CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1100
98-O

(1) $\dfrac{6x-5}{x-2} < 7$.

(2) $1 \le |\, 8x + 1 \,| \le 9$.

(3) Un pedazo de cable de 10 m se corta en 2 pedazos de longitudes x & $10 - x$. El primero se dobla en forma circular y el segundo en forma de cuadrado. Exprese la suma de las áreas del círculo y del cuadrado como una función de x.

(4) Hallar el dominio, graficar y determinar el rango de las funciones:

(a)
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 \le x. \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = \frac{2x}{|\, x \,| + 2x}.$$

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $\dfrac{6x-5}{x-2} < 7$.

▼

Si $x-2>0$, es decir si $x>2$, la desigualdad dada equivale a

$$6x-5 < 7(x-2) \Rightarrow 6x-5 < 7x-14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -5+14 < 7x-6x \Rightarrow 9 < x \Rightarrow x \in (9,+\infty),$$

ya que $x>9$ implica que $x>2$, una parte del conjunto solución es $(9,+\infty)$.
Si $x-2<0 \Rightarrow x<2$, la desigualdad dada equivale a

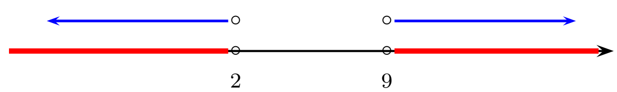
$$6x-5 > 7(x-2) \Rightarrow 6x-5 > 7x-14 \Rightarrow -5+14 > 7x-6x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9 > x \Rightarrow x \in (-\infty, 9)$$

y la otra parte del conjunto solución será entonces

$$(-\infty,2)\bigcap(-\infty,9) = (-\infty,2)$$

pues $2<9$.
El conjunto solución será entonces

$$CS = (-\infty,2)\bigcup(9,+\infty) = \mathbb{R} - [2,9].$$



Podemos, por ejemplo, comprobar que $x=0$ y que $x=1$ satisfacen la desigualdad

$$\frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} < 7 \text{ y } \frac{6-5}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1 < 7;$$

$x=9$ no satisface la desigualdad, ya que

$$\frac{54-5}{9-2} = \frac{49}{7} = 7 \not< 7.$$

□

(2) $1 \le |\,8x+1\,| \le 9$.

▼

La desigualdad de la izquierda $1 \le |\,8x+1\,|$ equivale a

$$1 \le 8x+1 \text{ o bien } 8x+1 \le -1;$$

a su vez éstas equivalen a

$$0 \le 8x \text{ o bien } 8x \le -2;$$

y éstas equivalen a

$$0 \le x \text{ o bien } x \le -\frac{1}{4}.$$

Por lo que su conjunto solución es

$$(-\infty,-\frac{1}{4}]\bigcup[0,+\infty).$$

Así mismo, la desigualdad de la derecha $|\,8x+1\,| \le 9$ equivale a

$$-9 \le 8x + 1 \le 9;$$

y a su vez estas desigualdades, a

$$-10 \le 8x \le 8 \text{ (restándoles 1) y dividiendo entre 8: } -\frac{10}{8} \le x \le 1;$$

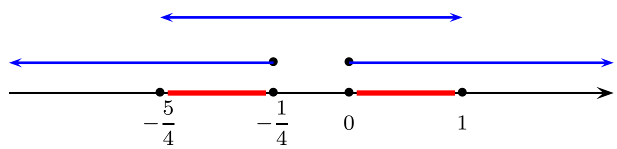
es decir,

$$x \in \left[-\frac{5}{4}, 1\right].$$

Y el conjunto solución de $1 \le |\,8x+1\,| \le 9$ será por último

$$CS = \left\{\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \bigcup [0, +\infty)\right\} \bigcap \left[-\frac{5}{4}, 1\right] = \left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right] \bigcup [0, 1].$$

como se infiere de la gráfica siguiente



Ahora podemos comprobar, por ejemplo, que $-\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{4}$, 0 y 1 sí satisfacen las desigualdades $1 \le |\,8x+1\,| \le 9$, ya que respectivamente:

$$1 \le |\,-10+1\,| \le 9,\ 1 \le |\,-2+1\,| \le 9,\ 1 \le |\,1\,| \le 9 \text{ y } 1 \le |\,8+1\,| \le 9.$$

Pero, en cambio, ni -2, ni $-\frac{1}{8}$, ni 2 las satisfacen ya que

$$1 \le |\,-16+1\,| \not\le 9,\ 1 \not\le |\,-1+1\,| \le 9,\ 1 \le |\,16+1\,| \not\le 9.$$

□

(3) Un pedazo de cable de 10 m se corta en 2 pedazos de longitudes x & $10 - x$. El primero se dobla en forma circular y el segundo en forma de cuadrado. Exprese la suma de las áreas del círculo y del cuadrado como una función de x.

▼ La longitud de la circunferencia es $x = 2\pi r$, donde r es su radio $\Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$ por lo que el área del círculo es

$$A = \pi r^2 = \pi \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}.$$

El perímetro del cuadrado es $10 - x = 4l$, donde $l = \dfrac{10-x}{4}$ es la longitud de su lado y, entonces, el área del cuadrado es

$$A = l^2 = \frac{(10-x)^2}{16}.$$

Finalmente la suma de las áreas del círculo y del cuadrado será

$$\frac{x^2}{4\pi} + \frac{(10-x)^2}{16} = \frac{4x^2 + \pi(10-x)^2}{16\pi}.$$

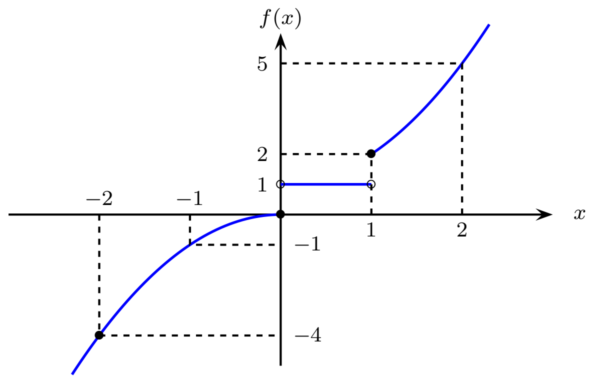
□

(4) Hallar el dominio, graficar y determinar el rango de las funciones:

(a)

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } 0<x<1\\ x^2+1 & \text{si } 1\le x.\end{cases}$$

▼ $D_f=\mathbb{R}$. Y su gráfica:



$R_f=(-\infty,0]\bigcup\{\,1\,\}\bigcup[2,+\infty)$.

□

(b)

$$f(x)=\frac{2x}{|\,x\,|+2x};$$

▼ Tenemos que:

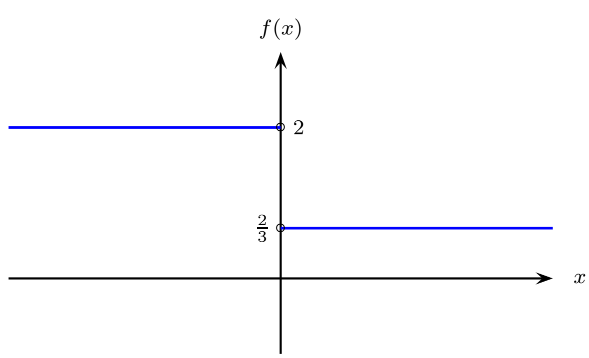
$$|\,x\,|+2x=\begin{cases} x+2x & \text{si } x\ge 0\\ -x+2x & \text{si } x<0\end{cases}=\begin{cases} 3x & \text{si } x\ge 0\\ x & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Luego, $|\,x\,|+2x=0$ únicamente si $x=0$ y $D_f=\mathbb{R}-\{\,0\,\}$.

También

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{3x} & \text{si } x>0\\[2ex] \dfrac{2x}{x} & \text{si } x<0\end{cases}=\begin{cases} \dfrac{2}{3} & \text{si } x>0\\[2ex] 2 & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Cuya gráfica será:



con lo cual, $R_f=\left\{\dfrac{2}{3},2\right\}$.

□