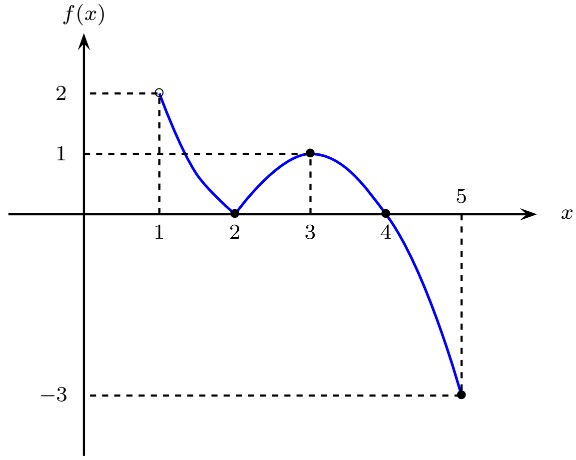
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1600

(1) Si $f(x)$ es una función par cuya gráfica para $x \geq 1$ es la que se indica en la figura



completar la gráfica, indicar su dominio, sus raíces y su contradominio (rango).

(2) Dada la función

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 6}$$

calcular su dominio, sus raíces, la paridad, contradominio (rango) y esbozo de su gráfica.

(3) $|\, 2 - 7x \,| \leq 4 - 3x$.

(4) Sean

$$f(x) = \frac{3}{2x^2 - 8} \quad \& \quad g(x) = \sqrt{9 - 2x}.$$

(a) Indicar dominio, contradominio y raíces de f y de g

(b) Calcular $(f \circ g)(x)$, su dominio, contradominio y raíces

(5) En un bosque, un depredador se alimenta de su presa y para las primeras 15 semanas a partir del fin de la temporada de caza la población de depredadores es una función f de x, donde x es el número de presas en el bosque, la cual a su vez, es una función g de t, donde t es el número de semanas que han pasado desde el fin de la temporada de caza.

Si $f(x) = \dfrac{1}{48}x^2 - 2x + 50 \quad \& \quad g(t) = 4t + 52$, donde $0 \leq t \leq 15$, haga lo siguiente:

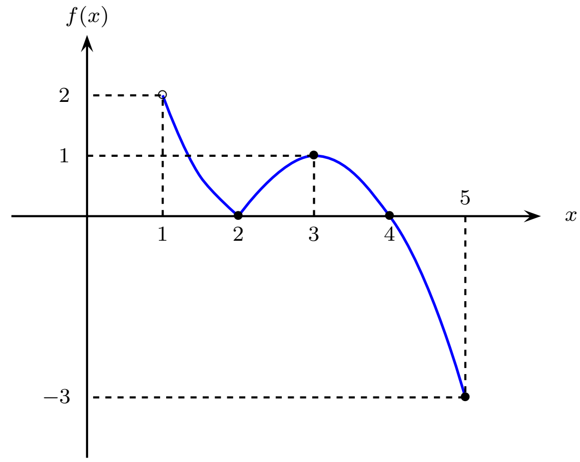
(a) Encuentre un modelo matemático que exprese la población de depredadores, como función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza

(b) Determine la población de depredadores, 11 semanas después del cierre de la temporada de caza

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

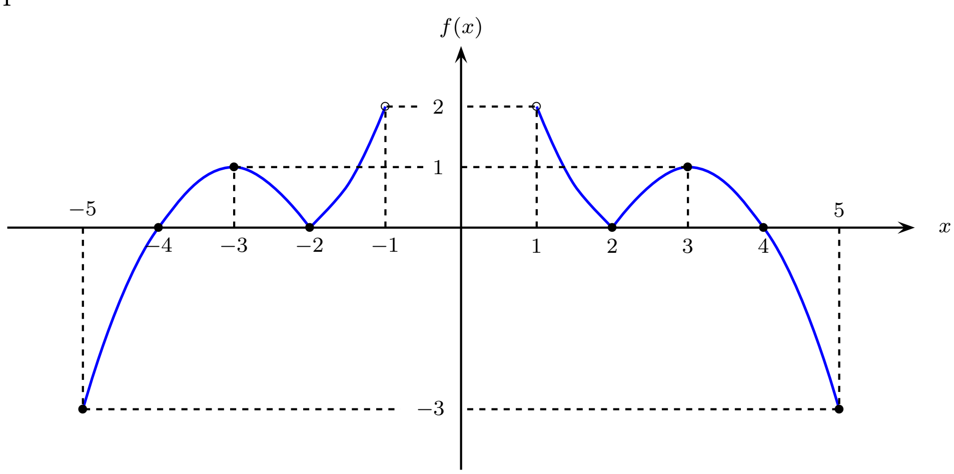
Respuestas

(1) Si $f(x)$ es una función par cuya gráfica para $x \geq 1$ es la que se indica en la figura



completar la gráfica, indicar su dominio, sus raíces y su contradominio (rango).

▼ La gráfica completa es:



$D_f = [-5, -1) \bigcup (1, 5]$.
$R_f = [-3, 2)$.
Raíces $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$ & $x = 4$.

□

(2) Dada la función

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 6}$$

calcular su dominio, sus raíces, la paridad, contradominio (rango) y esbozo de su gráfica.

▼ Las raíces son los puntos $x \in D_f$ tales que $f(x) = 0$; esto es $\sqrt{2x^2 - x - 6} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$, por lo que

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \dfrac{8}{4} \\ -\dfrac{6}{4} \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

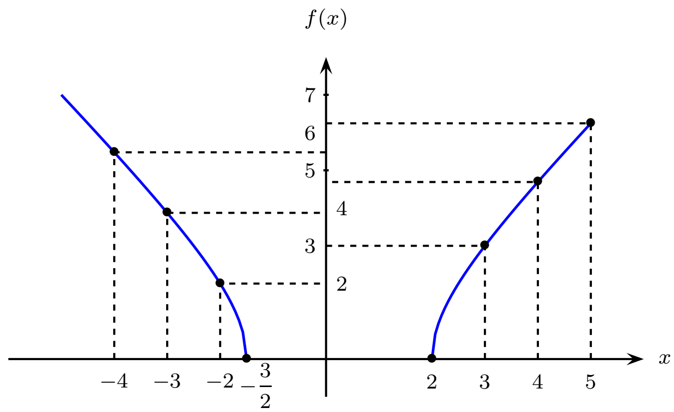
$x = 2$ y $x = -\dfrac{3}{2}$ son las raíces y el $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2x^2 - x - 6 \geq 0 \right\}$;

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = -\dfrac{3}{2}, x = 2 \text{ o bien } 2x^2 - x - 6 > 0 \right\}.$

Como $2x^2 - x - 6 = 2(x-2)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$, se cumplirá la desigualdad $2x^2 - x - 6 > 0$ si

$$\begin{array}{ccc} x - 2 > 0 \;\&\; x + \frac{3}{2} > 0 & \text{o bien} & x - 2 < 0 \;\&\; x + \frac{3}{2} < 0\,; \\ x > 2 \;\&\; x > -\frac{3}{2} & \text{o bien} & x < 2 \;\&\; x < -\frac{3}{2}\,; \\ x \in (2, +\infty) & \text{o bien} & x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)\,; \end{array}$$
$$x \in \left(-\infty, -\tfrac{3}{2}\right) \bigcup (2, +\infty)\,;$$

y por último, $D_f = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \bigcup [2, +\infty)$.
La función $f(x)$ no es par ni impar, de hecho ni siquiera su dominio es simétrico con respecto al origen; por ejemplo $-\frac{3}{2} \in D_f$ pero $\frac{3}{2} \notin D_f$.
$R_f = [0, +\infty)$.

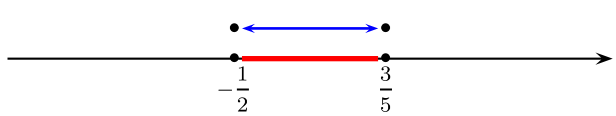


Tenemos que
$f\left(-\frac{3}{2}\right) = f(2) = 0$ así como que $f(-2) = 2$; también que
$f(-3) = \sqrt{15} \approx 3.87$; y además que $f(-4) = \sqrt{30} \approx 5.48$; $f(3) = 3$, $f(4) = \sqrt{22} \approx 4.69$;
$f(5) = \sqrt{39} \approx 6.24$, etcétera.

□

(3) $|\,2 - 7x\,| \le 4 - 3x$.

▼ Esta desigualdad equivale al sistema
$$-(4 - 3x) \le 2 - 7x \le 4 - 3x.$$
La primera desigualdad, $-4 + 3x \le 2 - 7x$, se cumple si
$$7x + 3x \le 2 + 4 \Leftrightarrow 10x \le 6 \Leftrightarrow x \le \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$
La segunda desigualdad, $2 - 7x \le 4 - 3x$, se cumple si $4x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{-2}{4} \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{2}$.
Luego, ambas se cumplen si $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{5}$.
Entonces el conjunto solución es
$$CS = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$$



□

(4) Sean
$$f(x) = \frac{3}{2x^2 - 8} \quad \& \quad g(x) = \sqrt{9 - 2x}.$$

(a) Indicar dominio, contradominio y raíces de f y de g

▼ Vemos que:
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x^2 - 8 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = 4 \right\} = \mathbb{R} - \{ \pm 2 \};$$
$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 9 - 2x \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{9}{2} \geq x \right\} = \left(-\infty, \frac{9}{2} \right].$$

Observemos que $f(x)$ es par, que $f(0) = -\frac{3}{8}$ y que en $[0, 2)$ y en $(2, +\infty)$ $f(x)$ es decreciente; efectivamente
$$0 \leq x_1 < x_2 < 2 \Rightarrow 0 \leq x_1^2 < x_2^2 < 4 \Rightarrow 0 \leq 2x_1^2 < 2x_2^2 < 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -8 \leq 2x_1^2 - 8 < 2x_2^2 - 8 < 0 \Rightarrow \frac{2x_2^2 - 8}{2x_1^2 - 8} < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2x_2^2 - 8} < \frac{1}{2x_1^2 - 8} \Rightarrow f(x_2) = \frac{3}{2x_2^2 - 8} < \frac{3}{2x_1^2 - 8} = f(x_1).$$

Y también que
$$0 < 2 < x_1 < x_2 \Rightarrow 4 < x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow 8 < 2x_1^2 < 2x_2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 < 2x_1^2 - 8 < 2x_2^2 - 8 \Rightarrow \frac{1}{2x_2^2 - 8} < \frac{1}{2x_1^2 - 8} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_2) = \frac{3}{2x_2^2 - 8} < \frac{3}{2x_1^2 - 8} = f(x_1).$$

Por último, para valores de x próximos a 2, $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x + 2)(x - 2)$ está así mismo muy próximo a 0 y

$2x^2 - 8 \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ si $x \begin{cases} < 2 \\ > 2 \end{cases}$ luego, entonces, $f(x)$ se hace tan pequeña o tan grande como se quiera, por lo que:
$$R_f = \left(-\infty, -\frac{3}{8} \right] \bigcup (0, +\infty).$$

Análogamente, $g(x)$ es decreciente pues
$$x_1 < x_2 \leq \frac{9}{2} \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \geq -9 \Rightarrow 9 - 2x_1 > 9 - 2x_2 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(x_1) = \sqrt{9 - 2x_1} > \sqrt{9 - 2x_2} = g(x_2); \text{ también}$$
$$g\left(\frac{9}{2} \right) = 0.$$

Y si x toma valores muy pequeños (negativos), entonces $9 - 2x$ y $\sqrt{9 - 2x} = g(x)$ toma valores muy grandes; luego
$$R_g = [0, +\infty);$$

$f(x)$ no tiene raíces y la única raíz de $g(x)$ es $\frac{9}{2}$.

□

(b) Calcular $(f \circ g)(x)$, su dominio, contradominio y raíces

▼ Calculamos:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{9-2x}) = \frac{3}{2\left(\sqrt{9-2x}\right)^2 - 8} =$$
$$= \frac{3}{18-4x-8} = \frac{3}{10-4x} = \frac{3}{2(5-2x)};$$
$$D_{f\circ g} = \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \,\middle|\, \sqrt{9-2x} \neq \pm 2 \right\} =$$
$$= \left\{ x \leq \frac{9}{2} \,\middle|\, 9-2x \neq 4 \right\} = \left\{ x \leq \frac{9}{2} \,\middle|\, 2x \neq 5 \right\} =$$
$$= \left\{ x \leq \frac{9}{2} \,\middle|\, x \neq \frac{5}{2} \right\} = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] - \left\{ \frac{5}{2} \right\} =$$
$$= \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \bigcup \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right].$$

En $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ y en $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$, $f \circ g$ es creciente, pues

$$x_1 < x_2 < \frac{5}{2} \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 > -5 \Rightarrow 5-2x_1 > 5-2x_2 > 0 \Rightarrow \frac{5-2x_2}{5-2x_1} < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{5-2x_1} < \frac{1}{5-2x_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f \circ g)(x_1) = \frac{3}{2(5-2x_1)} < \frac{3}{2(5-2x_2)} = (f \circ g)(x_2)\,;$$
$$\frac{5}{2} < x_1 < x_2 \leq \frac{9}{2} \Rightarrow -5 > -2x_1 > -2x_2 \geq -9 \Rightarrow 0 > 5-2x_1 > 5-2x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{5-2x_1}{5-2x_2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{5-2x_1} < \frac{1}{5-2x_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f \circ g)(x_1) = \frac{3}{2(5-2x_1)} < \frac{3}{2(5-2x_2)} = (f \circ g)(x_2).$$

Nunca es cero $f \circ g$ pero, si x toma valores muy pequeños (negativos), entonces $5-2x$ toma valores muy grandes y

$(f \circ g)(x) = \dfrac{3}{2(5-2x)}$ está tan cerca de 0 como se quiera.

Para valores de x próximos a $\frac{5}{2}$, $5-2x$ está tan próximo a 0 como queramos,

$5-2x \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ si $x \begin{cases} > \frac{5}{2} \\ < \frac{5}{2} \end{cases}$, luego, $f \circ g$ se hace tan pequeña o tan grande como se desee.

Además $(f \circ g)\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2(5-9)} = \frac{3}{2(-4)} = -\frac{3}{8}$. Y por último:

$$R_{f\circ g} = \left(-\infty, -\frac{3}{8}\right] \bigcup (0, +\infty)\ .$$

$(f \circ g)(x)$ no tiene raíces.

□

(5) En un bosque, un depredador se alimenta de su presa y para las primeras 15 semanas a partir del fin de la temporada de caza la población de depredadores es una función f de x, donde x es el número de presas en el bosque, la cual a su vez, es una función g de t, donde t es el número de semanas que han pasado desde el fin de la temporada de caza.

Si $f(x) = \dfrac{1}{48}x^2 - 2x + 50$ & $g(t) = 4t + 52$, donde $0 \le t \le 15$, haga lo siguiente:

(a) Encuentre un modelo matemático que exprese la población de depredadores, como función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza

▼ Tenemos que:

$$f[x(t)] = f[g(t)] = f(4t+52) = \frac{(4t+52)^2}{48} - 2(4t+52) + 50 =$$
$$= \frac{[4(t+13)]^2}{48} - 8t - 104 + 50 = \frac{t^2+26t+169}{3} - 8t - 54 =$$
$$= \frac{t^2+26t+169-24t-162}{3} = \frac{t^2+2t+7}{3}\,.$$

□

(b) Determine la población de depredadores, 11 semanas después del cierre de la temporada de caza

▼ Valuamos:

$$f[x(11)] = f[g(11)] = \frac{11^2 + 2\times 11 + 7}{3} = \frac{121+22+7}{3} = \frac{150}{3} = 50.$$

□