CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1500

(1) $|\,3x-4\,|-1\geq 4x$.

(2) Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos adosados a dos de sus lados opuestos. Si el perímetro del terreno es de 800 m, hallar el área A del terreno en función de la longitud l de uno de los lados del rectángulo.

(3) Dadas las funciones

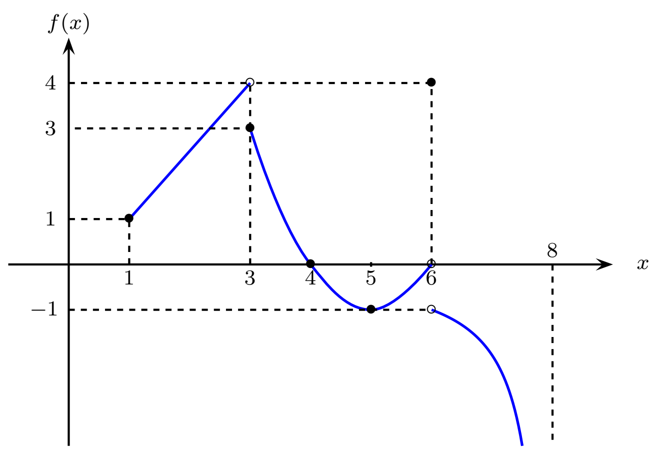
$$f(x)=2x^2-5x-3 \text{ con } x\geq -10$$

y

$$h(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

obtener fórmula y dominio de la función $h\circ f$.

(4) Considerando que la figura siguiente es un bosquejo de la gráfica de cierta función f, obtenga el dominio, el rango, las raíces así como un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = -3f(x+5)+2$.



canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $|\,3x-4\,|-1 \ge 4x$.

▼ Ésta es equivalente a

$$|\,3x-4\,| \ge 4x+1$$

y esto ocurre si

$$3x-4 \ge 4x+1 \text{ o si ocurre } 3x-4 \le -(4x+1).$$

De la primera opción se infiere que

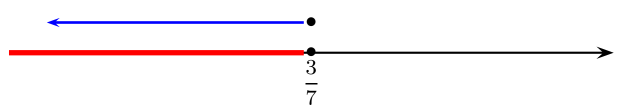
$$-5 \ge x \Rightarrow x \in (-\infty, -5]\ ;$$

y de la segunda que

$$3x-4 \le -4x-1 \Rightarrow 7x \le 3 \Rightarrow x \le \frac{3}{7} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right]\ ;$$

Puesto que $(-\infty, -5] \subseteq \left(-\infty, \frac{3}{7}\right]$ el conjunto solución es

$$CS = (-\infty, -5] \bigcup \left(-\infty, \frac{3}{7}\right] = \left(-\infty, \frac{3}{7}\right]$$



Verifiquemos que $\frac{3}{7}$ sí satisface la desigualdad; poniendo en lugar de x, $\frac{3}{7}$ nos queda:

$$\left|\frac{9}{7}-4\right| - 1 \ge \frac{12}{7}$$

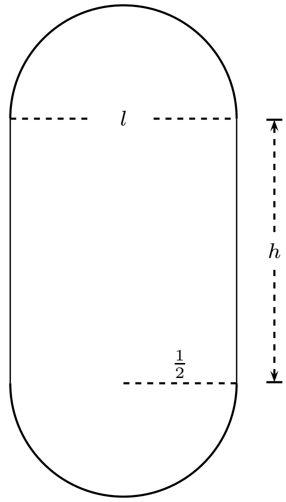
y efectuando las operaciones indicadas $\left|\frac{9-28}{7}\right| - 1 = \left|\frac{-19}{7}\right| - 1 = \frac{19}{7} - 1 = \frac{19-7}{7} = \frac{12}{7}$ que efectivamente es $\ge \frac{12}{7}$.

En cambio $x=1$ no la satisface, pues $|\,3-4\,|-1 = 0 \not\ge 4$.

□

(2) Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos adosados a dos de sus lados opuestos. Si el perímetro del terreno es de 800 m, hallar el área A del terreno en función de la longitud l de uno de los lados del rectángulo.

▼ Dibujemos primero el terreno.



Su perímetro de 800 m, es igual a

$$P = 800 = 2h + 2\pi\frac{l}{2} = 2h + \pi l\,;$$

su área es

$$A = lh + \pi\frac{l^2}{4}\,.$$

Si queremos expresar esta área en función exclusivamente de l, tenemos que sustituir el otro lado h en términos de l y esto lo podemos hacer pues como

$$800 = 2h + \pi l, \text{ entonces } h = \frac{800 - \pi l}{2}\,.$$

Se sustituye este valor y

$$A = l\frac{800 - \pi l}{2} + \frac{\pi l^2}{4} = \frac{1600l - 2\pi l^2 + \pi l^2}{4} = \frac{1600l - \pi l^2}{4}\,;$$

esto es,

$$A = l\frac{1600 - \pi l}{4} = \frac{1}{4}\left(1600l - \pi l^2\right)\,.$$

$\square$

(3) Dadas las funciones

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 3 \text{ con } x \geq -10$$

y

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

obtener fórmula y dominio de la función $h \circ f$.

▼ Tenemos que

$$D_f = [-10, +\infty) \text{ y } D_h = (-\infty, 0] \bigcup (1, +\infty)\,;$$

luego,

$$\begin{aligned} D_{h\circ f} &= \left\{\, x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_h \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \in [-10, +\infty) \,\middle|\, 2x^2 - 5x - 3 \leq 0 \text{ o bien } 2x^2 - 5x - 3 > 1 \,\right\}. \end{aligned}$$

Resolvamos pues estas dos ultimas desigualdades: $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$ equivale a

$$2\left(x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)\le 0 \Rightarrow x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\le 0\,.$$

Como

$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+6}}{2}=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25+24}{4}}}{2}=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}}{2}=\frac{\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}}{2}=\begin{cases}3\\ -\frac{1}{2}\,.\end{cases}$$

Luego a su vez la última desigualdad equivale a $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)\le 0$.

Construyamos ahora la tabla

	Signo de		
Intervalo	$x+\frac{1}{2}$	$x-3$	$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$
$x<-\frac{1}{2}(<3)$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{1}{2}<x<3$	$+$	$-$	$-$
$x>3\left(>-\frac{1}{2}\right)$	$+$	$+$	$+$

Por lo que el conjunto solución es $\left[-\frac{1}{2},3\right]$.

Por último la desigualdad $2x^2-5x-3>1$ equivale a $2x^2-5x-4>0$, y ésta a su vez a $x^2-\frac{5}{2}x-2>0$.

Como

$$x^2-\frac{5}{2}x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+8}}{2}=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25+32}{4}}}{2}=\frac{\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{57}}{2}}{2}=\begin{cases}\frac{5+\sqrt{57}}{4}\\ \frac{5-\sqrt{57}}{4}\,;\end{cases}$$

tenemos, ahora sí, que resolver $\left(x-\frac{5+\sqrt{57}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{57}}{4}\right)>0$, para lo que construimos la tabla

	Signo de		
Intervalo	$x-\frac{5-\sqrt{57}}{4}$	$x-\frac{5+\sqrt{57}}{4}$	$\left(x-\frac{5-\sqrt{57}}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{57}}{4}\right)$
$x<\frac{5-\sqrt{57}}{4}\left(<\frac{5+\sqrt{57}}{4}\right)$	$-$	$-$	$+$
$\frac{5-\sqrt{57}}{4}<x<\frac{5+\sqrt{57}}{4}$	$+$	$-$	$-$
$x>\frac{5+\sqrt{57}}{4}\left(>\frac{5-\sqrt{57}}{4}\right)$	$+$	$+$	$+$

Por lo que el conjunto solución de la desigualdad propuesta $2x^2-5x-3>1$ es

$$\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{57}}{4}\right)\bigcup\left(\frac{5+\sqrt{57}}{4},+\infty\right);$$

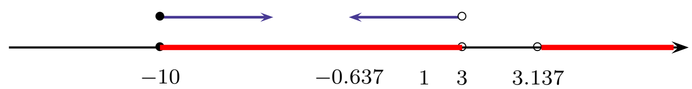
y por fin el $D_{h\circ f}$ es el conjunto de los puntos de $[-10,+\infty)$ que están en

$$\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{57}}{4}\right)\bigcup\left[-\frac{1}{2},3\right]\bigcup\left(\frac{5+\sqrt{57}}{4},+\infty\right)=(-\infty,3)\bigcup\left(\frac{5+\sqrt{57}}{4},+\infty\right);$$

lo que quiere decir

$$[-10,+\infty)\bigcap\left\{(-\infty,3]\bigcup\left(\frac{5+\sqrt{57}}{4},+\infty\right)\right\}=[-10,3]\bigcup\left(\frac{5+\sqrt{57}}{4},+\infty\right).$$

Podemos observar que $\dfrac{5-\sqrt{57}}{4}\approx-0.637$ y que $\dfrac{5+\sqrt{57}}{4}\approx3.137$.
dibujamos la gráfica ahora.



Se calcula entonces

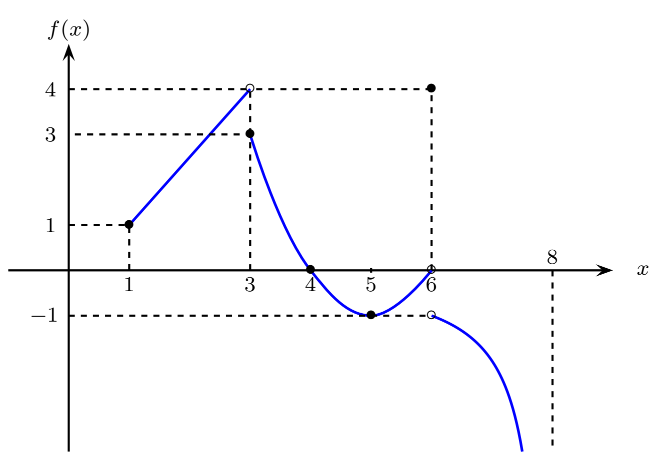
$$(h\circ f)(x)=h[f(x)]=h(2x^2-5x-3)=\begin{cases}-1 & \text{si } 2x^2-5x-3<0\\ 0 & \text{si } 2x^2-5x-3=0\\ 1 & \text{si } 2x^2-5x-3>1\end{cases}$$

lo que convertimos en

$$(h\circ f)(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\in\left(-\dfrac{1}{2},3\right)\\ 0 & \text{si } x=-\dfrac{1}{2}\text{ o bien } x=3\\ 1 & \text{si } x\in\left(-\infty,\dfrac{5-\sqrt{57}}{4}\right)\bigcup\left(\dfrac{5+\sqrt{57}}{4},+\infty\right).\end{cases}$$

□

(4) Considerando que la figura siguiente es un bosquejo de la gráfica de cierta función f, obtenga el dominio, el rango, las raíces así como un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = -3f(x+5)+2$.



▼ $D_f = [1, 8)$, $R_f = (-\infty, 4]$, raíz $x = 4$.

Para graficar $g(x)$ tenemos que trasladar la gráfica de $f(x)$ 5 unidades a la izquierda, "expandirla" 3 unidades, reflejarla con respecto al eje de las x y por último deslizarla hacia arriba 2 unidades.
Como $D_g = [-4, 3)$ e igualmente, como

$$g(-4) = -3 \times f(1) + 2 = -3 \times 1 + 2 = -3 + 2 = -1;$$

$$g(-2) = -3 \times f(3^{\mp}) + 2 = -3 \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases} + 2 = \begin{cases} -12 \\ -9 \end{cases} + 2 = \begin{cases} -10 \\ -7; \end{cases}$$

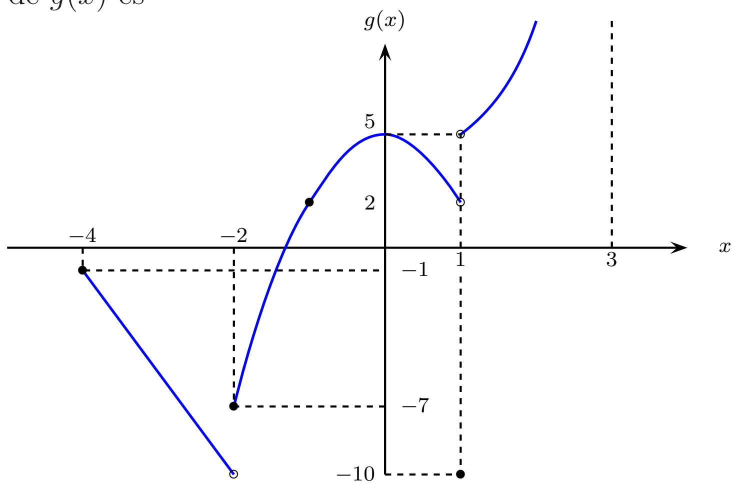
$$g(-1) = -3 \times f(4) + 2 = -3 \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2;$$

$$g(0) = -3 \times f(5) + 2 = -3(-1) + 2 = 3 + 2 = 5;$$

$$g(1) = -3 \times f(6^{\mp}) + 2 = -3 \begin{cases} 0 \\ 4 \\ -1 \end{cases} + 2 = \begin{cases} 0 \\ -12 \\ 3 \end{cases} + 2 = \begin{cases} 2 \\ -10 \\ 5; \end{cases} \quad \text{y como}$$

$$g(3^-) = -3f(8^-) + 2 = -3\text{“}(-\infty)\text{”} + 2 = \text{“}+\infty\text{”} + 2 = \text{“}+\infty\text{”},$$

encontramos que la gráfica de $g(x)$ es



□