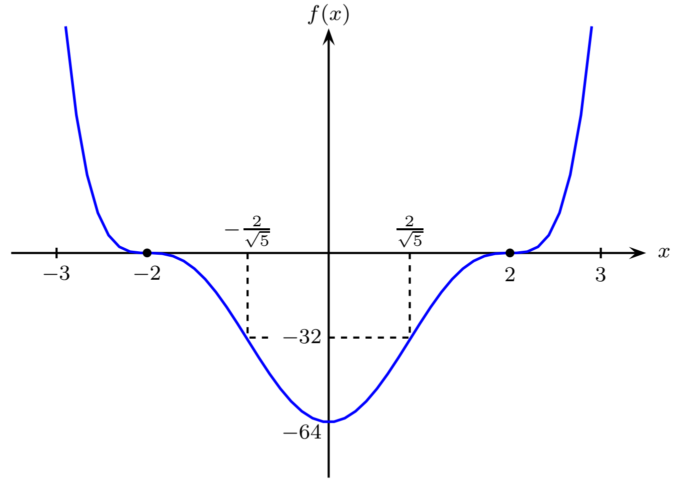
La segunda derivada se hace 0 en ± 2 y en $\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.89$, y su signo está dado en la tabla siguiente:

	Signo de					
Intervalo	$x + 2$	$\sqrt{5}x + 2$	$\sqrt{5}x - 2$	$x - 2$	$f''(x)$	$f(x)$ es cóncava hacia
$x < -2 \left(< -\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{5}} < 2\right)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	arriba
$-2 < x < -\frac{2}{\sqrt{5}} \left(< \frac{2}{\sqrt{5}} < 2\right)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	abajo
$\left(-2 < -\frac{2}{\sqrt{5}} <\right) \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 2$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	abajo
$\left(-2 < -\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{5}} <\right) 2 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	arriba

Vemos entonces que en $\left(-2, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 2\right)$ la función es cóncava hacia abajo y que en $(-\infty, -2)$ y $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $(2, +\infty)$ lo es hacia arriba y que los puntos $(\pm 2, 0)$ & $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-16^3}{125}\right) \approx (\pm 0.89, -32.77)$ son de inflexión.
Tenemos además que $f(0) = -64$ & $f(\pm 4) = 1\,728$. $\square$

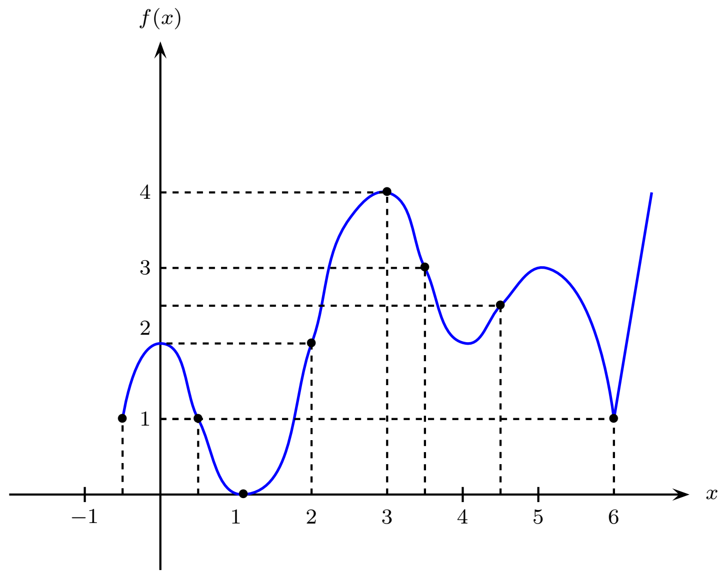
(c) La gráfica

▼ Tenemos la gráfica de la función $f(x)$:



Todo concuerda con que $f(x)$ es par. □

(3) A partir de la gráfica que vemos a continuación, cuyo dominio es $[-0.5, \infty)$,



determine:

(a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento

▼ La función $f(x)$ es creciente en $[-0.5, 0]\,, [1, 3]\,, [4, 5]$ y en $[6, +\infty)$;
la función $f(x)$ es decreciente en $[0, 1]\,, [3, 4]$ y en $[5, 6]$. □

(b) Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo

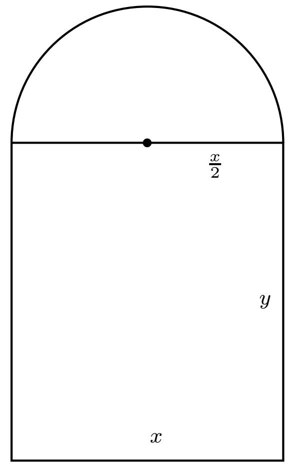
▼ La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $[0.5, 2]$ y en $[3.5, 4.5]$;
la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $[-0.5, 0.5]\,, [2, 3.5]\,, [4.5, 6]$ y en $[6, +\infty)$. □

(c) Los máximos y mínimos relativos, los máximos y mínimos absolutos y los puntos de inflexión

▼ Los máximos relativos son $(0, 2)\,, (3, 4)$ y $(5, 3)$.
Los mínimos relativos son $(-0.5, 1)$, $(1, 0)$, $(4, 2)$ y $(6, 1)$.
No tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto es $(1, 0)$.
Los puntos de inflexión son $(0.5, 1)\,, (2, 2)\,, (3.5, 3)$ & $(4.5, 2.5)$. □

(4) Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. (Por consiguiente, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo.) Si el perímetro de la ventana es de 30 cm solamente, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

▼ Usaremos el dibujo siguiente:



Queremos que el área de la ventana

$$A = xy + \frac{1}{2}\pi\frac{x^2}{4}$$

sea máxima.
Sabemos que el perímetro de la ventana es

$$P = x + 2y + \frac{\pi}{2}x = 30\,,$$

luego

$$y = \frac{30 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x}{2} = 15 - \frac{2+\pi}{4}x\,,$$

y el área queda, como función de la única variable x,

$$A(x) = \left(15 - \frac{2+\pi}{4}x\right)x + \frac{\pi}{8}x^2 = 15x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 =$$

$$= 15x - \frac{4+2\pi-\pi}{8}x^2 = 15x - \frac{\pi+4}{8}x^2\,,$$

cuyos puntos críticos los calculamos igualando a cero la derivada:

$$A'(x) = 15 - \frac{\pi+4}{4}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15\times 4}{\pi+4} = \frac{60}{\pi+4}\,.$$

Como $A''(x) = -\frac{\pi+4}{4} < 0$, se trata de un máximo y como

$$y = 15 - \frac{2+\pi}{4}\frac{60}{\pi+4} = 15 - \frac{15(\pi+2)}{\pi+4} = \frac{15\pi+60-15\pi-30}{\pi+4} = \frac{30}{\pi+4}\,,$$

entonces $y = \frac{x}{2}$.

□