CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E0700

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{3x-1}{6x+9} > 4\,.$

(2) $|\,3-2x\,| \leq x+5$

(3) Encuentre dominio y gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} |\,x\,|+1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2+1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3x-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(4) Encuentre $(f+g)(x)$ y D_{f+g} con las siguientes funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 2x & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(5) Encuentre la función de área de los rectángulos cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados y estén inscritos en un círculo unitario.

(B) Segundo parcial

(1) Dada $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{x^2+4x-5}$, obtener:
   (a) Puntos de discontinuidad y su clasificación
   (b) Asíntotas verticales y horizontales
   (c) Esbozo de la gráfica

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{3x^2+2x+5}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x-7}$

(4) Bosqueja la gráfica de una función que satisfaga las siguientes condiciones:
   (a) $f(1) = 3,\ f(5) = 0,\ f(7) = 0,$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3,\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1,\ \lim_{x\to \infty} f(x) = 2$
   (d) Tiene una discontinuidad removible en $x = -1$.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(5) Encuentre los valores de a y b para que la función f sea continua en todo su dominio, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < 2 \\ ax+b & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ x & \text{si } 5 < x \end{cases}$$

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{3x-1}{6x+9} > 4\,.$

▼ Consideremos dos casos, dependiendo de si $6x+9>0$ o bien $6x+9<0$

i) $6x+9>0 \Leftrightarrow 6x>-9 \Leftrightarrow x>-\dfrac{9}{6} \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{6x+9} > 4 &\Leftrightarrow 3x-1 > 4(6x+9) \Leftrightarrow 3x-1 > 24x+36 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 3x-24x > 36+1 \Leftrightarrow -21x > 37 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x < -\frac{37}{21} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{37}{21}\right)\end{aligned}$$

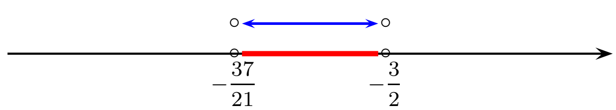
Como $\left(-\infty, -\dfrac{37}{21}\right) \bigcap \left(-\dfrac{3}{2}, +\infty\right) = \emptyset$ no hay ninguna $x > -\dfrac{3}{2}$ que sea solución de la desigualdad propuesta.

ii) $6x+9<0 \Leftrightarrow 6x<-9 \Leftrightarrow x<-\dfrac{9}{6} \Leftrightarrow x<-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{6x+9} > 4 &\Leftrightarrow 3x-1 < 4(6x+9) \Leftrightarrow 3x-1 < 24x+36 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 3x-24x < 36+1 \Leftrightarrow -21x < 37 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x > -\frac{37}{21} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{37}{21}, +\infty\right)\end{aligned}$$

y por último, el conjunto solución es

$$CS = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \bigcap \left(-\frac{37}{21}, +\infty\right) = \left(-\frac{37}{21}, -\frac{3}{2}\right)$$



Comprobamos por ejemplo que $x = -\dfrac{37}{21}$ no satisface a la desigualdad propuesta

$$\frac{3\left(-\frac{37}{21}\right)-1}{6\left(-\frac{37}{21}\right)+9} = \frac{\frac{-37}{7}-1}{\frac{-37\times 2}{7}+9} = \frac{\frac{-37-7}{7}}{\frac{-74+63}{7}} = \frac{-44}{-11} = 4 \not> 4$$

$\square$

(2) $|\,3-2x\,| \le x+5$

▼ Esta desigualdad equivale al sistema de dos desigualdades

$$-(x+5) \le 3-2x \le x+5 \Leftrightarrow -x-5 \le 3-2x \le x+5$$

La primera equivale a

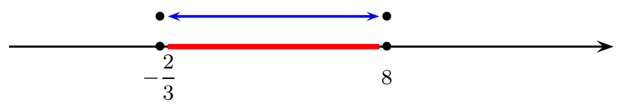
$$2x - x \le 3+5 \Leftrightarrow x \le 8 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 8]$$

y la segunda a

$$-x - 2x \leq 5 - 3 \Leftrightarrow -3x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

Luego el conjunto solución es

$$CS = \left[-\frac{2}{3}, 8\right]$$



Verifiquemos, por ejemplo que $x = -\frac{2}{3}$ y $x = 8$ sí satisfacen a la desigualdad

$$\left| 3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right) \right| = \left| 3 + \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{9+4}{3} \right| = \frac{13}{3} \leq -\frac{2}{3} + 5 = \frac{-2+15}{3} = \frac{13}{3}$$
$$|\, 3 - 2(8) \,| = |\, 3 - 16 \,| = |\, -13 \,| = 13 \leq 8 + 5 = 13$$

$\square$

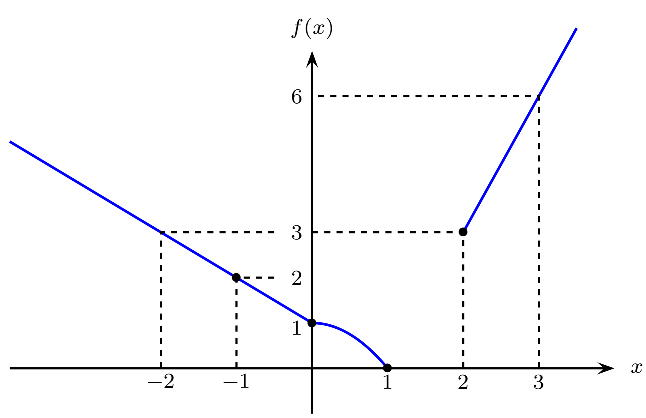
(3) Encuentre dominio y gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} |\, x \,| + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

▼ Dominio: $D_f = (-\infty, 1] \bigcup [2, +\infty)$

Tabulamos

$f(-2) = 3, f(-1) = 2, f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 3$ y $f(3) = 6$
La gráfica de la función $f(x)$ es:



$\square$

(4) Encuentre $(f + g)(x)$ y D_{f+g} con las siguientes funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 2x & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \le 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

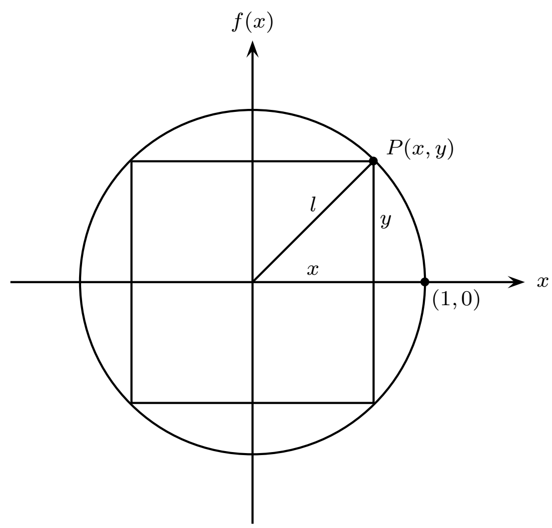
▼ Los dominios son: $D_f = [-5, +\infty)$ y $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = D_f$ pues $D_f \subseteq D_g$.
Ahora:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 3 - x & \text{si } -5 \le x \le 0 \\ x^2 + x^3 & \text{si } 0 < x \le 5 \\ 2x + x^3 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

□

(5) Encuentre la función de área de los rectángulos cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados y estén inscritos en un círculo unitario.

▼ Usamos la figura:



$f(A) = (2x)(2y) = 4xy$
Pero, $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$
Sustituyendo: $f(A) = f(x) = 4x\sqrt{1 - x^2}$

□

(B) Segundo parcial

(1) Dada $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x^2 + 4x - 5}$, obtener:

(a) Puntos de discontinuidad y su clasificación

▼ Como

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \text{ o bien } x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ o bien } x = 1$$

Resulta que el dominio es: $D_f = \mathbb{R} - \{-5, 1\}$, en donde f es continua.

Calculemos $\lim_{x \to -5} f(x)$ y $\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x)$ habida cuenta que, en su dominio

$$f(x) = \frac{x(x+5)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x}{x-1}$$

Por lo que

$$\lim_{x \to -5} f(x) = \lim_{x \to -5} \frac{x}{x-1} = \frac{-5}{-5-1} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$$

y la discontinuidad en $x = -5$ es removible.
En cambio

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x}{x-1} = \pm\infty$$

y la discontinuidad en $x = 1$ es esencial, de hecho es infinita.

□

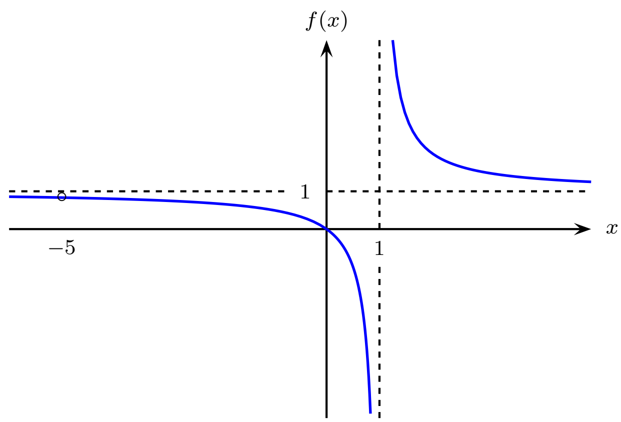
(b) Asíntotas verticales y horizontales.
▼ Acabamos de encontrar que la recta $x = 1$ es asíntota vertical. Para hallar las horizontales calculemos

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

Por lo que la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

□

(c) Esbozo de la gráfica.
▼ Tabulamos $f(0) = 0$
La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(2) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{3x^2 + 2x + 5}}$

▼ Tenemos que:

$$\sqrt{3x^2 + 2x + 5} = \sqrt{x^2 \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} = |\,x\,| \sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

Y que:

$$\frac{5x+2}{\sqrt{3x^2 + 2x + 5}} = \frac{x\left(5 + \frac{2}{x}\right)}{|\,x\,| \sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}}$$

Luego:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{3x^2+2x+5}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(5+\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5+\frac{2}{x}}{-\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}} =$$
$$= \frac{5+0}{-\sqrt{3+0+0}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x-7}$

▼ "Racionalicemos" el numerador:

$$\frac{2-\sqrt{x-3}}{x-7} = \frac{2^2-(x-3)}{(x-7)(2+\sqrt{x-3})} = \frac{7-x}{(x-7)(2+\sqrt{x-3})} =$$
$$= \frac{-(x-7)}{(x-7)(2+\sqrt{x-3})} = \frac{-1}{2+\sqrt{x-3}}$$

Luego:

$$\lim_{x\to7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x-7} = \lim_{x\to7} \frac{-1}{2+\sqrt{x-3}} = \frac{-1}{2+\sqrt{7-3}} = \frac{-1}{2+\sqrt{4}} = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

(4) Bosqueja la gráfica de una función que satisfaga las siguientes condiciones:

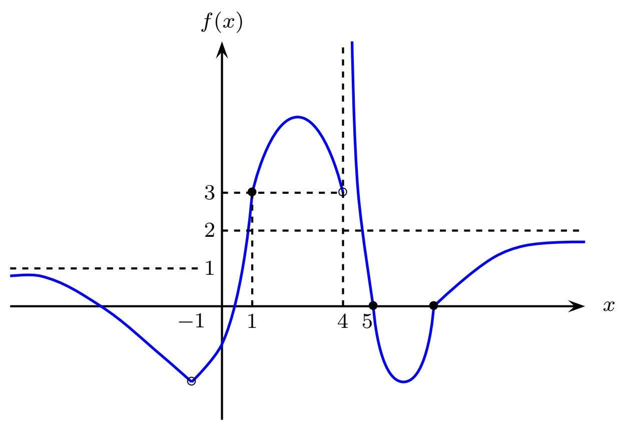
(a) $f(1)=3,\ f(5)=0,\ f(7)=0,$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to4^-} f(x)=3,\ \lim_{x\to4^+} f(x)=\infty$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=2$

(d) Tiene una discontinuidad removible en $x=-1$.

▼ Una gráfica posible de la función $f(x)$ es:



(5) Encuentre los valores de a y b para que la función f sea continua en todo su dominio, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x<2 \\ ax+b & \text{si } 2\le x\le 5 \\ x & \text{si } 5<x \end{cases}$$

▼ Se tiene que cumplir que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \text{ y que } \lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$$

Pues, en todos los demás puntos, la función es lineal y por ello continua. Estas dos condiciones equivalen a

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \;\&\; \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x)$$

Como

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x+6) = 2(2)+6 = 4+6 = 10$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (ax+b) = 2a+b$$

De aquí inferimos que $2a+b=10$

Análogamente, como

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (ax+b) = a(5)+b = 5a+b$$

y

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} x = 5$$

Ahora obtenemos que $5a+b=5$, con lo cual conformamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2a+b=10 \\ 5a+b=5 \end{cases}$$

Para hallar a & b lo resolvemos, por ejemplo, restándolas:

$$-3a = 5 \Rightarrow a = -\frac{5}{3} \;\&\; b = 10-2a = 10-2\left(-\frac{5}{3}\right) = 10+\frac{10}{3} = \frac{30+10}{3} = \frac{40}{3}$$

$\square$