CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1300

(1) El número de millas $M(v)$ que cierto auto compacto puede recorrer depende de su velocidad v en millas/h, según la función

$$M(v) = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \quad \text{donde } 0 < v < 70.$$

¿Para qué velocidades se recorren al menos 45 millas?

(2) Un envase cilíndrico tiene una altura igual al triple del radio r.
  (a) Determine la superficie del envase, considerando sus dos tapas, en función del radio
  (b) Si se desean fabricar envases cuyos radios están entre 3 y 5 dm, ¿cuál es la respectiva variación de volumen de los envases?

(3) Si

$$f(x) = \sqrt{4 - x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

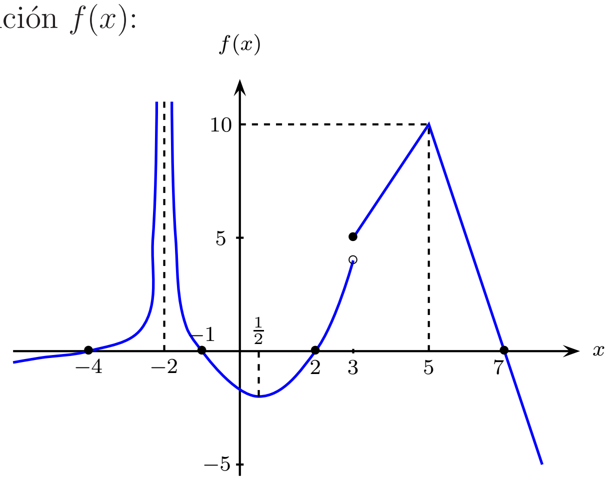
obtener, reduciendo a su mínima expresión, las funciones $(f \cdot g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$.
En cada caso proporcionar el dominio de la función.

(4) Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } -8 \le x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 6. \end{cases}$$

  (a) Determinar dominio, raíces o puntos en donde la función vale cero, gráfica y rango o imagen de f
  (b) A partir de la gráfica de f, construir la gráfica de $h(x) = 1 - 2f(x + 3)$.

(5) A partir de la gráfica de la función $f(x)$:



Determinar:
  (a) Los intervalos donde $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$; así mismo, los valores donde $f(x) = 0$
  (b) Los intervalos de monotonía de f; es decir, averiguar donde es creciente y dónde es decreciente

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) El número de millas $M(v)$ que cierto auto compacto puede recorrer depende de su velocidad v en millas/h, según la función

$$M(v) = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \quad \text{donde } 0 < v < 70.$$

¿Para qué velocidades se recorren al menos 45 millas?

▼ Será para las velocidades v tales que

$$-\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \geq 45.$$

Es decir, siempre que

$$-\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v - 45 \geq 0;$$

multiplicamos por -30 para quitar el denominador

$$v^2 - 75v + 45 \times 30 \leq 0; \text{ y ahora obtenemos}$$

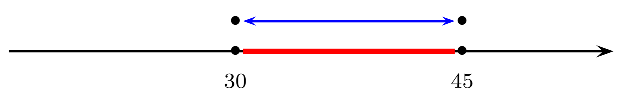
$$v^2 - 75v + 45 \times 30 = (v - 30)(v - 45).$$

Construyamos la siguiente tabla para resolver la desigualdad

	Signo de		
Intervalo	$v - 30$	$v - 45$	$v^2 - 75v + 45 \times 30$
$v < 30 (< 45)$	$-$	$-$	$+$
$30 < v < 45$	$+$	$-$	$-$
$v > 45 (> 30)$	$+$	$+$	$+$

Luego la desigualdad se cumple si

$$v \in [30, 45]$$



Podemos verificar, por ejemplo que $M(30) = M(45) = 45$ ya que

$$M(30) = -\frac{1}{30}(30)^2 + \frac{5}{2}30 = -30 + 5 \times 15 = -30 + 75 = 45;$$

$$M(45) = -\frac{1}{30}(45)^2 + \frac{5}{2}45 = -\frac{45 \times 45}{30} + \frac{5 \times 45}{2} = -\frac{3 \times 45}{2} + \frac{5 \times 45}{2} =$$

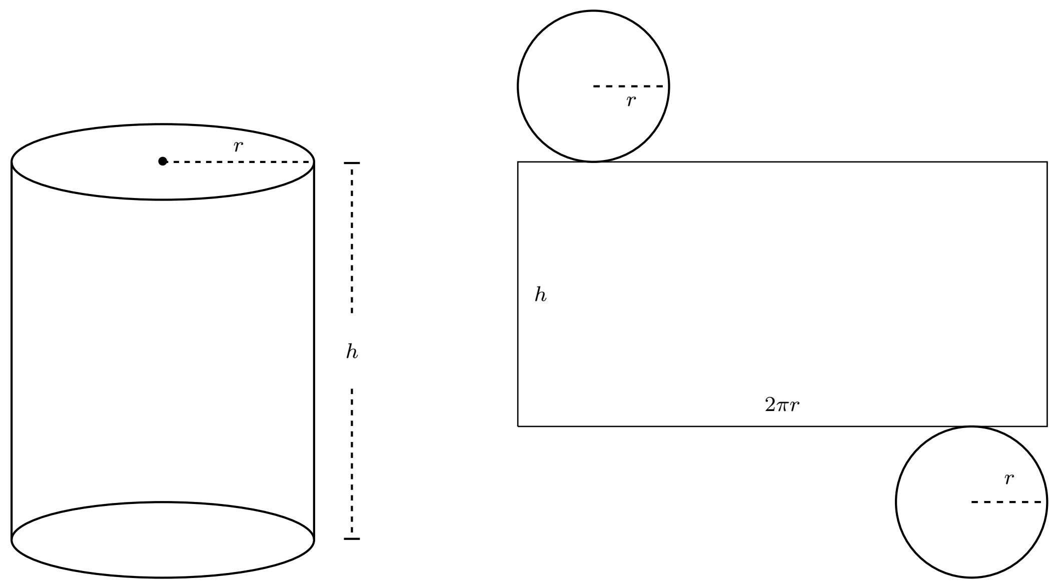
$$= \frac{(-3 + 5)45}{2} = \frac{2 \times 45}{2} = 45.$$

□

(2) Un envase cilíndrico tiene una altura igual al triple del radio r.

(a) Determine la superficie del envase, considerando sus dos tapas, en función del radio

▼ Usaremos las siguientes figuras:



La superficie S del envase será el área lateral que claramente es el área de un rectángulo de altura $3r$ y de base la longitud de una circunferencia de radio r, $2\pi r$, esto es, $6\pi r^2$, más el área de las dos tapas, $2\pi r^2$; en definitiva:

$$S(r) = 6\pi r^2 + 2\pi r^2 = 8\pi r^2.$$

□

(b) Si se desean fabricar envases cuyos radios están entre 3 y 5 dm, ¿cuál es la respectiva variación de volumen de los envases?

▼ Como el volumen del cilindro, $V(r)$, es el área de la base πr^2, por la altura $3r$, entonces $V(r) = 3\pi r^3$, y cuando $r = 3$ dm tenemos $V(3) = 81\pi$ dm^3 y $V(5) = 375\pi$ dm^3, por lo que $V(r) \in [81\pi, 375\pi]$.

□

(3) Si

$$f(x) = \sqrt{4 - x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

obtener, reduciendo a su mínima expresión, las funciones $(f \cdot g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$.
En cada caso proporcionar el dominio de la función.

▼ Tenemos que:

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{4 - x} \cdot \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{4 - x}}{x^2 - 1};$$

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{4 - x}) = \frac{1}{(\sqrt{4 - x})^2 - 1} = \frac{1}{4 - x - 1} = \frac{1}{3 - x}.$$

Como

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 4 - x \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq 4 \right\} = (-\infty, 4]$$

y como

$$D_g = \mathbb{R} - \{ -1, +1 \}, \text{ que es donde } x^2 - 1 \neq 0,$$

tenemos que

$$D_{f\cdot g} = (-\infty, 4] \bigcap \{\, \mathbb{R} - \{\, \pm 1 \,\}\,\} = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, 4]$$
$$D_{g\circ f} = \left\{\, x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \,\right\} = \left\{\, x \le 4 \,\middle|\, \sqrt{4 - x} \ne \pm 1 \,\right\};$$

y finalmente $\sqrt{4-x} = \pm 1$ si $4 - x = 1$; es decir, si $x = 3$, tenemos que

$$D_{g\circ f} = (-\infty, 4] - \{\, 3 \,\}\,.$$

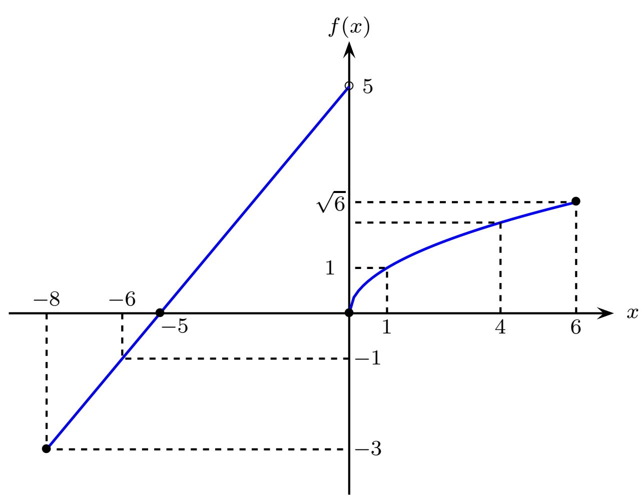
□

(4) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } -8 \le x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 6. \end{cases}$$

(a) Determinar dominio, raíces o puntos en donde la función vale cero, gráfica y rango o imagen de f

▼ La gráfica es:



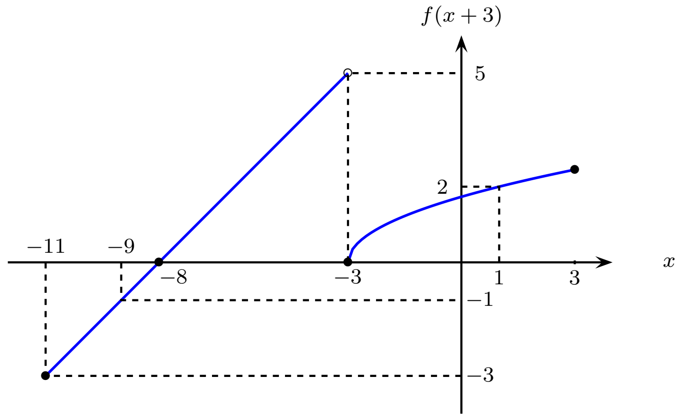
$D_f = [-8, 6]$.
Raíces : -5 & 0.
$R_f = [-3, 5)$.

□

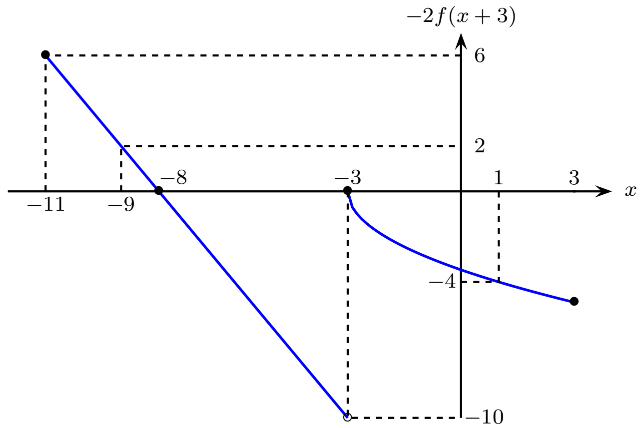
(b) A partir de la gráfica de f, construir la gráfica de $h(x) = 1 - 2f(x + 3)$.

▼ Hacemos lo siguiente:

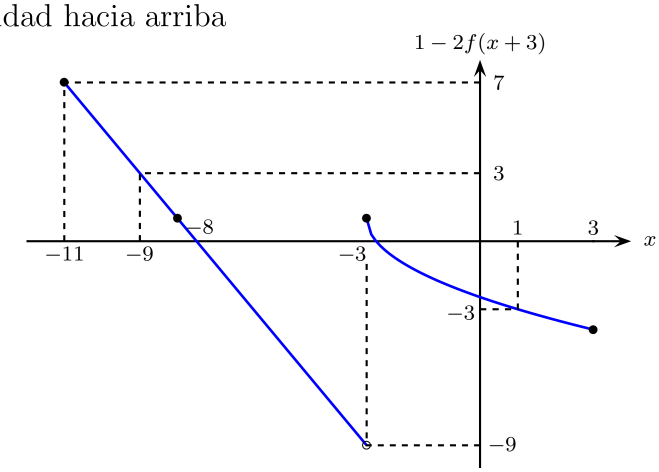
(i) Desplazamos 3 unidades a la izquierda



(ii) Multiplicamos por -2

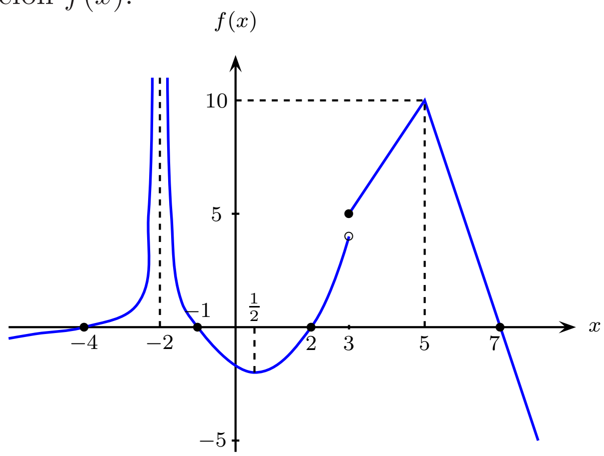


(iii) Desplazamos 1 una unidad hacia arriba



$\square$

(5) A partir de la gráfica de la función $f(x)$:



Determinar:

(a) Los intervalos en donde $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$; así mismo, los valores en donde $f(x) = 0$

▼ La función $f(x) > 0$ si $x \in (-4, -2) \bigcup (-2, -1) \bigcup (2, 7)$.

La función $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -4) \bigcup (-1, 2) \bigcup (7, +\infty)$.

La función $f(x) = 0$ si $x = -4, -1, 2, 7$.

□

(b) Los intervalos de monotonía de f; es decir, averiguar dónde es creciente y dónde es decreciente

▼ La función f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(0.5, 5)$.

La función f es decreciente en $(-2, 0.5)$ y en $(5, +\infty)$.

□