CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1700

(1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \le x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -2x + 7 & \text{si } 2 < x \le 5. \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de la función
(b) Determine el dominio y el rango de la función; encuentre también sus raíces
(c) A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento
(d) A partir de la gráfica, encuentre los intervalos en donde la función es positiva y negativa

(2) Sean las funciones:

$$f(x) = \sqrt{6 - 3x} \quad \& \quad g(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 3}.$$

Encuentre $g \circ f$ & $f \circ g$. Encuentre los dominios correspondientes.

(3) Un avión vuela a una velocidad de 350 millas/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el instante $t = 0$.
(a) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado como función del tiempo t
(b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar como función de d
(c) Aplique la composición para expresar s como función de t

(4) Una partícula A parte del origen según la ley de movimiento

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t \text{ con } t \ge 0.$$

Otra partícula B parte del origen al mismo tiempo, según la ley de movimiento $y(t) = 3t$.
Determine los intervalos de tiempo en que la distancia al origen de la partícula B es mayor que la de la partícula A.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

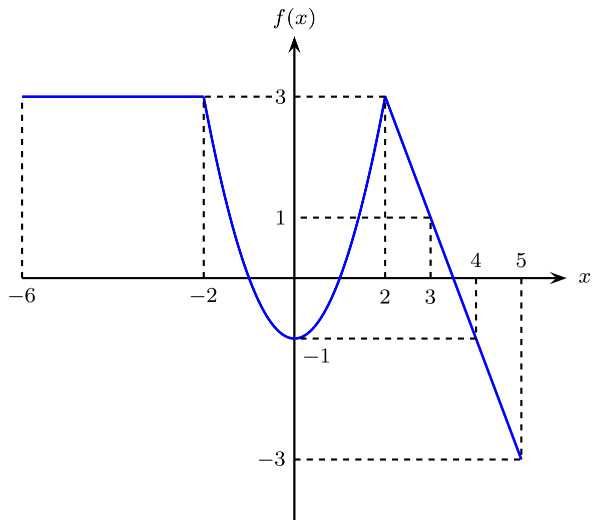
Respuestas

(1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \le x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -2x + 7 & \text{si } 2 < x \le 5. \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de la función

▼ La gráfica es:



□

(b) Determine el dominio y el rango de la función; encuentre también sus raíces

▼ $D_f = [-6, 5]\,, R_f = [-3, 3]$; raíces $x = \pm 1, \frac{7}{2}$.
Este último valor se obtiene al igualar a cero $-2x + 7$, de donde $x = \frac{7}{2} \in (2, 5]$.

□

(c) A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento

▼ $f(x)$ crece en $[0, 2]$ y decrece en $[-2, 0]$ y en $[2, 5]$.

□

(d) A partir de la gráfica, encuentre los intervalos en donde la función es positiva y negativa

▼ La función $f(x) > 0$ si $x \in [-6, -1) \bigcup \left(1, \frac{7}{2}\right)$.
La función $f(x) < 0$ si $x \in (-1, 1) \bigcup \left(\frac{7}{2}, 5\right]$.

□

(2) Sean las funciones:

$$f(x) = \sqrt{6 - 3x} \quad \& \quad g(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 3}.$$

Encuentre $g \circ f$ & $f \circ g$. Encuentre los dominios correspondientes.

▼ Calculamos:

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(\sqrt{6-3x})=\frac{6-3x+7}{6-3x-3}=\frac{-3x+13}{-3x+3};$$

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left(\frac{x^2+7}{x^2-3}\right)=\sqrt{6-\frac{3x^2+21}{x^2-3}}=\sqrt{\frac{3x^2-39}{x^2-3}};$$

$$D_f=(-\infty,2]\,.$$

$$D_g=\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{3}\right\}.$$

$$D_{g\circ f}=\left\{\,x\in D_f\,\middle|\,f(x)\in D_g\,\right\}=\left\{\,x\in(-\infty,2]\,\middle|\,\sqrt{6-3x}\neq\pm\sqrt{3}\,\right\}=$$

$$=\left\{\,x\in(-\infty,2]\,\middle|\,6-3x\neq 3\,\right\}=\left\{\,x\in(-\infty,2]\,\middle|\,x\neq 1\,\right\}=(-\infty,1)\bigcup(1,2]\,;$$

$$D_{f\circ g}=\left\{\,x\in D_g\,\middle|\,g(x)\in D_f\,\right\}=\left\{\,x\neq\pm\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{x^2+7}{x^2-3}\leq 2\,\right\}.$$

Resolvamos pues la siguiente desigualdad: $\dfrac{x^2+7}{x^2-3}\leq 2$;

(a) $x^2-3>0\Leftrightarrow x^2>3\Leftrightarrow|\,x\,|>\sqrt{3}\Leftrightarrow x>\sqrt{3}$ o bien $x<-\sqrt{3}$

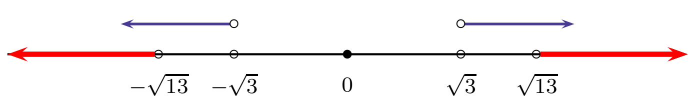
Tenemos que

$$x^2+7\leq 2(x^2-3)\Leftrightarrow x^2+7\leq 2x^2-6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2\geq 13\geq 0\Rightarrow|\,x\,|\geq\sqrt{13}\Rightarrow x>\sqrt{13}\text{ ó }x<-\sqrt{13};$$

entonces,

$$x\in\left(-\infty,-\sqrt{13}\right)\bigcup\left(\sqrt{13},\infty\right).$$

Se dibuja la gráfica correspondiente.



(b) $x^2-3<0\Leftrightarrow x^2<3\Leftrightarrow|\,x\,|<\sqrt{3}\Leftrightarrow-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

Tenemos ahora que

$x^2+7\geq 2x^2-6\Leftrightarrow x^2\leq 13\Leftrightarrow|\,x\,|\leq\sqrt{13}\Leftrightarrow-\sqrt{13}\leq x\leq\sqrt{13}.$

Luego, en resumidas cuentas

$$x\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right).$$

El conjunto solución de $\dfrac{x^2+7}{x^2-3}\leq 2$ es

$$\left(-\infty,-\sqrt{13}\right)\bigcup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\bigcup\left(\sqrt{13},+\infty\right)=\mathbb{R}-\left\{\left[-\sqrt{13},-\sqrt{3}\right]\bigcup\left[\sqrt{3},\sqrt{13}\right]\right\}.$$

Y de aquí que

$$D_{f\circ g}=\left\{x\neq\pm\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{x^2+7}{x^2-3}\leq 2\right\}=\left(-\infty,-\sqrt{13}\right)\bigcup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\bigcup\left(\sqrt{13},+\infty\right).$$

□

(3) Un avión vuela a una velocidad de 350 millas/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el instante $t = 0$.

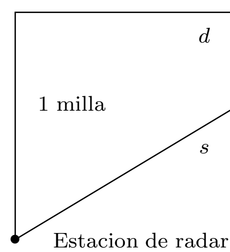
(a) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado como función del tiempo t

▼ $d = 350t$ con t expresado en horas.

□

(b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar como función de d

▼ Usamos la siguiente gráfica:



Vemos entonces que

$$s = \sqrt{1 + d^2}.$$

□

(c) Aplique la composición para expresar s como función de t

▼ $s = f \circ d$ donde $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; así:

$$s(t) = (f \circ d)(t) = f[d(t)] = f(350t) = \sqrt{1 + (350t)^2}.$$

□

(4) Una partícula A parte del origen según la ley de movimiento

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t \text{ con } t \geq 0.$$

Otra partícula B parte del origen al mismo tiempo, según la ley de movimiento $y(t) = 3t$.
Determine los intervalos de tiempo en que la distancia al origen de la partícula B es mayor que la de la partícula A.

▼ Vamos pues a hallar las t tales que

$$3t > t^3 - 12t^2 + 36 \Rightarrow t^3 - 12t^2 - 3t + 36 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^2(t - 12) - 3(t - 12) < 0 \Rightarrow (t - 12)(t^2 - 3) < 0.$$

Entonces

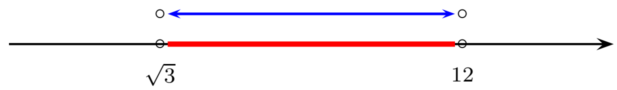
$$t - 12 < 0 \ \& \ t^2 - 3 > 0 \text{ o bien } t - 12 > 0 \ \& \ t^2 - 3 < 0.$$

Es decir, esto va a ocurrir cuando

$$\begin{array}{ccc} t < 12 \ \& \ t^2 > 3 & \text{o bien cuando} & t > 12 \ \& \ t^2 < 3; \\ t < 12 \ \& \ |\,t\,| \geq \sqrt{3} & \text{o bien cuando} & t > 12 \ \& \ |\,t\,| < \sqrt{3}; \\ t < 12 \ \& \ t > \sqrt{3} \text{ o bien } t < -\sqrt{3} & \text{o bien cuando} & t > 12 \ \& \ -\sqrt{3} < t < \sqrt{3}; \\ t \in \left(\sqrt{3}, 12\right) \text{ pues } t \geq 0 & \text{o bien cuando} & t \in \emptyset. \end{array}$$

Luego, la distancia al origen de la partícula B es mayor que la de la partícula A para

$$t \in \left(\sqrt{3}, 12\right)$$



$\square$