# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
# PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1000

(1) Se tiene un triángulo equilátero cuyo lado mide $x$ cm.
Exprese el área del triángulo en función de $x$.

(2) $\left| 5 - \dfrac{1}{x} \right| < 1.$

(3) $2x^2 + x < 6\,.$

(4) Dada la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} -\,|\,x+2\,| & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Obtenga la gráfica de $g$ y diga si es par, impar o ninguna de las dos. Dé su rango.

(5) Si

$$f(x) = x^3 + 2 \text{ y } g(x) = \frac{2}{x-1}\,:$$

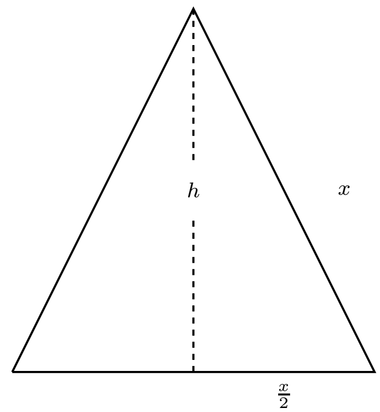
(a) Encuentre los dominios de $f$ & de $g$.
(b) Dé las reglas de correspondencia así como los dominios de las siguientes funciones:
$\dfrac{g}{f}$; $\quad g \circ f \quad \& \quad f \circ g$

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

## Respuestas

(1) Se tiene un triángulo equilátero cuyo lado mide $x$ cm.
Exprese el área del triángulo en función de $x$.

▼ Construimos la siguiente figura:




Como la altura correspondiente a un vértice de un triángulo equilátero también es mediana, entonces, por el teorema de Pitágoras tenemos que la altura $h$ es igual a

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3} \times x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Por lo tanto, el área del triángulo será $\dfrac{1}{2}$ de la base $x$ por la altura $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$; esto es

$$A(x) = \frac{1}{2}x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

□

(2) $\left|5 - \dfrac{1}{x}\right| < 1.$

▼ Esta desigualdad equivale al sistema de dos desigualdades

$$-1 < 5 - \frac{1}{x} < 1; \text{ sumando } -5 \text{ tenemos}$$
$$-1 - 5 < 5 - \frac{1}{x} - 5 < 1 - 5 \Rightarrow -6 < \frac{1}{-x} < -4;$$

y multiplicando por $-1$ se obtiene

$$6 > \frac{1}{x} > 4\,.$$

(a) Si $x > 0$, multiplicando por $x$ tenemos

$$6x > 1 > 4x \Rightarrow 6x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{6} \;\&\; 1 > 4x \Rightarrow x < \frac{1}{4}.$$

Luego, el conjunto solución de $\left| 5 - \frac{1}{x} \right| < 1$ para el caso de $x > 0$ es

$$(0, +\infty) \bigcap \left( \frac{1}{6}, +\infty \right) \bigcap \left( -\infty, \frac{1}{4} \right)$$

y esta intersección es igual a

$$\left( \frac{1}{6}, \frac{1}{4} \right).$$

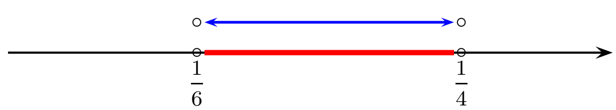
(b) Si $x < 0$, multiplicando por $x$ tenemos $6x < 1 < 4x \Rightarrow 6x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{6}$ & $1 < 4x \Rightarrow x > \frac{1}{4}$.
Luego, el conjunto solución de $\left| 5 - \frac{1}{x} \right| < 1$ para $x < 0$ es

$$(-\infty, 0) \bigcap \left( -\infty, \frac{1}{6} \right) \bigcap \left( \frac{1}{4}, +\infty \right).$$

Pero este conjunto es vacío pues $\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$.

Por lo que el conjunto solución de $\left| 5 - \frac{1}{x} \right| < 1$ es únicamente

$$\left( \frac{1}{6}, \frac{1}{4} \right).$$




Podemos comprobar que $x = \frac{1}{6}$ & $x = \frac{1}{4}$ no satisfacen la desigualdad $\left| 5 - \frac{1}{x} \right| < 1$, pues

$$\left| 5 - \frac{1}{\frac{1}{6}} \right| = |\, 5 - 6 \,| = |\, -1 \,| = 1 \text{ y } \left| 5 - \frac{1}{\frac{1}{4}} \right| = |\, 5 - 4 \,| = |\, 1 \,| = 1;$$

para ambos casos $1 \not< 1$.

$\square$

(3) $2x^2 + x < 6$.

▼
Esta desigualdad equivale a

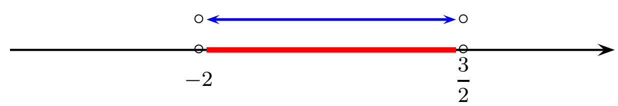
$$2x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow 2\left( x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \right) < 0 \Leftrightarrow 2(x+2)\left( x - \frac{3}{2} \right) < 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x-3) < 0.$$

Construyamos la tabla para esta última desigualdad

| | Signo de | | |
|---|---|---|---|
| Intervalo | $x+2$ | $2x-3$ | $2x^2+x-6$ |
| $x<-2\left(<\frac{3}{2}\right)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $-2<x<\frac{3}{2}$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $(-2<)\frac{3}{2}<x$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Luego el conjunto solución de $2x^2+x<6$ es únicamente

$$CS=\left(-2,\frac{3}{2}\right).$$




Podemos comprobar que $x=-2$ & $x=\dfrac{3}{2}$ no satisfacen la desigualdad $2x^2+x<6$, pues,

$$2(-2)^2-2=2\times 4-2=8-2=6$$

y

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=2\times\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=\frac{12}{2}=6;$$

y para ambos casos, $6\not<6$.

$\square$

(4) Dada la siguiente función

$$g(x)=\begin{cases}-\,|\,x+2\,| & \text{si } x<-2\\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2\leq x\leq 2\\ x-2 & \text{si } x>2.\end{cases}$$

Obtenga la gráfica de $g$ y diga si es par, impar o ninguna de las dos. Dé su rango.

▼ Observemos que $x<-2$ implica que $x+2<0$, luego para este caso

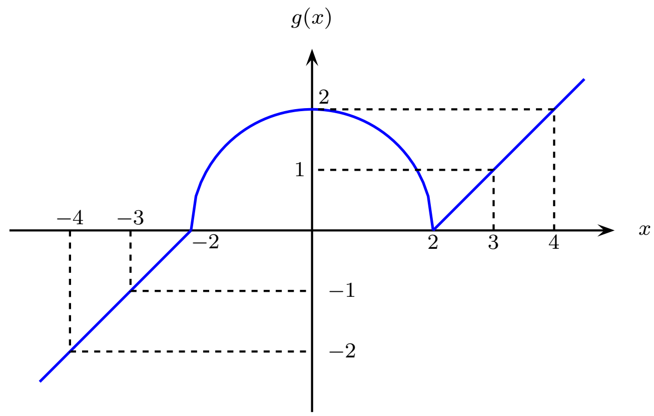
$$|\,x+2\,|=-(x+2)\Rightarrow -\,|\,x+2\,|=-[-(x+2)]=x+2;$$

además la gráfica de $y=x+2$ es una recta de pendiente 1 y de ordenada en el origen 2.

Si hacemos $g(x)=y$, vemos que para $-2\leq x\leq 2$, tenemos que

$$y=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow y^2=4-x^2\Rightarrow x^2+y^2=4$$

que es una circunferencia de centro en el origen y radio 2, de manera que $y=\sqrt{4-x^2}$ es la semicircunferencia superior;
$y=x-2$ es una recta de pendiente 1 y ordenada en el origen $-2$, luego la gráfica de $g(x)$ es:




No es par ni impar; además $R_g = \mathbb{R}$ .

$\square$

(5) Si $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$:

(a) Encuentre los dominios de $f$ y de $g$

▼ $D_f = \mathbb{R}$ y $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$.

$\square$

(b) Dé las reglas de correspondencia así como los dominios de las siguientes funciones:

$\dfrac{g}{f}$; $\quad g \circ f \quad \& \quad f \circ g$

▼ Calculamos

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\dfrac{2}{x-1}}{x^3+2} = \frac{2}{(x-1)(x^3+2)}.$$

Observemos que

$$D_f \bigcap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

y que $f(x) = 0$ si $x^3 + 2 = 0$, es decir, si $x^3 = -2$ o bien $x = \sqrt[3]{-2}$;

luego

$$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \left\{1, \sqrt[3]{-2}\right\};$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^3+2) = \frac{2}{(x^3+2)-1} = \frac{2}{x^3+1};$$

$$D_{g\circ f} = \left\{x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 + 2 \neq 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 \neq -1\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \sqrt[3]{-1}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -1\right\} = \mathbb{R} - \{-1\};$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{2}{x-1}\right) = \left(\frac{2}{x-1}\right)^3 + 2 =$$

$$= \frac{8 + 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{(x-1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 6}{(x-1)^3} \text{; y también}$$

$$D_{f\circ g} = \left\{x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \neq 1 \,\middle|\, \frac{2}{x-1} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} - \{1\},$$

pues $x \neq 1$ implica que $\dfrac{2}{x-1} \in \mathbb{R}$.

$\square$