CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E0500

(A) Primer parcial

(1) $\left| \dfrac{5x-1}{3x+2} \right| \geq 4.$

(2) Dadas las funciones

$$f(t) = \sqrt{t+3}, \quad g(z) = z^2 - 1 \quad \& \quad h(w) = \sqrt{5-w},$$

obtener: $\left(\dfrac{f+h}{g}\right)(x)$, $\quad (g \circ h)(x)$ & $\quad (f \circ g)(x)$, así como sus respectivos dominios.

(3) $3x^2 - 4x + 5 \leq 9x - 3x^2 + 10.$

(4) Realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < -2; \\ \dfrac{|\, x^2 - 1 \,|}{x} & \text{si } -2 \leq x < 2, \quad \& \ x \neq 0; \\ 1 & \text{si } x = 2; \\ 3x - 5 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

(B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right).$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{3x^2}{x^2 - 1} \right).$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x).$

(4) Para la curva $y = f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2 - 4}$, obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación; asíntotas verticales y horizontales.

(5) Determinar los valores de las constantes a, b & c que hacen continua en todo su dominio la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2; \\ ax^2 + b & \text{si } -2 \leq x < 1; \\ c & \text{si } x = 1; \\ 1 - x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

---

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(C) Tercer parcial

(1) Un fabricante produce latas de aluminio cilíndricas (con la forma de cilindros circulares rectos) para envasar 400 ml de cierta bebida refrescante (400 cm^3). Calcular las dimensiones de cada lata de manera que ésta requiera la mínima cantidad de aluminio en su fabricación. Suponemos que tanto r como h están dadas en centímetros.

(2) Para la curva $y = f(x) = \dfrac{-8x}{x^2+4}$,
obtener: intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos y su clasificación, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo, así como sus puntos de inflexión.

(3) Suponiendo que en la siguiente ecuación se tiene implícitamente definida a $y = \phi(x)$, calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $(2, \sqrt{2})$ de la curva

$$(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 = 36.$$

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\left|\dfrac{5x-1}{3x+2}\right| \geq 4.$

▼ La desigualdad equivale a dos desigualdades, (a) y (b):

(a) $\dfrac{5x-1}{3x+2} \geq 4.$

Ésta equivale a $\dfrac{5x-1}{3x+2} - 4 \geq 0.$

Y de aquí que

$$\frac{5x-1-12x-8}{3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-7x-9}{3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{7x+9}{3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7x+9}{3x+2} \leq 0,$$

desigualdad que se cumple cuando

$$\begin{array}{ccc} 7x+9 \geq 0 \ \& \ 3x+2<0 & \text{o bien} & 7x+9 \leq 0 \ \& \ 3x+2>0; \\ 7x \geq -9 \ \& \ 3x < -2 & \text{o bien} & 7x \leq -9 \ \& \ 3x > -2; \\ x \geq -\dfrac{9}{7} \ \& \ x < -\dfrac{2}{3} & \text{o bien} & x \leq -\dfrac{9}{7} \ \& \ x > -\dfrac{2}{3}; \\ x \in \left[-\dfrac{9}{7}, -\dfrac{2}{3}\right) & & x \in \emptyset\,. \end{array}$$

(b) $\dfrac{5x-1}{3x+2} \leq -4.$

Ésta equivale a $\dfrac{5x-1}{3x+2} + 4 \leq 0.$

Y de aquí que

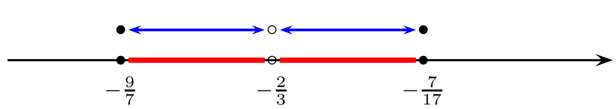
$$\frac{5x-1+12x+8}{3x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{17x+7}{3x+2} \leq 0,$$

a su vez, $\dfrac{17x+7}{3x+2} \leq 0$ equivale a que

$$\begin{array}{ccc} 17x+7 \geq 0 \ \& \ 3x+2<0 & \text{o bien} & 17x+7 \leq 0 \ \& \ 3x+2>0; \\ 17x \geq -7 \ \& \ 3x < -2 & \text{o bien} & 17x \leq -7 \ \& \ 3x > -2; \\ x \geq -\dfrac{7}{17} \ \& \ x < -\dfrac{2}{3} & \text{o bien} & x \leq -\dfrac{7}{17} \ \& \ x > -\dfrac{2}{3}; \\ x \in \emptyset & & x \in \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{7}{17}\right]. \end{array}$$

Luego el conjunto solución de la desigualdad propuesta es el siguiente:

$$CS = \left[-\frac{9}{7}, -\frac{2}{3}\right) \bigcup \left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{17}\right]$$



$\square$

(2) Dadas las funciones

$$f(t) = \sqrt{t+3}, \quad g(z) = z^2 - 1 \quad \& \quad h(w) = \sqrt{5-w},$$

obtener: $\left(\dfrac{f+h}{g}\right)(x)$, $\quad (g \circ h)(x)$ & $\quad (f \circ g)(x)$, así como sus respectivos dominios.

▼ Calculando $\left(\dfrac{f+h}{g}\right)(x)$, tenemos:

$$\left(\frac{f+h}{g}\right)(x) = \frac{(f+h)(x)}{g(x)} = \frac{f(x)+h(x)}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}}{x^2-1}\,.$$

Dominios:
$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x+3 \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq -3 \,\right\} = [-3, +\infty);$

$D_g = \mathbb{R}\,;$

$D_h = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 5-x \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq 5 \,\right\} = (-\infty, 5].$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
D_{\frac{f+h}{g}} &= \left\{ D_f \bigcap D_h \bigcap D_g \right\} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; g(x) = 0 \,\right\} = \\
&= [-3, +\infty) \bigcap (-\infty, 5] - \{\, \pm 1 \,\} = [-3, 5] - \{\, \pm 1 \,\}\,;\\
(g \circ h)(x) &= g[h(x)] = g(\sqrt{5-x}) = 5 - x - 1 = 4 - x\,;\\
D_{g\circ h} &= \left\{\, x \in D_h \;\middle|\; h(x) \in D_g \,\right\} = \left\{\, x \in (-\infty, 5] \;\middle|\; \sqrt{5-x} \in \mathbb{R} \,\right\} = (-\infty, 5]\ ;\\
(f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f(x^2-1) = \sqrt{x^2-1+3} = \sqrt{x^2+2}\,;\\
D_{f\circ g} &= \left\{\, x \in D_g \;\middle|\; g(x) \in D_f \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 1 \in [-3, +\infty) \,\right\} = \\
&= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 1 \geq -3 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 \geq -2 \,\right\} = \mathbb{R} \text{ pues } x^2 \geq 0 > -2\,.
\end{aligned}$$

$\square$

(3) $3x^2 - 4x + 5 \leq 9x - 3x^2 + 10.$

▼ Equivale a $6x^2 - 13x - 5 \leq 0.$
Como

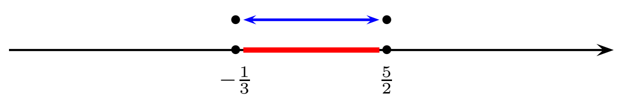
$$6x^2 - 13x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169+120}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{12} = \frac{13 \pm 17}{12} = \begin{cases} \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{1}{3}\,, \end{cases}$$

tenemos que $6x^2 - 13x - 5 = 6\left(x - \dfrac{5}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$ y su signo nos lo da la tabla siguiente:

	Signo de		
Intervalo	$x + \frac{1}{3}$	$x - \frac{5}{2}$	$6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$
$x < -\frac{1}{3}\ \left(< \frac{5}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$	$+$	$-$	$-$
$\left(-\frac{1}{3} <\right)\ \frac{5}{2} < x$	$+$	$+$	$+$

Luego, el conjunto solución de $6\left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{5}{2}\right) = 6x^2 - 13x - 5 \leq 0$ es

$$\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right]$$



□

(4) Realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < -2; \\ \dfrac{|\,x^2 - 1\,|}{x} & \text{si } -2 \leq x < 2, \quad \& \ x \neq 0; \\ 1 & \text{si } x = 2; \\ 3x - 5 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

▼ Tenemos que

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |\,x\,| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ o bien } x \leq -1\,.$$

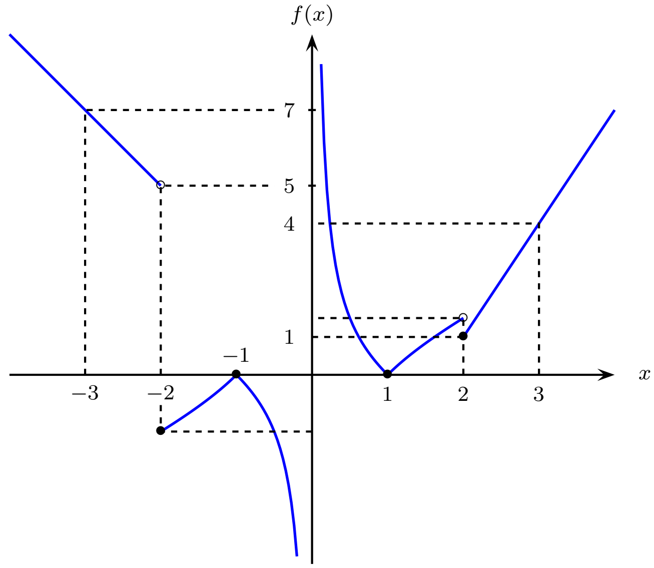
Luego, para el caso que nos ocupa

$$\left|\,x^2 - 1\,\right| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \in [-2, -1] \bigcup [1, 2)\,; \\ -(x^2 - 1) & \text{si } x \in (-1, 1)\,; \end{cases}$$

y también

$$\frac{|\,x^2 - 1\,|}{x} = \begin{cases} x - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [-2, -1] \bigcup [1, 2)\,; \\ -x + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in (-1, 1) - \{0\}\,. \end{cases}$$

En los demás intervalos no hay problema pues la gráfica es parte de una recta ya que f es lineal en ellos; luego, la gráfica de la función $f(x)$ se ve así:



ya que $f(-3) = 7$ & $f(-2^-) = 5$; $f(2^+) = 1$ & $f(3) = 4$.
La parte más delicada de graficar, por lo que hasta ahora hemos obtenido, es la correspondiente a los intervalos $[-2, 0)$ & $(0, 2)$.
Al respecto se puede mencionar que $x - \dfrac{1}{x}$ es creciente pues

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow 1 > \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 - \frac{1}{x_1} < x_2 - \frac{1}{x_2}\,.$$

Y lo mismo ocurre si

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 1 < \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 - \frac{1}{x_1} < x_2 - \frac{1}{x_2}\,.$$

En cambio $-x + \dfrac{1}{x}$ es decreciente pues $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_2 < -x_1$ por un lado, y por el otro $1 > \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow -x_2 + \dfrac{1}{x_2} < -x_1 + \dfrac{1}{x_1}$; sucede también que

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \ \& \ ,$$
$$1 < \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow -x_1 + \frac{1}{x_1} > -x_2 + \frac{1}{x_2}.$$

Como podemos comprobar, si $x < 0$ es muy pequeño, entonces $\dfrac{1}{x} < 0$ es muy grande en valor absoluto.
Lo mismo sucede con $-x + \dfrac{1}{x}$.
E, igualmente, si $x > 0$ es muy pequeño, $\dfrac{1}{x} > 0$ es muy grande y es positivo. Igual sucede con $-x + \dfrac{1}{x}$.
$\square$

(B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right)$.

▼ Efectuemos la operación, recordando que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} = \frac{x^2+2x+4-12}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2+2x-8}{x^3-8} =$$
$$= \frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\,.$$

Entonces,

$$\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} = \frac{x+4}{x^2+2x+4} \text{ si } x-2 \neq 0, \text{ esto es, si } x \neq 2\,,$$

y también

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\,.$$

□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3x^2}{x^2-1}\right)$.

▼ Tenemos que

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3x^2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2}{(x+1)(x-1)} = -\infty\,,$$

pues $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} 3x^2 = 3$; $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$ & $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0^- \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}[(x+1)(x-1)] = 0^-$.

□

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-2x+5} - x)$.

▼ Racionalizando:

$$\sqrt{x^2-2x+5} - x = \frac{x^2-2x+5-x^2}{\sqrt{x^2-2x+5}+x} = \frac{-2x+5}{\sqrt{x^2-2x+5}+x}\,.$$

Multiplicando numerador y denominador por $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{|\,x\,|} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$, si $x > 0$, tenemos que

$$\sqrt{x^2-2x+5} - x = \frac{-2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}, \text{ por lo que}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-2x+5} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1\,.$$

□

(4) Para la curva $y = f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2-4}$, obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación; asíntotas verticales y horizontales.

▼ Dominio: $D_y = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2-4 \neq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x+2)(x-2) \neq 0 \,\right\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

Raíz: $x = 0$, que es donde $-3x^2 = 0$.

Es par, pues $\dfrac{-3(-x)^2}{(-x^2)-4} = \dfrac{-3x^2}{x^2-4}$.

Como es una función racional, es continua en todo su dominio y discontinua en $x = \pm 2$, donde tiene discontinuidades infinitas pues

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{-3x^2}{(x+2)(x-2)} = \mp\infty \ \& \ \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{-3x^2}{(x+2)(x-2)} = \pm\infty\,.$$

Comprobamos por esto que $x = \pm 2$ son asíntotas verticales y como

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{-3}{1} = -3,$$

tenemos que $y = -3$ es asíntota horizontal.

□

(5) Determinar los valores de las constantes a, b & c que hacen continua en todo su dominio la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2; \\ ax^2+b & \text{si } -2 \le x < 1; \\ c & \text{si } x = 1; \\ 1-x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

▼ Claramente $f(x)$ es continua en $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$ & $(1,+\infty)$, pues la función es polinomial en tales intervalos, pero tenemos que hacerla continua en $x = -2$ & $x = 1$. Tenemos que

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -3 \ \& \ f(-2) = 4a+b = \lim_{x\to -2^+} f(x)\,.$$

Por lo cual, para que f sea continua en $x = -2$, se tiene que cumplir que $4a + b = -3$.
Así mismo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a+b\,, f(1) = c \ \& \ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0\,.$$

Por lo que $c = 0$ & $a + b = 0$; entonces, para que f sea continua en $\mathbb{R}$, se tienen que cumplir ambas ecuaciones

$$\begin{cases} 4a+b = -3; \\ a+b = 0\,. \end{cases}$$

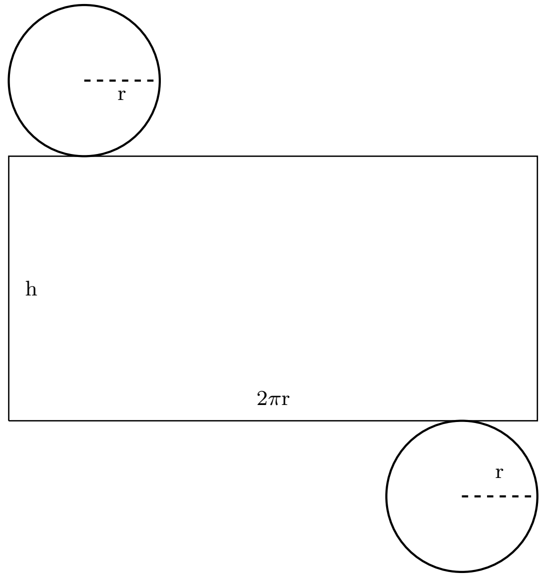
Para resolver este sistema restemos de la primera ecuación la segunda; tendremos, $3a = -3 \Rightarrow a = -1$; sustituyendo este valor en la segunda resulta que $b = 1$.

□

(C) Tercer parcial

(1) Un fabricante produce latas de aluminio cilíndricas (con la forma de cilindros circulares rectos) para envasar 400 ml de cierta bebida refrescante (400 cm^3). Calcular las dimensiones de cada lata de manera que ésta requiera la mínima cantidad de aluminio en su fabricación. Suponemos que tanto r como h están dadas en centímetros.

▼ Si dibujamos una lata:



La cantidad de aluminio que se requiere es

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h\,.$$

Donde r es el radio y h la altura de la lata; a su vez estas dos variables están relacionadas en el volumen de la lata

$$V = \pi r^2 h = 400\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Por lo que

$$h = \frac{400}{\pi r^2}\,.$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del área, tendremos expresada a ésta como función de una única variable r:

$$A_T(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{400}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 800 r^{-1}\,.$$

Ésta es la función que queremos minimizar. Su punto crítico se presenta cuando la derivada vale 0, esto es

$$A_T'(r) = 4\pi r - \frac{800}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{800}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{800}{4\pi} = \frac{200}{\pi} \Rightarrow r = \left(\frac{200}{\pi}\right)^{1/3}.$$

Como $A''(r) = 4\pi + 2\times 800 r^{-3} > 0$, entonces se trata de un mínimo; por último:

$$h = \frac{400}{\pi r^2} = \frac{400}{\pi\left(\frac{200}{\pi}\right)^{2/3}} = \frac{400}{\pi^{1/3}200^{2/3}} = \frac{2\times 200^{1/3}}{\pi^{1/3}} = 2\left(\frac{200}{\pi}\right)^{1/3} = 2r\,.$$

No es usual que en el mercado encontremos latas cilíndricas en que la altura sea el diámetro de la base.

□

(2) Para la curva $y = f(x) = \dfrac{-8x}{x^2+4}$,

obtener: intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos y su clasificación, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo, así como sus puntos de inflexión.

▼ Para estudiar la monotonía de la función calculemos su derivada:

$$f'(x) = \frac{-8(x^2+4) - 2x(-8x)}{(x^2+4)^2} = \frac{8x^2 - 32}{(x^2+4)^2}\,.$$

El signo de la derivada nos lo da el numerador, pues $(x^2+4)^2 > 0$.
Y como $8x^2 - 32 = 8(x^2-4) = 8(x+2)(x-2)$, usamos la tabla

	Signo de			
Intervalo	$x+2$	$x-2$	$f'(x)$	$f(x)$ es
$x < -2\,(< 2)$	$-$	$-$	$+$	creciente
$-2 < x < 2$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$x > 2\,(> -2)$	$+$	$+$	$+$	creciente

Sus puntos críticos son $x = \pm 2$, donde la derivada vale 0.
En $x = -2$ hay un máximo pues en ese punto la función pasa de ser creciente a ser decreciente; en $x = 2$ hay un mínimo pues ahí la función f pasa de ser decreciente a ser creciente.

Para hablar de concavidad obtengamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{16x(x^2+4)^2 - 2(8x^2-32)(x^2+4)2x}{(x^2+4)^4} = \frac{16x(x^2+4) - 4x(8x^2-32)}{(x^2+4)^3} =$$
$$= \frac{-16x^3 + 192x}{(x^2+4)^3}\,.$$

Y nuevamente el signo nos lo da el numerador

$$-16x^3 + 192x = -16x(x^2-12) = -16x(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12}) =$$
$$= -16x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})\,.$$

Para ver dónde $f'' < 0$ y dónde $f'' > 0$, recordemos que $f'' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2\sqrt{3}$ o bien que $x = 2\sqrt{3}$.
Luego construimos la siguiente tabla

	Signo de			
Intervalo	$x+2\sqrt{3}$	$-16x$	$x-2\sqrt{3}$	$f''(x)$
$x < -2\sqrt{3}\,(< 0 < 2\sqrt{3})$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-2\sqrt{3} < x < 0\,(< 2\sqrt{3})$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(-2\sqrt{3} <)\,0 < x < 2\sqrt{3}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(-2\sqrt{3} < 0 <)\,2\sqrt{3} < x$	$+$	$-$	$+$	$-$

De aquí se puede afirmar que:

$$f'' > 0 \text{ en los intervalos } \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \text{ y } \left(0, 2\sqrt{3}\right);$$
$$f'' < 0 \text{ en los intervalos } \left(-2\sqrt{3}, 0\right) \text{ y } \left(2\sqrt{3}, +\infty\right).$$

Por lo tanto,

$$f \text{ es cóncava hacia arriba en } \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \bigcup \left(0, 2\sqrt{3}\right);$$
$$f \text{ es cóncava hacia abajo en } \left(-2\sqrt{3}, 0\right) \bigcup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right).$$

□

(3) Suponiendo que en la siguiente ecuación se tiene implícitamente definida a $y = \phi(x)$, calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $(2, \sqrt{2})$ de la curva

$$(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 = 36.$$

▼ En efecto, el punto $(2, \sqrt{2})$ pertenece a la curva pues sus coordenadas $x = 2$ & $y = \sqrt{2}$ satisfacen la ecuación ya que

$$[2^2 + (\sqrt{2})^2 + 4]^2 - 16(2)^2 = (4 + 2 + 4)^2 - 16 \times 4 = 10^2 - 64 = 100 - 64 = 36\,.$$

Calculemos la pendiente de la recta tangente obteniendo implícitamente la derivada de la función

$$\begin{aligned} &2(x^2 + y^2 + 4)(2x + 2yy') - 32x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4(x^2 + y^2 + 4)(x + yy') = 32x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + yy' = \frac{32x}{4(x^2 + y^2 + 4)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{y}\left(\frac{8x}{x^2 + y^2 + 4} - x\right). \end{aligned}$$

En particular, en el punto $(2, \sqrt{2})$, la pendiente vale

$$y'(2, \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{16}{10} - 2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{4}{10}\right) = -\frac{2}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{5}\,;$$

la ecuación de la recta tangente es entonces:

$$\begin{aligned} &y - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{5}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{5}x + \frac{2}{5}\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{5}x + \frac{7}{5}\sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{5}(x - 7)\,. \end{aligned}$$

□