CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E0600

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{|\,2x^2 - x - 3\,|}{x-1} < 4.$

(2) $\dfrac{3-x}{4x+1} \geq 4.$

(3) Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} |\,3x+1\,| & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x < 3; \\ -3 & \text{si } x \geq 3\,, \end{cases}$$

obtener la gráfica de f, su dominio, su rango y sus raíces.

(4) Expresar como cociente de dos enteros el número

$$x = 20.\overline{58}$$

(5) Dados $f(x) = (x^2+3)^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+6)^2}}$

(a) Dar el dominio de f y de g
(b) Obtener $(f^2 + 4g)(x)$
(c) Expresar $(f \circ g)(x)$ y dar su dominio

(B) Segundo parcial

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x).$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{4}{x} - 3\right) x.$

(3) Dada $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$

(a) Determinar su dominio y sus raíces
(b) Clasifique sus puntos de discontinuidad
(c) Dé las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales
(d) Haga un bosquejo de la gráfica de f

(4) Bosqueje la gráfica de una función $f(x)$ que cumple con las siguientes condiciones:

(a) $f(x) = 1$ si $4 < x < 6$;
(b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$;
(c) $f(-2) = 0$;
(d) $f'(-4) = 0$;

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(e) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$;

(f) $\lim_{x\to 6} f(x) = 1$.

Señale los puntos de discontinuidad esencial.

(5) Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^3 + 14x^2 - 27x + 4}{3x - 4}$, encuentre el punto donde esa función no es continua. ¿Cómo definiría la función en ese punto, para que ésta sea continua en todos los reales?

(C) Tercer parcial

(1) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ en la ecuación $y^2(x^2 - 1)^2 + 3(2y^3 - 1)^2 = 0$.

(2) Dada $f(x) = x^4 - 2x^3$, determinar:

(a) Puntos críticos y clasificación

(b) Intervalos donde crece o bien decrece

(c) Puntos de inflexión

(d) Los intervalos de concavidad

(e) Gráfica de f

(3) Dado que $f(x) = \dfrac{h \circ g}{\sqrt{x^2 + 1}}$ y siendo que h & g son funciones reales de variable real, halle la derivada $f'(x)$.

(4) Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el de menor perímetro es el cuadrado.

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{|\,2x^2 - x - 3\,|}{x-1} < 4.$

▼ Sabemos que $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.
Busquemos primero puntos x del conjunto solución tales que $x > 1$, es decir, $x - 1 > 0$.
Entonces, la desigualdad propuesta es equivalente a

$$\left|\,2x^2 - x - 3\,\right| < 4(x-1) \Leftrightarrow -4x + 4 < 2x^2 - x - 3 < 4x - 4\,.$$

A su vez la primera desigualdad $-4x + 4 < 2x^2 - x - 3$ equivale a

$$2x^2 - x - 3 + 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 7 > 0\,.$$

Resolviendo $2x^2 + 3x - 7 = 0$, hallamos

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+56}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4}\,.$$

Y entonces

$$2x^2 + 3x - 7 = 2\left(x - \frac{-3+\sqrt{65}}{4}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{65}}{4}\right).$$

El signo de $2x^2 + 3x - 7$ nos lo da la tabla siguiente

	Signo de		
Intervalo	$x - \frac{-3-\sqrt{65}}{4}$	$x - \frac{-3+\sqrt{65}}{4}$	$2x^2 + 3x - 7$
$x < \frac{-3-\sqrt{65}}{4} \left(< \frac{-3+\sqrt{65}}{4}\right)$	$-$	$-$	$+$
$\frac{-3-\sqrt{65}}{4} < x < \frac{-3+\sqrt{65}}{4}$	$+$	$-$	$-$
$\left(\frac{-3-\sqrt{65}}{4} <\right) \frac{-3+\sqrt{65}}{4} < x$	$+$	$+$	$+$

En este caso, la desigualdad la cumplen las x tales que $x > \frac{-3+\sqrt{65}}{4}$, ya que $\frac{-3+\sqrt{65}}{4} > 1$, es decir, $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{65}}{4}, +\infty\right)$.
La segunda desigualdad $2x^2 - x - 3 < 4x - 4$ equivale a

$$2x^2 - x - 3 - 4x + 4 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 1 < 0.$$

Resolviendo $2x^2 - 5x + 1 = 0$, hallamos

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}\,,$$

y entonces

$$2x^2 - 5x + 1 = 2\left(x - \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right).$$

El signo de $2x^2 - 5x + 1$ nos lo da la tabla siguiente:

	Signo de		
Intervalo	$x - \frac{5-\sqrt{17}}{4}$	$x - \frac{5+\sqrt{17}}{4}$	$2x^2 - 5x + 1$
$x < \frac{5-\sqrt{17}}{4} \left(< \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$	$-$	$-$	$+$
$\frac{5-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{5+\sqrt{17}}{4}$	$+$	$-$	$-$
$\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4} <\right) \frac{5+\sqrt{17}}{4} < x$	$+$	$+$	$+$

Y en este otro caso aquellas x tales que $1 < x < \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$, esto es, $x \in \left(1, \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$ cumplen la desigualdad.
Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad propuesta para $x > 1$ es

$$\left(1, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right) \bigcap \left(\frac{-3+\sqrt{65}}{4}, +\infty\right) = \left(\frac{-3+\sqrt{65}}{4}, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right).$$

ya que $\dfrac{-3+\sqrt{65}}{4} \approx 1.2655644$ & $\dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \approx 2.2807764$.

Busquemos ahora puntos x tales que $x - 1 < 0$, es decir, $x < 1$.
La desigualdad propuesta, $\dfrac{|\,2x^2 - x - 3\,|}{x-1} < 4$, equivale ahora a $|\,2x^2 - x - 3\,| > 4x - 4$ que equivale a su vez a

$$2x^2 - x - 3 > 4x - 4 \text{ o bien } 2x^2 - x - 3 < -4x + 4\,.$$

Igualmente, $2x^2 - x - 3 > 4x - 4$ equivale a $2x^2 - x - 3 - 4x + 4 > 0$; esta desigualdad equivale a $2x^2 - 5x + 1 > 0$.
En la tabla anterior vimos que $2x^2 - 5x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}\right) \bigcup \left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$, pero, como buscamos $x < 1$, sólo nos quedamos con $\left(-\infty, \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$ ya que $\dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \approx 0.2192235 < 1$.
Ahora resolvamos $2x^2 - x - 3 < -4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4x - 3 - 4 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 7 < 0$ con la restricción que $x < 1$.
En la primera tabla vimos que tal desigualdad se cumple si

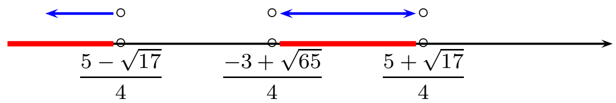
$$\frac{-3-\sqrt{65}}{4} < x < \frac{-3+\sqrt{65}}{4} \text{ donde } \frac{-3+\sqrt{65}}{4} > 1\,.$$

Luego entonces, otra parte del conjunto solución es

$$\frac{-3-\sqrt{65}}{4} < x < 1\,.$$

En resumen, el conjunto solución de la desigualdad original es

$$\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right) \bigcup \left(\frac{-3+\sqrt{65}}{4}, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$$



Como podemos comprobar, $x = 0$ & $x = 2$ satisfacen a la desigualdad propuesta pues:

$$\frac{|\,2\times 0^2 - 0 - 3\,|}{0-1} = \frac{|-3|}{-1} = -3 < 4 \ \& \ \frac{|\,2(2^2) - 2 - 3\,|}{2-1} = \frac{|\,8-5\,|}{1} = \frac{|\,3\,|}{1} = 3 < 4\,.$$

Pero en cambio $x = 3$ no la satisface, pues

$$\frac{|\,2(3)^2 - 3 - 3\,|}{3-1} = \frac{|\,18-6\,|}{2} = \frac{|\,12\,|}{2} = 6 \not< 4\,.$$

□

(2) $\dfrac{3-x}{4x+1} \ge 4$.

▼ Esta desigualdad equivale a

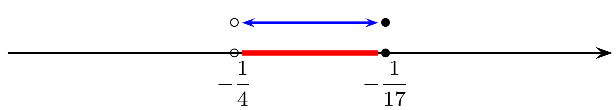
$$\frac{3-x}{4x+1} - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3-x-16x-4}{4x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-17x-1}{4x+1} \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{17x+1}{4x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{17x+1}{4x+1} \le 0;$$

esta última se cumple si

$$\begin{array}{ccc} 17x+1 \ge 0 \text{ y } 4x+1 < 0 & \text{o bien} & 17x+1 \le 0 \text{ y } 4x+1 > 0; \\ 17x \ge -1 \text{ y } 4x < -1 & \text{o bien} & 17x \le -1 \text{ y } 4x > -1; \\ x \ge -\dfrac{1}{17} \text{ y } x < -\dfrac{1}{4} & \text{o bien} & x \le -\dfrac{1}{17} \text{ y } x > -\dfrac{1}{4}; \\ x \in \emptyset & \text{o bien} & x \in \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{17}\right]. \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es precisamente

$$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{17}\right]$$



□

(3) Dada la siguiente función

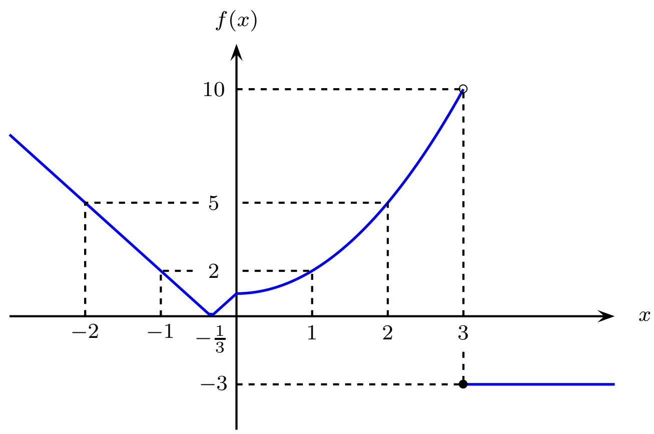
$$f(x) = \begin{cases} |\,3x+1\,| & \text{si } x \le 0; \\ x^2+1 & \text{si } 0 < x < 3; \\ -3 & \text{si } x \ge 3\,, \end{cases}$$

obtener la gráfica de f, su dominio, su rango y sus raíces.

▼ Notemos primero que $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{3}$; luego,

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 1 & \text{si } x < -\dfrac{1}{3}; \\ 3x + 1 & \text{si } -\dfrac{1}{3} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Siendo así, la gráfica de la función $f(x)$ es:



Para esta gráfica hemos tabulado los valores: $f(-2) = 5$; $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0$ & $f(0) = 1$.

Dominio: $D_f = \mathbb{R}\,, R_f = \{\,-3\,\} \bigcup [0, +\infty)$.

Y la única raíz es $x = -\dfrac{1}{3}$.

□

(4) Expresar como cociente de dos enteros el número $x = 20.\overline{58}$.

▼ Sea

$$x = 20.\overline{58} \Rightarrow 100x = 2\,058.\overline{58} \Rightarrow 100x - x = 2\,058.\overline{58} - 20.\overline{58} \Rightarrow 99x = 2\,038,$$

entonces, $x = \dfrac{2\,038}{99}$.

□

(5) Dadas $f(x) = (x^2 + 3)^2$ & $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x + 6)^2}}$,

(a) encontrar el dominio de f y de g

▼ Dominio de $f(x)$: $D_f = \mathbb{R}$.

Dominio de $g(x)$:

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 1 - (x + 6)^2 > 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x + 6)^2 < 1 \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\, x + 6\,| < 1 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -1 < x + 6 < 1 \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -7 < x < -5 \,\right\} = (-7, -5)\ . \end{aligned}$$

□

(b) Obtener $(f^2 + 4g)(x)$

▼ Calculamos

$$(f^2 + 4g)(x) = f^2(x) + 4g(x) = (x^2 + 3)^4 + \frac{4}{\sqrt{1 - (x + 6)^2}}\ .$$

□

(c) Expresar $(f \circ g)(x)$ y dar su dominio

▼ Vemos que

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{1}{\sqrt{1-(x+6)^2}}\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-(x+6)^2}}\right)^2 + 3\right]^2 = \left(\frac{1}{1-x^2-12x-36} + 3\right)^2 = \left(\frac{1-3x^2-36x-105}{-x^2-12x-35}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{-(3x^2+36x+104)}{-(x^2+12x+35)}\right]^2 = \left(\frac{3x^2+36x+104}{x^2+12x+35}\right)^2;$$

$$D_{f\circ g} = \left\{\, x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \,\right\} = \left\{ x \in (-7,-5) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{1-(x+6)^2}} \in \mathbb{R} \right\} = (-7,-5)\ .$$

□

(B) Segundo parcial

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$.

▼ Racionalizando el numerador, tendremos:

$$\frac{\sqrt{x^2+5x}-x}{1} = \frac{x^2+5x-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x} = \frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}\,.$$

Multipliquemos el numerador y el denominador por $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{-|\,x\,|} = \sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$ si $x<0$,
como es el caso, pues $x\to-\infty$, entonces:

$$\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x} = \frac{5}{-\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}+1};$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{1-\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}} = +\infty.$$

En resumen:
Como $x\to-\infty$, entonces:

$$-x\to+\infty,\ x^2\to+\infty \ \&\ \sqrt{x^2+5x}\to+\infty.$$

Por lo tanto,

$$(\sqrt{x^2+5x}-x) = [\sqrt{x^2+5x}+(-x)] \to +\infty.$$

□

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4}{x}-3\right)x$.

▼ Vemos que

$$\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{4}{x}-3\right)x\right] = \lim_{x\to0}(4-3x) = 4-(3\times0) = 4-0 = 4\,.$$

$\square$

(3) Sea la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$.

(a) Determine su dominio y sus raíces

▼ Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + x - 2 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x+2)(x-1) \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \{-2, 1\} .$$

Raíces:

$$2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1; \\ -\dfrac{3}{2} . \end{cases}$$

Luego entonces, la raíz es $x = -\dfrac{3}{2}$, pues en $x = 1$, la función no está definida.

$\square$

(b) Clasifique sus puntos de discontinuidad

▼ En $x = -2$ hay una discontinuidad infinita, pues

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x+3}{x+2} = \text{“}\left(\frac{-1}{0^-}\right)\text{”} = +\infty .$$

También

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{2x+3}{x+2} = \text{“}\left(\frac{-1}{0^+}\right)\text{”} = -\infty .$$

En cambio, en $x = 1$ la discontinuidad es removible pues definiendo $f(1)$ como

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{5}{3} ,$$

$f(x)$ resultaría continua en $x = 1$.

$\square$

(c) Dé las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales

▼ De lo visto en (b) se desprende que la recta $x = -2$ es la asíntota vertical y como

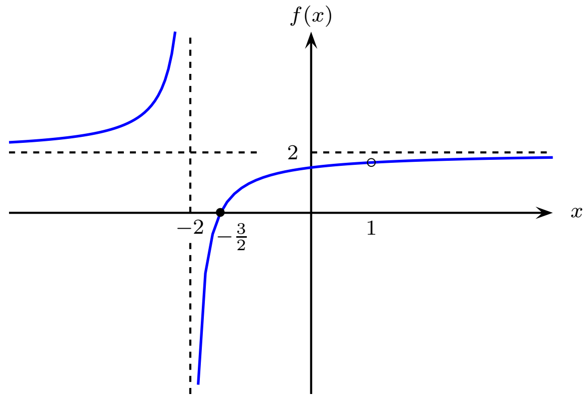
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+3}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{x}}{1 + \dfrac{2}{x}} = \frac{2+0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2,$$

comprobamos que $y = 2$ es la asíntota horizontal.

$\square$

(d) Haga un bosquejo de la gráfica de $f(x)$

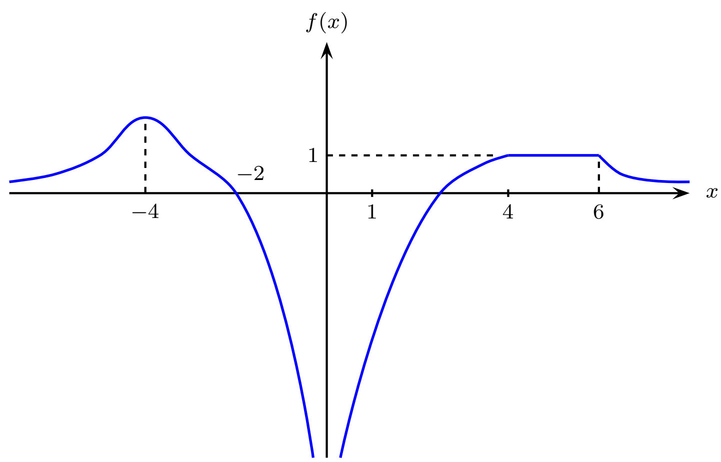
▼ Podemos tabular $f(0) = \dfrac{2 \times 0^2 + 0 - 3}{0^2 + 0 - 2} = \dfrac{2 \times 0 - 3}{0 - 2} = \dfrac{0 - 3}{0 - 2} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$. La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(4) Bosqueje la gráfica de una función $f(x)$ que cumple con las siguientes condiciones:
(a) $f(x) = 1$ si $4 < x < 6$;
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
(c) $f(-2) = 0$;
(d) $f'(-4) = 0$;
(e) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$;
(f) $\lim\limits_{x\to6} f(x) = 1$.
Señale los puntos de discontinuidad esencial.

▼ Un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ es:



En $x = 0$ hay una discontinuidad infinita (esencial).

□

(5) Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^3 + 14x^2 - 27x + 4}{3x - 4}$, encuentre el punto donde esa función no es continua. ¿Cómo definiría la función en ese punto, para que ésta sea continua en todos los reales?

▼ Como $f(x)$ es racional, es continua en todos los reales menos en las raíces del denominador, es decir, es continua en $\mathbb{R}$ con excepción de x cuando $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$.

Para hacer continua a $f(x)$ en $\dfrac{4}{3}$, este valor tiene que ser también raíz del numerador y por lo tanto el numerador tiene que ser divisible entre $3x - 4$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2+6x-1 \\
\cline{2-2}
3x-4 & \quad 3x^3+14x^2-27x+4 \\
 & \underline{-3x^3+4x^2} \\
 & \qquad 18x^2-27x+4 \\
 & \qquad \underline{-18x^2+24x} \\
 & \qquad\qquad -3x+4 \\
 & \qquad\qquad \underline{+3x-4} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0 \quad ,
\end{array}
$$

por lo que, en efecto, $3x^3+14x^2-27x+4=(3x-4)(x^2+6x-1)$ &

$$f(x)=\frac{(3x-4)(x^2+6x-1)}{3x-4}=x^2+6x-1 \text{ si } x\neq\frac{4}{3}\,.$$

Entonces, definiendo

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\lim_{x\to\frac{4}{3}}f(x)=\lim_{x\to\frac{4}{3}}(x^2+6x-1)=\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(6\times\frac{4}{3}\right)-1=\frac{16}{9}+8-1=\frac{16+63}{9}=\frac{79}{9},$$

$f(x)$ resultaría continua en $x=\dfrac{4}{3}$.

□

(C) Tercer parcial

(1) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ en la ecuación $y^2(x^2-1)^2+3(2y^3-1)^2=0$.

▼ Derivemos implícitamente con respecto a x:

$$2yy'(x^2-1)^2+2y^2(x^2-1)2x+6(2y^3-1)\times 6y^2y'=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[2y(x^2-1)^2+36y^2(2y^3-1)]y'=4xy^2(1-x^2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'=\frac{4xy^2(1-x^2)}{2y(x^2-1)^2+36y^2(2y^3-1)}=\frac{2xy(1-x^2)}{(x^2-1)^2+18y(2y^3-1)}\,.$$

Vemos que $(x^2-1)^2+18y(2y^3-1)$ tiene que ser $\neq 0$.

□

(2) Dada $f(x)=x^4-2x^3$, determine:

(a) Puntos críticos y clasificación

▼ Los puntos críticos serán las raíces de la derivada, esto es:

$$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)=0\Leftrightarrow x=0 \;\&\; x=\frac{3}{2}\,.$$

Veamos cómo es la segunda derivada en ellos:

$$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)\,,$$
$$f''(0)=0,$$

por lo que no podemos decidir si es máximo o mínimo relativo con el criterio de la segunda derivada; analicemos la primera derivada:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2};$$

$$f'(x) < 0 \text{ en } \left(-\infty, \frac{3}{2}\right).$$

Por lo que en $x = 0$ no hay valor extremo pues en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ la función $f(x)$ es decreciente.

En cambio

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 12 \times \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) > 0.$$

Por lo que en $x = \frac{3}{2}$ la función tiene un mínimo lo cual coincide con que $f(x)$ decrece en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

□

(b) Intervalos donde crece o bien decrece

▼ Acabamos de ver que $f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y es creciente en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

□

(c) Puntos de inflexión

▼ En $x = 0$ y en $x = 1$ hay puntos de inflexión, pues ahí la segunda derivada vale cero y cambia de signo como se puede ver en la tabla:

	Signo de			
Intervalo	x	$x - 1$	$f''(x) = 12x(x - 1)$	$f(x)$ es cóncava hacia
$x < 0\,(< 1)$	$-$	$-$	$+$	arriba
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$-$	abajo
$(0 <)\,1 < x$	$+$	$+$	$+$	arriba

□

(d) Los intervalos de concavidad

▼ Como acabamos de ver, la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$, y es cóncava hacia abajo en $(0, 1)$.

□

(e) Gráfica de $f(x)$

▼ Tabulamos

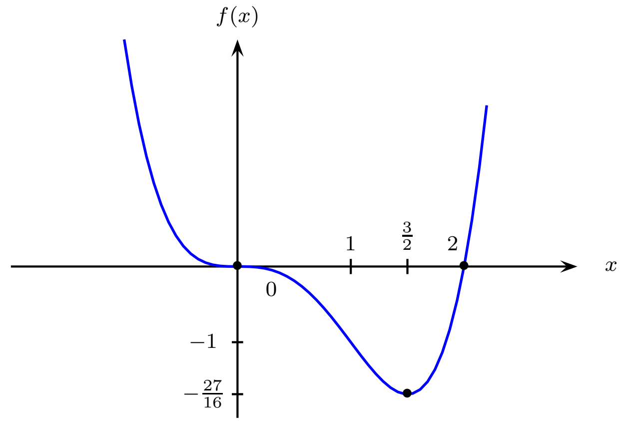
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2} - 2\right) = \frac{27}{8}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{16} \approx -1.6875;$$

$$f(0) = 0;$$

$$f(1) = 1^3(1 - 2) = 1(-1) = -1;$$

$$f(2) = 0.$$

La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

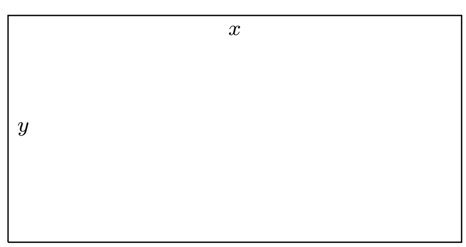
(3) Dado que $f(x) = \dfrac{h \circ g}{\sqrt{x^2+1}}$ y siendo que h & g son funciones reales de variable real, halle la derivada $f'(x)$.

▼ Supongamos que h & g son funciones derivables; entonces:

$$f'(x) = \frac{(h \circ g)'(x) \times \sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(h \circ g)(x)}{x^2+1} = \frac{h'[g(x)]g'(x)\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}(h \circ g)(x)}{x^2+1} = \frac{h'[g(x)]g'(x)(x^2+1) - x(h \circ g)(x)}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

□

(4) Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el de menor perímetro es el cuadrado. ▼ Dibujamos el rectángulo:



La función que queremos minimizar es $P = 2x + 2y$.

A su vez estas variables x, y están relacionadas, pues el área del rectángulo es $A_\square = xy$, por lo que, por ejemplo, $y = \dfrac{A_\square}{x}$; ahora, sustituyendo este valor en la fórmula del perímetro, lo tendremos expresado como función de una única variable x:

$$P(x) = 2x + 2\frac{A_\square}{x}.$$

Sus puntos críticos son cuando la derivada vale 0:

$$P'(x) = 2 - \frac{2A_{\square}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2A_{\square}}{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = A_{\square} \Leftrightarrow x = \sqrt{A_{\square}}.$$

Este resultado es efectivamente un mínimo, pues $P''(x) = \dfrac{4A_{\square}}{x^3} > 0$ y también

$$y = \frac{A_{\square}}{x} = \frac{A_{\square}}{\sqrt{A_{\square}}} = \sqrt{A_{\square}}.$$

Constatamos así que $x = y$, es decir, que el rectángulo buscado es realmente un cuadrado.

$\square$