CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1200
09-09-97, 97-O

(1) $\dfrac{|\,3x - 4\,|}{x - 5} < -2.$

(2) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \le x \le 5 \\ 5 - x & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

Obtenga el rango, las raíces y esboce la gráfica de f. Diga si es par, impar o ni una cosa ni la otra.

(3) Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud x de uno de sus lados.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $\dfrac{|\,3x-4\,|}{x-5} < -2.$

▼

Consideramos los siguientes casos:

(a) Si $x-5>0 \Rightarrow x>5 \Rightarrow x \in (5,+\infty)$

la desigualdad queda, después de multiplicarla por $x-5$,

$$|\,3x-4\,| < -2(x-5) \Rightarrow |\,3x-4\,| < -2x+10;$$

misma que equivale al sistema

$$2x-10 < 3x-4 < -2x+10.$$

(i) La desigualdad $2x-10<3x-4$ equivale a

$$-10+4 < 3x-2x, \text{ y ésta a } -6<x, \text{ es decir, } x \in (-6,+\infty).$$

(ii) La desigualdad $3x-4<-2x+10$ equivale a

$$3x+2x < 10+4, \text{ y ésta a } 5x<14,\ x<\frac{14}{5}, \text{ es decir, } x \in \left(-\infty, \frac{14}{5}\right).$$

Luego entonces, el conjunto solución de la desigualdad $|\,3x-4\,| < -2x+10$ es

$$(-6,+\infty)\bigcap\left(-\infty,\frac{14}{5}\right) = \left(-6,\frac{14}{5}\right) = (-6, 2.8)$$

pero, como $x>5$, el conjunto solución de $\dfrac{|\,3x-4\,|}{x-5} < -2$ para $x>5$ es vacío.

(b) Si $x-5<0 \Rightarrow x<5 \Rightarrow x \in (-\infty,5)$

la desigualdad $\dfrac{|\,3x-4\,|}{x-5} < -2$ nos queda, después de multiplicarla por $x-5$, como

$$|\,3x-4\,| > -2(x-5) \Rightarrow |\,3x-4\,| > -2x+10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x-4 > -2x+10 \text{ o bien } 3x-4 < -(-2x+10), \text{ es decir, } 3x-4<2x-10\,.$$

(i) La desigualdad $3x-4>-2x+10$ equivale a

$$3x+2x > 10+4 \Rightarrow 5x>14 \Rightarrow x>\frac{14}{5} \Rightarrow x \in \left(\frac{14}{5},+\infty\right).$$

(ii) La desigualdad $3x-4<2x-10$ equivale a

$$3x-2x < -10+4 \Rightarrow x<-6 \Rightarrow x \in (-\infty,-6).$$

Por lo que el conjunto solución de $|\,3x-4\,| > -2x+10$ en este caso es

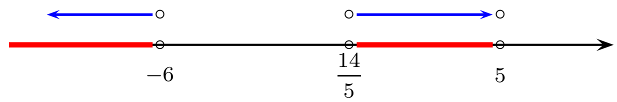
$$(-\infty,-6)\bigcup\left(\frac{14}{5},+\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-6,\frac{14}{5}\right].$$

El conjunto solución total de $\dfrac{|\,3x-4\,|}{x-5} < -2$ será, considerando que $x<5$,

$$\left\{\mathbb{R} - \left[-6,\frac{14}{5}\right]\right\}\bigcap(-\infty,5)$$

que es igual a

$$CS = (-\infty, -6) \bigcup \left(\frac{14}{5}, 5 \right)$$



Para comprobar que ni -6 ni $\frac{14}{5}$ ni tampoco 5, que ninguno, satisface la desigualdad $\frac{|\,3x-4\,|}{x-5} < -2$ debemos sustituir $x = -6$ y $x = \frac{14}{5}$; al hacerlo tendremos

$$\frac{|\,18-4\,|}{-6-5} < -2 \Rightarrow \frac{|\,-22\,|}{-11} < -2 \Rightarrow \frac{22}{-11} < -2 \Rightarrow -2 < -2;$$

$$\frac{\left|\frac{42}{5} - 4\right|}{\frac{14}{5} - 5} < -2 \Rightarrow \frac{\left|\frac{42-20}{5}\right|}{\frac{14-25}{5}} < -2 \Rightarrow \frac{\left|\frac{22}{5}\right|}{\frac{-11}{5}} < -2 \Rightarrow \frac{22}{-11} < -2 \Rightarrow -2 < -2.$$

Las cuales son falsas, pues $-2 \not< -2$.

Y además $x \neq 5$, pues $x = 5$ implica que $x - 5 = 0$, por lo cual no está definida $\frac{|\,3x-4\,|}{x-5}$.

□

(2) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 5 - x & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

Obtenga el rango, las raíces y esboce la gráfica de f. Diga si es par, impar o ni una cosa ni la otra.

▼ Tenemos

(a) Para $x < -5$, la gráfica de f es la recta $y = x + 5$.

(b) Para $x > 5$, la gráfica de f es la recta $y = 5 - x$.

(c) Para $-5 \leq x \leq 5$, si hacemos $f(x) = y$, vemos que $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$;

nos queda $y = \sqrt{25 - x^2}$.

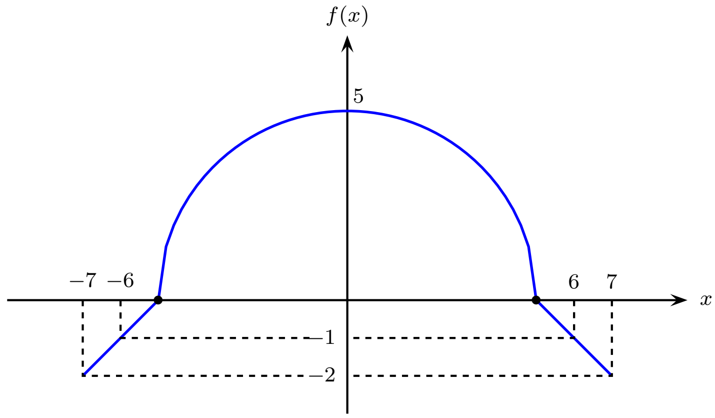
Elevando al cuadrado esta igualdad obtenemos

$$y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

que representa a la circunferencia con centro en el origen y radio 5.

Luego $y = \sqrt{25 - x^2}$ representa la semicircunferencia superior

y la gráfica de $f(x)$ entonces nos queda de la forma siguiente



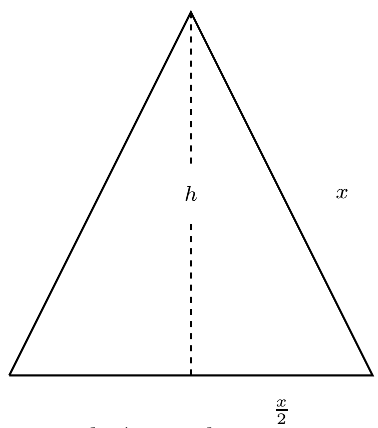
Nótese que para $x < -5$, la gráfica es parte de la recta $y = x + 5$, de pendiente 1 y ordenada al origen 5. Y que para $x > 5$ la gráfica es parte de la recta $y = -x + 5$, de pendiente -1 y ordenada al origen también 5.

Ahora observamos claramente que $R_f = (-\infty, 5]$, que las raíces son $x = \pm 5$ y que la función es par pues su gráfica es simétrica con respecto al eje de las y.

□

(3) Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud x de uno de sus lados.

▼ Usaremos el siguiente dibujo



Como la altura de uno de sus vértices es también mediana tenemos, por el teorema de Pitágoras, que

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Y el área será entonces

$$A = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Es decir,

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

□