CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1400

(1) $3x^2 - x + 4 \geq 3x^2 + 2x \geq 5\,.$

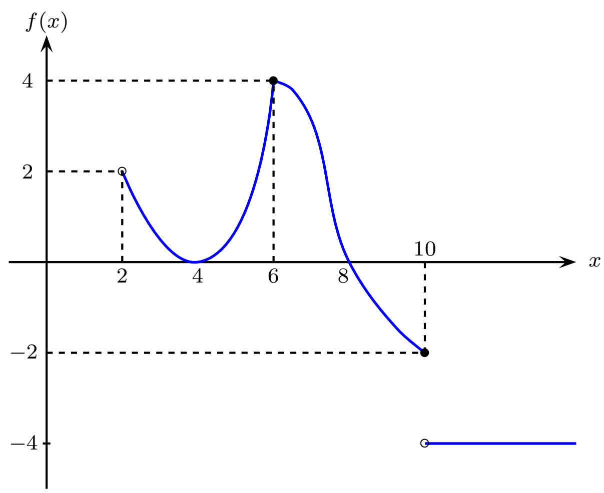
(2) $\left| \dfrac{2-3x}{x+3} \right| \geq \dfrac{1}{4}\,.$

(3) El número de vibraciones, (V) de una cuerda que vibra es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión T de la cuerda. Una cuerda particular vibra a 864 vibraciones por segundo, sometida a una tensión de 24 kg.

(a) Exprese el número de vibraciones de esta cuerda en términos de la tensión T

(b) Determine el número de vibraciones por segundo (V/seg.) cuando la cuerda esté sometida a una tensión de 6 kg.

(4) La función f es par, y para $x \in [2, 10]$ tiene la gráfica de la figura siguiente así como el valor $f(x) = -4$ si $x \in (10, +\infty)$.



(a) Complete la gráfica de f

(b) Obtenga su dominio, raíces y rango, y además determine a partir de la gráfica completada las soluciones de $f(x) > 0$ y de $f(x) < 0$

(5) Considere las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 16} \quad \& \quad g(x) = (x-1)^{\frac{1}{4}}.$$

(a) Obtenga los dominios de f y g

(b) Obtenga fórmulas y dominios de las funciones $f + g$; $\dfrac{f}{g}$; $f \circ g$; $g \circ f$

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $3x^2 - x + 4 \geq 3x^2 + 2x \geq 5\,.$

▼ Comenzamos por hallar los conjuntos solución de

$$3x^2 - x + 4 \geq 3x^2 + 2x$$

y de

$$3x^2 + 2x \geq 5.$$

Vamos a continuación a intersecarlos, es decir, a hallar los números que satisfacen simultáneamente a ambas desigualdades.
Para resolver $3x^2 - x + 4 \geq 3x^2 + 2x$, traspongamos términos poniendo en el segundo miembro de la desigualdad todos los términos que tienen x de la forma siguiente:

$$4 \geq 3x \Rightarrow x \leq \frac{4}{3};$$

con lo anterior comprobamos que el conjunto solución es

$$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right].$$

La segunda desigualdad $3x^2 + 2x \geq 5$ es equivalente a

$$3x^2 + 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)\left(x + \frac{5}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+5) \geq 0\,.$$

Construyamos pues ahora la tabla para esta desigualdad

	Signo de		
Intervalo	$3x+5$	$x-1$	$3x^2+2x-5$
$x < -\frac{5}{3}(< 1)$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{5}{3} < x < 1$	$+$	$-$	$-$
$x > 1(> -\frac{5}{3})$	$+$	$+$	$+$

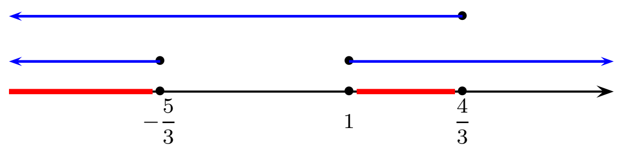
Con ella tenemos

$$3x^2 + 2x - 5 \geq 0 \text{ si } x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right] \bigcup [1, +\infty);$$

por último, el sistema de dos desigualdades $3x^2 - x + 4 \geq 3x^2 + 2x \geq 5$ se cumple si

$$x \in \left\{\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right] \bigcup [1, +\infty)\right\} \bigcap \left(-\infty, \frac{4}{3}\right] = \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right] \bigcup \left[1, \frac{4}{3}\right].$$

El diagrama asociado a esta operación es el que mostramos ahora



Puedes comprobar, por ejemplo, que $\dfrac{-5}{3}$, 1 y $\dfrac{4}{3}$ sí satisfacen el sistema de las dos desigualdades, mientras que 0 no cumple la segunda, $3x^2 + 2x \geq 5$, pues $0 \not\geq 5$.

$\square$

(2) $\left|\dfrac{2-3x}{x+3}\right| \geq \dfrac{1}{4}$.

▼ Sabemos que

$$\left|\frac{2-3x}{x+3}\right| \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2-3x}{x+3} \geq \frac{1}{4} \text{ o bien } \frac{2-3x}{x+3} \leq -\frac{1}{4}.$$

Para resolver $\dfrac{2-3x}{x+3} \geq \dfrac{1}{4}$ multipliquemos ambos miembros de la desigualdad por $4(x+3)$ para quitar los denominadores.

(a) Si $x+3>0$, es decir, si $x>-3$, obtenemos

$$8-12x \geq x+3 \Rightarrow 5 \geq 13x \Rightarrow x \leq \frac{5}{13}$$

por lo que parte del conjunto solución es el intervalo

$$\left(-3, \frac{5}{3}\right].$$

(b) En cambio, si $x+3<0$, es decir, si $x<-3$
la desigualdad $\dfrac{2-3x}{x+3} \geq \dfrac{1}{4}$ se transforma en

$$8-12x \leq x+3 \Rightarrow 5 \leq 13x \Rightarrow x \geq \frac{5}{13}$$

ya que se multiplica por un número <0
pero, no existe un número x que sea menor que -3 y mayor que $\dfrac{5}{13}$, por lo cual en este caso, el conjunto solución es el conjunto vacío.

Por lo tanto el conjunto solución de $\dfrac{2-3x}{x+3} \geq \dfrac{1}{4}$ es precisamente

$$\left(-3, \frac{5}{13}\right].$$

Puedes comprobar, por ejemplo, que $\dfrac{5}{13}$ satisface la igualdad $\left|\dfrac{2-3x}{x+3}\right| = \dfrac{1}{4}$.

Análogamente procedamos con $\dfrac{2-3x}{x+3} \leq -\dfrac{1}{4}$, multiplicando por $4(x+3)$.

(a) Si $x+3>0$, $x>-3$, tenemos que

$$8-12x \leq -(x+3) \Rightarrow 8-12x \leq -x-3 \Rightarrow 11 \leq 11x \Rightarrow x \geq 1;$$

parte del conjunto solución es $[1, +\infty)$ pues si $x \geq 1$, también se cumple que $x > -3$.

Comprueba que 1 cumple $\left|\dfrac{2-3x}{x+3}\right| \le \dfrac{1}{4}$, pues $\left|\dfrac{-1}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$.

(b) Si $x+3<0$, $x<-3$, la desigualdad se transforma en

$$8-12x \ge -x-3 \Rightarrow 11 \ge 11x \Rightarrow x \le \frac{11}{11} \Rightarrow x \le 1$$

por lo que parte del conjunto solución es $(-\infty, -3)$ pues si $x<-3$, también cumple que $x \le 1$ ya que $-3<1$.

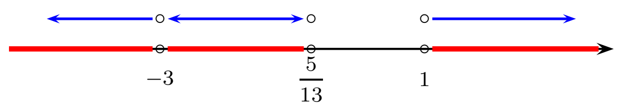
Luego entonces, el conjunto solución de la desigualdad es

$$\frac{2-3x}{x+3} \le -\frac{1}{4} \text{ es } (-\infty,-3)\bigcup[1,+\infty).$$

Por último, el conjunto solución de $\left|\dfrac{2-3x}{x+3}\right| \ge \dfrac{1}{4}$ es

$$CS = \left(-3, \frac{5}{13}\right]\bigcup[1,+\infty)\bigcup(-\infty,-3) = \mathbb{R} - \left\{\left(\frac{5}{13},1\right)\bigcup\{-3\}\right\}.$$

Ahora, su diagrama:



Comprueba, por ejemplo, que $x=\dfrac{6}{13}$ no cumple la desigualdad $\left|\dfrac{2-3x}{x+3}\right| \ge \dfrac{1}{4}$ ya que

$$\left|\frac{2-\frac{18}{13}}{\frac{6}{13}+3}\right| = \left|\frac{\frac{26-18}{13}}{\frac{6+39}{13}}\right| = \frac{8}{45} \text{ y } \frac{8}{45} \not\ge \frac{1}{4} \text{ pues } 32 \not\ge 45.$$

□

(3) El número de vibraciones (V) de una cuerda que vibra es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión T de la cuerda. Una cuerda particular vibra a 864 vibraciones por segundo, sometida a una tensión de 24 kg.

(a) Exprese el número de vibraciones de esta cuerda en términos de la tensión T

▼ Ya que el V es directamente proporcional a $\sqrt{T}$, entonces existe una constante de proporcionalidad k tal que $V = k\sqrt{T}$. Para la cuerda en consideración tendremos entonces que

$$864 = k\sqrt{24}$$

por lo tanto

$$k = \frac{864}{\sqrt{24}} = \frac{864\sqrt{24}}{24} = 36\sqrt{24} = 36\sqrt{4\times 6} = 72\sqrt{6};$$

y por último que

$$V = 72\sqrt{6}\sqrt{T} = 72\sqrt{6T}.$$

□

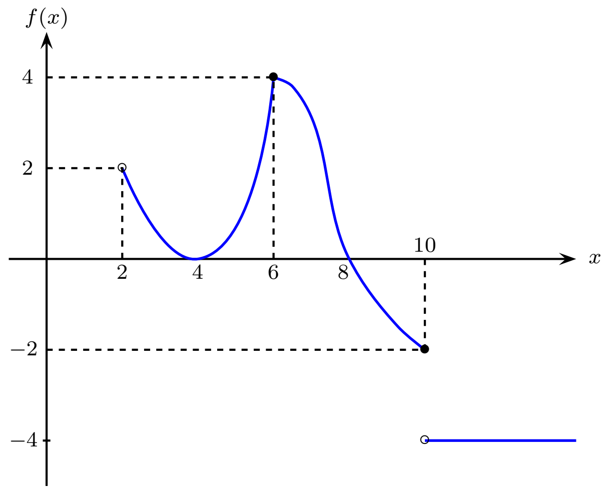
(b) Determine el número de vibraciones por segundo (V/seg.) cuando la cuerda esté sometida a una tensión de 6 kg

▼ Si $T = 6$ tendremos que

$$V = 72\sqrt{6 \times 6} = 72 \times 6 = 432\,.$$

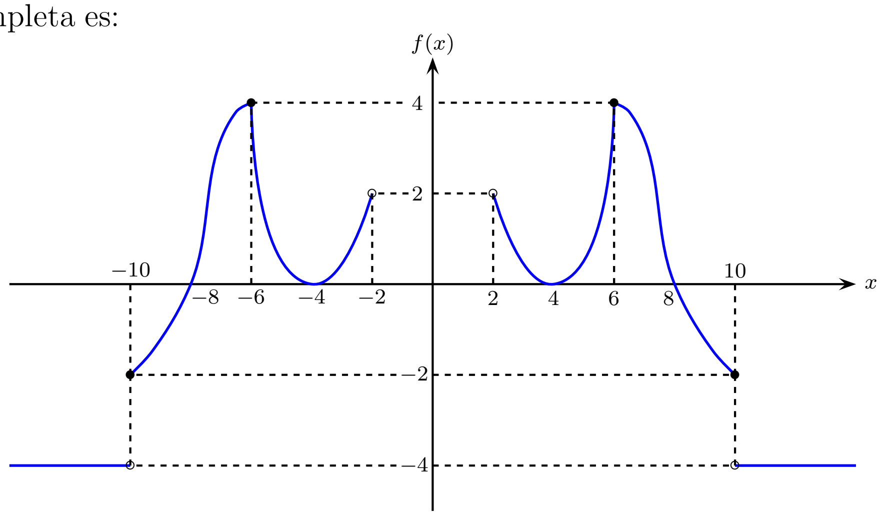
□

(4) La función f es par, y para $x \in [2, 10]$ tiene la gráfica de la figura siguiente así como el valor $f(x) = -4$ si $x \in (10, +\infty)$.



(a) Complete la gráfica de f

▼ La gráfica completa es:



□

(b) Obtenga su dominio, raíces y rango, y además determine a partir de la gráfica completada las soluciones de $f(x) > 0$ y de $f(x) < 0$

▼ Su dominio: $D_f = (-\infty, -2) \bigcup (2, +\infty)$.

Raíces: $x = -8$, -4, 4 & 8.

Rango $= \{\,-4\,\} \bigcup [-2, 4]$.

La función $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-8, -4) \bigcup (-4, -2) \bigcup (2, 4) \bigcup (4, 8)$.

La función $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -8) \bigcup (8, +\infty)$.

□

(5) Considere las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 16} \quad \& \quad g(x) = (x-1)^{\frac{1}{4}}.$$

(a) Obtenga los dominios de f y g

▼ $D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^4 - 16 = 0 \right\}$.

Pero como

$$x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2) \text{ y } x^2+4 > 0,$$

entonces,

$D_f = \mathbb{R} - (-2, +2)$;

$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x - 1 \geq 0 \right\} = [1, +\infty)$.

□

(b) Obtenga fórmulas y dominios de las funciones $f+g$; $\dfrac{f}{g}$; $f \circ g$; $g \circ f$

▼ Calculamos:

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x^4-16} + (x-1)^{\frac{1}{4}};$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\dfrac{1}{x^4-16}}{(x-1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{(x^4-16)(x-1)^{\frac{1}{4}}};$$

$$D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = \{\, \mathbb{R} - \{-2,+2\}\,\} \bigcap [1,+\infty) =$$

$$= [1,+\infty) - \{\,2\,\} = [1,2) \bigcup (2,+\infty)\,;$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \left\{ D_f \bigcap D_g \right\} - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, g(x) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ D_f \bigcap D_g \right\} - \{\,1\,\} = (1,2) \bigcup (2,+\infty)\,;$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[(x-1)^{\frac{1}{4}}] = \frac{1}{[(x-1)^{\frac{1}{4}}]^4 - 16} =$$

$$= \frac{1}{x-1-16} = \frac{1}{x-17}\,;$$

$$D_{f\circ g} = \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in [1,+\infty) \,\middle|\, (x-1)^{\frac{1}{4}} \neq \pm 2 \right\}.$$

Y como $(x-1)^{\frac{1}{4}} = \pm 2 \Rightarrow x - 1 = (\pm 2)^4 \Rightarrow x - 1 = 16 \Rightarrow x = 17$, entonces

$$D_{f\circ g} = [1,+\infty) - \{\,17\,\} = [1,17) \bigcup (17,+\infty)\,;$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{x^4-16}\right) = \left(\frac{1}{x^4-16} - 1\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \left(\frac{1 - x^4 + 16}{x^4-16}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{17 - x^4}{x^4-16}\right)^{\frac{1}{4}};$$

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{-2,+2\} \,\middle|\, \frac{1}{x^4-16} \geq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ x \neq \pm 2 \,\middle|\, \frac{1}{x^4-16} \geq 1 \right\}.$$

(i) Si $x^4 - 16 > 0 \Rightarrow x^4 > 16 \Rightarrow |\, x \,| > 2 \Rightarrow x > 2$ o bien $x < -2$;
y multiplicando por $x^4 - 16$

$$\frac{1}{x^4-16} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq x^4 - 16 \Leftrightarrow x^4 \leq 17 \Leftrightarrow |\, x \,| \leq 17^{\frac{1}{4}}$$

es decir,

$$x \in \left[-17^{\frac{1}{4}}, 17^{\frac{1}{4}} \right];$$

luego entonces,

$$x \in [-17^{\frac{1}{4}}, 17^{\frac{1}{4}}] \bigcap \left\{ (2, +\infty) \bigcup (-\infty, -2) \right\} = \left[-17^{\frac{1}{4}}, -2 \right) \bigcup \left(2, 17^{\frac{1}{4}} \right].$$

(ii) Ahora si $x^4 - 16 < 0 \Rightarrow x^4 < 16 \Rightarrow |\, x \,| < 2 \Rightarrow x \in (-2, 2)$; multiplicando $\dfrac{1}{x^4-16} \geq 1$ por $x^4 - 16$, tendremos que

$$1 \leq x^4 - 16 \Rightarrow x^4 \geq 17 \Rightarrow |\, x \,| \geq 17^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x \geq 17^{\frac{1}{4}} \text{ o bien } x \leq -17^{\frac{1}{4}}$$

y entonces,

$$x \in (-2, 2) \bigcap \left\{ \left(-\infty, -17^{\frac{1}{4}} \right] \bigcup \left[17^{\frac{1}{4}}, +\infty \right) \right\} = \emptyset.$$

El conjunto solución de $\dfrac{1}{x^4-16} \geq 1$ es precisamente

$$\left[-17^{\frac{1}{4}}, -2 \right) \bigcup \left(2, 17^{\frac{1}{4}} \right]$$

y como ± 2 no están en el conjunto solución, nos queda

$$D_{g \circ f} = \left[-17^{\frac{1}{4}}, -2 \right) \bigcup \left(2, 17^{\frac{1}{4}} \right].$$

$\square$