CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E0900

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{3x^2 - 27}{5 - 3x} \geq 0.$

(2) Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{2 - 3x} \quad \& \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 8}$$

(a) Encuentre D_f y D_g

(b) Encuentre $g \circ f$ y $\dfrac{f}{g}$ y sus dominios respectivos

(3) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ 4 & \text{si } |\,x\,| < 1 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(a) Proporcionar el dominio de la función, el rango, sus raíces y su paridad

(b) Hacer un bosquejo de la gráfica

(B) Segundo parcial

(1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ 2ax + b & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

(a) Encontrar los valores de a y b para que la función sea continua en todo punto

(b) Graficar la función con los valores encontrados

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{2x^3 - 16}{-3x^2 + 8x - 4}.$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{3 + 2x} \right).$

(4) Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^3 - 3x}{x^4 + x^3}.$

Encontrar el dominio y las raíces de la función, clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales, y hacer un bosquejo de la gráfica.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(C) Tercer parcial

(1) Sea la función $f(x) = -\dfrac{x^2}{(x-5)^2}$

(a) Encuentre los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento
(b) Encuentre los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad
(c) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales
(d) Haga un bosquejo de la gráfica

(2) Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de 50 m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.

(3) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida implícitamente por

$$3x^2 - x^2\sqrt{y} + y^3 = 3$$

en el punto $(1, 1)$.

Respuestas

(A) Primer parcial

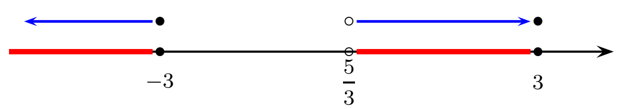
(1) $\dfrac{3x^2-27}{5-3x} \geq 0.$

▼ Esta desigualdad equivale a $\dfrac{x^2-9}{5-3x} \geq 0$, que se obtiene multiplicando la anterior por $\dfrac{1}{3}$. La última desigualdad sucede si

$$\begin{array}{ccc}
x^2-9 \geq 0 \;\&\; 5-3x > 0 & \text{o bien} & x^2-9 \leq 0 \;\&\; 5-3x < 0;\\
x^2 \geq 9 \;\&\; 3x < 5 & \text{o bien} & x^2 \leq 9 \;\&\; 3x > 5;\\
|\,x\,| \geq 3 \;\&\; x < \dfrac{5}{3} & \text{o bien} & |\,x\,| \leq 3 \;\&\; x > \dfrac{5}{3};\\
x \geq 3 \text{ o bien } x \leq -3 \;\&\; x < \dfrac{5}{3} & \text{o bien} & -3 \leq x \leq 3 \;\&\; x > \dfrac{5}{3};\\
x \in (-\infty, -3] & & x \in \left(\dfrac{5}{3}, 3\right].
\end{array}$$

Luego, el conjunto solución es

$$CS = (-\infty, -3] \bigcup \left(\frac{5}{3}, 3\right]$$



Como

$$\frac{x^2-9}{5-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{5-3x}\,,$$

también podemos averiguar cuándo es “no negativa”, pues su signo nos lo da la tabla

	Signo de			
Intervalo	$x+3$	$5-3x$	$x-3$	$\frac{x^2-9}{5-3x}$
$x < -3 \left(< \frac{5}{3} < 3\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-3 < x < \frac{5}{3} \,(< 3)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(-3 <)\, \frac{5}{3} < x < 3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\left(-3 < \frac{5}{3} <\right) 3 < x$	$+$	$-$	$+$	$-$

□

(2) Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{2-3x} \quad \& \quad g(x) = \frac{1}{x^2+2x-8}\,,$$

(a) encuentre D_f & D_g

▼ Dominios:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2 - 3x \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2 \geq 3x \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq \frac{2}{3} \right\} = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right];$$

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + 2x - 8 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x+4)(x-2) \neq 0 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -4 \;\&\; x \neq 2 \right\} = \mathbb{R} - \{-4, 2\} = (-\infty, -4) \bigcup (-4, 2) \bigcup (2, +\infty)\,.$$

□

(b) Encuentre $g \circ f$ & $\dfrac{f}{g}$ y sus dominios respectivos

▼ Calculamos:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{2-3x}) = \frac{1}{(\sqrt{2-3x})^2 + 2\sqrt{2-3x} - 8} =$$

$$= \frac{1}{2 - 3x + 2\sqrt{2-3x} - 8} = \frac{1}{-6 - 3x + 2\sqrt{2-3x}};$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{2-3x}}{\dfrac{1}{x^2+2x-8}} = \sqrt{2-3x}\,(x^2 + 2x - 8);$$

Sus dominios:

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \,\middle|\, \sqrt{2-3x} \neq -4 \;\&\; \sqrt{2-3x} \neq 2 \right\}.$$

Como $\sqrt{2-3x} \geq 0$, entonces $\sqrt{2-3x} \neq -4$ para cualquier x pues $-4 < 0$ y también

$$\sqrt{2-3x} = 2 \Leftrightarrow 2 - 3x = 4 \Leftrightarrow 3x = 2 - 4 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}\,.$$

Luego entonces:

$$D_{g\circ f} = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] - \left\{-\frac{2}{3}\right\} = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \bigcup \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right];$$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \bigcap D_g$, pues g no tiene raíces y de aquí

$$D_{\frac{f}{g}} = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \bigcap (\mathbb{R} - \{-4, 2\}) = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] - \{-4\} =$$

$$= (-\infty, -4) \bigcup \left(-4, \frac{2}{3}\right].$$

□

(3) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \leq x < -1; \\ 4 & \text{si } |\,x\,| < 1; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

(a) Proporcionar dominio de la función, sus raíces, su paridad y el rango

▼ Se ve que el dominio de f es: $D_f = [-3,-1) \bigcup (-1,4]$ y que

$$-x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = -1 \mp 2 = \begin{cases} -3 \\ 1\,. \end{cases}$$

Raíces: $x = -3$ es raíz, pero $x = 1$ no, pues no es parte de la regla de correspondencia que corresponde a $[-3,-1)$.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm \frac{4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1\,. \end{cases}$$

Luego $x = 3$ sí es raíz pero $x = -1$ no, pues no es parte de la regla de correspondencia $x^2 - 2x - 3$ que corresponde a $[1,4]$.
Paridad: su dominio no es simétrico con respecto al origen por lo que no puede ser par ni impar.
El rango lo vamos a resolver en el apartado (b).

□

(b) Hacer un bosquejo de la gráfica

▼ Como:

$$-x^2 - 2x + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 1 + 3 = -(x+1)^2 + 4,$$

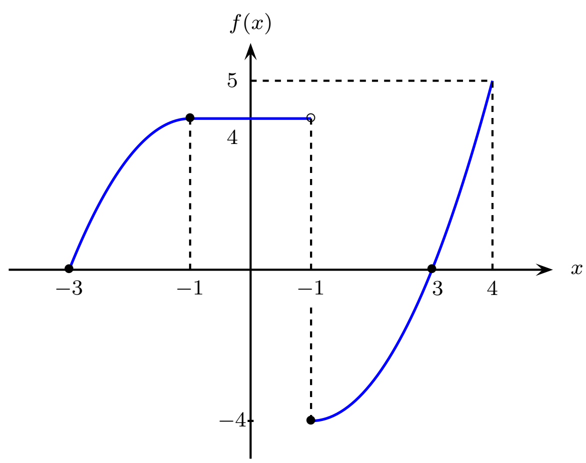
el vértice de la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$ es $(-1,4)$.

Tabulamos $f(1) = -4$ y $f(4) = 5$; y como

$$x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 3 - 1 = (x-1)^2 - 4,$$

el vértice de la parábola $y = x^2 - 2x - 3$ es $(1,-4)$.

La gráfica de la función $f(x)$ es:



Rango de $f(x)$: $R_f = [-4,5)$.

□

(B) Segundo parcial

(1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{si } x \le -1; \\ 2ax + b & \text{si } -1 < x \le 2; \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$

(a) Encontrar los valores a, b para que la función sea continua en todo punto

▼ Claramente la función es continua en $(-\infty, -1]$, en $(-1, 2]$ y en $(2, +\infty)$, por lo que tenemos que hacer continua a f en $x = -1$ y en $x = 2$; para ello observemos que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^2 + 4x + 4) = 1 = f(-1) \text{ y también que}$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (2ax + b) = -2a + b.$$

Por lo que $1 = -2a + b$, para que f sea continua en $x = -1$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4a + b = f(2) \text{ y } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 4x + 4) = 0.$$

Entonces, $4a + b = 0$ para que f sea continua en $x = 2$.

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$, se tiene que cumplir

$$\begin{cases} -2a + b = 1; \\ 4a + b = 0. \end{cases}$$

Resolvamos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a, b, restándole a la segunda la primera: $6a = -1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{6}$.

Sustituyendo este valor en la primera tenemos que

$$\frac{2}{6} + b = 1 \Rightarrow b = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

□

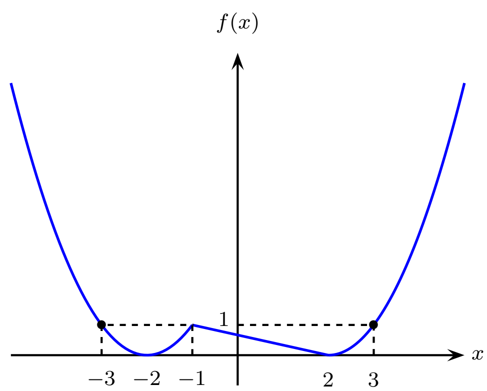
(b) Graficar la función con los valores encontrados

▼ Como se observa, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ & $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

En el intervalo $[-1, 2]$ es la recta $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Tabulamos: $f(-3) = 1, f(-1) = 1$ & $f(3) = 1$.

La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 16}{-3x^2 + 8x - 4}$.

▼ Como

$$-3x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-6} = \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{2}{3} \end{cases},$$

tenemos que

$$-3x^2 + 8x - 4 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-2) = -(3x-2)(x-2)$$

y que

$$2x^3 - 16 = 2(x^3 - 8) = 2(x^3 - 2^3) = 2(x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Siendo así,

$$\frac{2x^3 - 16}{-3x^2 + 8x - 4} = \frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{-(3x-2)(x-2)} = \frac{2(x^2+2x+4)}{-(3x-2)} \text{ si } x - 2 \neq 0 (\Leftrightarrow x \neq 2)$$

y entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 16}{-3x^2 + 8x - 4} &= \lim_{x\to 2} \frac{2(x^2+2x+4)}{-(3x-2)} = \\ &= \frac{2[2^2 + (2\times 2) + 4]}{-[(3\times 2) - 2]} = \frac{2(4+4+4)}{-(6-2)} = \frac{2\times 12}{-4} = -6.\end{aligned}$$

□

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3+2x}\right)$.

▼ Tenemos que

$$\sqrt{9+4x^2} = \sqrt{x^2\left(\frac{9}{x^2} + 4\right)} = |\,x\,|\sqrt{\frac{9}{x^2}+4} = -x\sqrt{\frac{9}{x^2}+4} \text{ si } x < 0$$

que es el caso pues vamos a hacer que x tienda a $-\infty$. Además $3 + 2x = x\left(\frac{3}{x} + 2\right)$, por lo que

$$\frac{\sqrt{9+4x}}{3+2x} = \frac{-x\sqrt{\frac{9}{x^2}+4}}{x\left(\frac{3}{x}+2\right)} = -\frac{\sqrt{\frac{9}{x^2}+4}}{\frac{3}{x}+2} \text{ pues } x < 0$$

y así mismo,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3+2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{9}{x^2}+4}}{\frac{3}{x}+2} = -\frac{\sqrt{0+4}}{0+2} = -\frac{2}{2} = -1.$$

□

(4) Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^3 - 3x}{x^4 + x^3}$.

Encontrar el dominio y las raíces de la función, clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales, y hacer un bosquejo de la gráfica.

▼ Dominio:

$$\begin{aligned}D_f &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^4 + x^3 = x^3(x+1) \neq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq 0 \ \&\ x \neq -1 \,\right\} = \\ &= \mathbb{R} - \{\, 0, -1 \,\};\end{aligned}$$

Raíces:

$$3x^3 - 3x = 3x(x^2 - 1) = 3x(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1 \ \& \ x = 1.$$

Ésas serían las raíces de f, pero como $0 \notin D_f$ & $-1 \notin D_f$, la única raíz es $x = 1$.
Discontinuidades:
La función f es continua en su dominio pues es una función racional.

En $x = 0$ la discontinuidad es infinita y en $x = -1$ es removible pues:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{3x(x-1)(x+1)}{x^3(x+1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{3x(x-1)}{x^3} = \frac{-3(-2)}{(-1)^3} = -6;$$

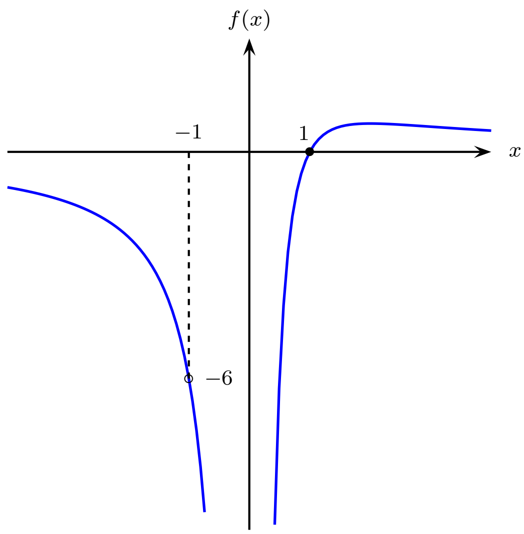
$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -6$ también, por lo que si definiésemos $f(-1) = -6$, f resultaría continua en $x = -1$.

$$\lim_{x \to 0^\mp} f(x) = \lim_{x \to 0^\mp} \frac{3x(x-1)(x+1)}{x^3(x+1)} = \lim_{x \to 0^\mp} \frac{3(x-1)}{x^2} = -\infty;$$

Asíntotas:
Se ve que $x = 0$ es una asíntota vertical y además

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^3 - 3x}{x^4 + x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{x^3}}{1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{0 - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0,$$

por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal.
Un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es:



□

(C) Tercer parcial

(1) Sea la función $f(x) = -\dfrac{x^2}{(x-5)^2}$.

(a) Encuentre los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento

▼ Puntos críticos:
Primero necesitamos calcular la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{-2x(x-5)^2 + 2x^2(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{-2x(x-5) + 2x^2}{(x-5)^3} = \frac{10x}{(x-5)^3}.$$

El único punto crítico es $x = 0$ y observamos que $5 \notin D_f$, luego entonces los intervalos son:

$x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$; puesto que tanto $10x$ como $(x-5)^3$ son negativos, $\Rightarrow f$ es creciente.
$0 < x < 5 \Rightarrow f'(x) < 0$, puesto que $10x > 0$; pero, como $x - 5$ y como $(x-5)^3$ son negativos, $\Rightarrow f$ es decreciente.
$x > 5 (> 0) \Rightarrow f'(x) > 0$, puesto que tanto $10x$ como $x - 5$ y también $(x-5)^3$ son positivos, $\Rightarrow f(x)$ es creciente.

□

(b) Encuentre los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad

▼ Puntos de inflexión:
Calculemos la segunda derivada de la función

$$f''(x) = \frac{10(x-5)^3 - 10x \times 3(x-5)^2}{(x-5)^6} = \frac{10(x-5) - 30x}{(x-5)^4} = $$
$$= \frac{-20x - 50}{(x-5)^4} = -\frac{20x + 50}{(x-5)^4}\,.$$

El signo de esta derivada segunda lo da el numerador, ya que $(x-5)^4 > 0$ para $x \neq 5$:

$$-20x - 50 > 0 \Leftrightarrow 20x < -50 \Leftrightarrow x < -\frac{50}{20} = -\frac{5}{2}\,.$$

Intervalos de concavidad:
En $\left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right)$, la gráfica de la función es cóncava hacia arriba:

$$-20x - 50 < 0 \Leftrightarrow 20x > -50 \Leftrightarrow x > -\frac{50}{20} = -\frac{5}{2}\,.$$

En $\left(-\dfrac{5}{2}, 5\right)$ y en $(5, +\infty)$, la gráfica es cóncava hacia abajo; y para $x = -\dfrac{5}{2}$, hay un punto de inflexión, pues ahí la gráfica cambia el sentido de la concavidad y es continua.
Tal punto de inflexión es

$$\left[-\frac{5}{2}, f\left(-\frac{5}{2}\right)\right] = \left[-\frac{5}{2}, \frac{-\dfrac{25}{4}}{\left(-\dfrac{5}{2} - 5\right)^2}\right] = \left[-\frac{5}{2}, \frac{-\dfrac{25}{4}}{\left(-\dfrac{15}{2}\right)^2}\right] = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{9}\right).$$

□

(c) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales

▼ $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5}\left[-\left(\dfrac{x}{x-5}\right)^2\right] = -\infty$, por lo que $x = 5$ es asíntota vertical.

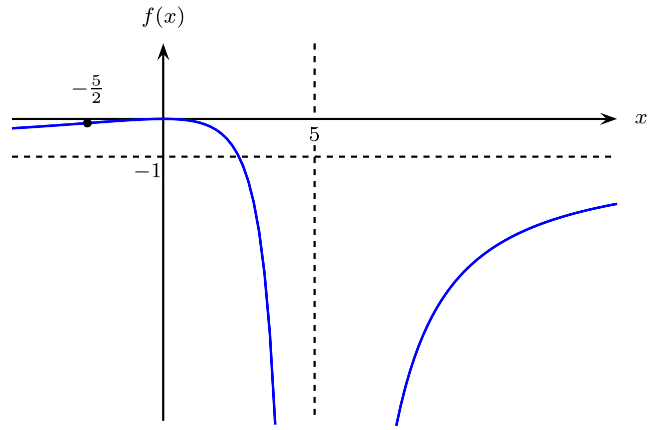
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{(x-5)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{1 - \dfrac{10}{x} + \dfrac{25}{x^2}} = \frac{-1}{1 - 0 + 0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

□

(d) Haga un bosquejo de la gráfica

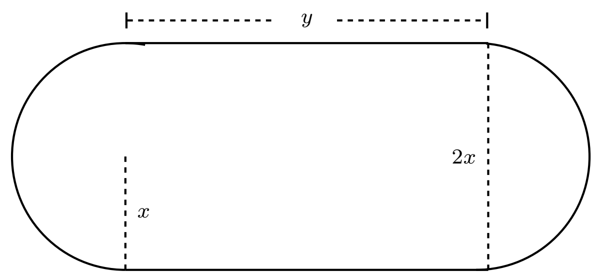
▼ La gráfica de $f(x)$ es:



$\square$

(2) Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de 50 m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.

▼ Usamos la figura siguiente:



El área del terreno es

$$A = 2xy + \pi x^2.$$

El perímetro, 50 m, está dado por

$$2y + 2\pi x = 50 \Rightarrow y = \frac{50 - 2\pi x}{2} = 25 - \pi x.$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del área lo tendremos expresado como función de una sola variable, x:

$$A(x) = 2x(25 - \pi x) + \pi x^2 = 50x + x^2(\pi - 2\pi) = 50x - \pi x^2.$$

Sus puntos críticos son:

$$A'(x) = \left(50x - \pi x^2\right)' = 50 - 2\pi x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}\,.$$

Como $A''(x) = -2\pi < 0$, se trata en efecto de un máximo; además $y = 25 - \pi\dfrac{25}{\pi} = 0$, es decir, el área máxima se obtiene cuando el terreno tiene la forma circular. $\square$

(3) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida implícitamente por

$$3x^2 - x^2\sqrt{y} + y^3 = 3$$

en el punto $(1, 1)$.

▼ En efecto, el punto $(1,1)$ pertenece a la gráfica de la función, pues sus coordenadas $x = 1$ & $y = 1$ satisfacen la ecuación ya que

$$3 \times (1)^2 - (1)^2\sqrt{1} + (1)^3 = 3 - 1 + 1 = 3.$$

La pendiente de cualquier tangente está dada por

$$6x - 2x\sqrt{y} - \frac{x^2}{2\sqrt{y}}y' + 3y^2y' = 0 \Leftrightarrow y'\left(3y^2 - \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right) = 2x\sqrt{y} - 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; y' = \frac{2x\sqrt{y} - 6x}{3y^2 - \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}}}\,.$$

En el punto $(1,1)$ la pendiente es

$$y'(1,1) = \frac{2 \times 1\sqrt{1} - 6(1)}{3(1)^2 - \dfrac{1^2}{2\sqrt{1}}} = \frac{2 - 6}{3 - \dfrac{1}{2}} = \frac{-4}{\dfrac{5}{2}} = -\frac{8}{5}\,.$$

Por lo que la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = -\frac{8}{5}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{8}{5}x + \frac{8}{5} + 1 \Rightarrow y = -\frac{8}{5}x + \frac{13}{5}\,.$$

□