CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1800

(1) $2x^2 - 3x < x^2 \le 2x^2 - 4$.

(2) Determine el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{|\,18 - 7x\,| + 3x - 5}.$$

(3) Se desea construir una caja, con base cuadrada y sin tapa de 250 dm^3 de capacidad. El costo de la cara lateral es de 0.35 pesos por dm^2 y el de la base es de 0.40 pesos por dm^2. Determine el costo de la caja como función de la longitud l de un lado de la base.

(4) Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ge 1 \\ 1 - 2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Grafique la función f
(b) Usando la gráfica de f, construir la gráfica de la función $h(x) = 3 - 2f(2x + 1)$

(5) Sean:

$$f(x) = \sqrt{x + 1} \quad \& \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

(a) Obtenga los dominios de f y g
(b) Obtenga fórmulas y dominios de las funciones $f + g$, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $2x^2 - 3x < x^2 \le 2x^2 - 4$.

▼ Tenemos que resolver dos desigualdades

$$2x^2 - 3x < x^2 \quad \& \quad x^2 \le 2x^2 - 4.$$

La primera equivale a

$$x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x-3) < 0.$$

Y esto ocurre si

$$\begin{array}{ccc} x < 0 \ \& \ x - 3 > 0 & \text{o si} & x > 0 \ \& \ x - 3 < 0; \\ x < 0 \ \& \ x > 3 & \text{o si} & x > 0 \ \& \ x < 3; \\ x \in \emptyset & \text{o si} & x \in (0, 3) . \end{array}$$

Luego, la primera desigualdad se cumple si $x \in (0, 3)$.

La segunda, $x^2 \le 2x^2 - 4$, equivale a

$$x^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \ge 0.$$

Y se cumple si:

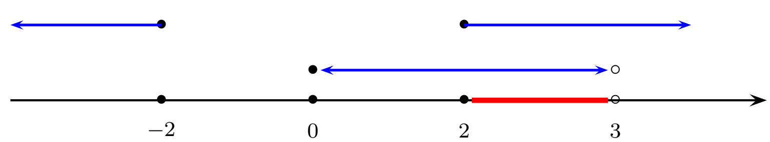
$$\begin{array}{ccc} x + 2 \le 0 \ \& \ x - 2 \le 0 & \text{o si} & x + 2 \ge 0 \ \& \ x - 2 \ge 0; \\ x \le -2 \ \& \ x \le 2 & \text{o si} & x \ge -2 \ \& \ x \ge 2; \\ x \in (-\infty, -2] & \text{o si} & x \in [2, +\infty) . \end{array}$$

Luego esta desigualdad se cumple si $x \in (-\infty, -2] \bigcup [2, +\infty)$.

Y ambas se cumplen si

$$x \in \Big\{ (-\infty, -2] \bigcup [2, +\infty) \Big\} \cap (0, 3) = [2, 3) .$$

Lo cual vemos en la figura siguiente.



Podemos comprobar, por ejemplo, que $x = 2$ satisface a las dos desigualdades pues haciendo $x = 2$ en $2x^2 - 3x < x^2 \le 2x^2 - 4$ tenemos

$$2(2)^2 - 3 \times 2 = 2 \times 4 - 6 = 8 - 6 = 2 < 2^2 = 4 \le 2(2)^2 - 4 = 2 \times 4 - 4 = 8 - 4 = 4;$$

y en cambio $x = 3$ no satisface a la primera pues

$$2(3)^2 - 3 \times 3 = 2 \times 9 - 9 = 18 - 9 = 9 \not< 3^2 = 9.$$

□

(2) Determine el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{|\, 18 - 7x \,| + 3x - 5}.$$

▼ El dominio de $f(x) = \sqrt{|\,18 - 7x\,| + 3x - 5}$ es el subconjunto de los números reales tales que $|\,18 - 7x\,| + 3x - 5 \geq 0$; es decir, aquellos que cumplan que $|\,18 - 7x\,| \geq -(3x - 5) = 5 - 3x$; esto es, los que sí cumplen

$$\begin{array}{lcr} \text{o bien } 18 - 7x \geq 5 - 3x & \text{o bien} & 18 - 7x \leq -(5 - 3x) = 3x - 5; \\ 4x \leq 13 & \text{o bien} & 10x \geq 23; \\ x \leq \dfrac{13}{4} & \text{o bien} & x \geq \dfrac{23}{10}. \end{array}$$

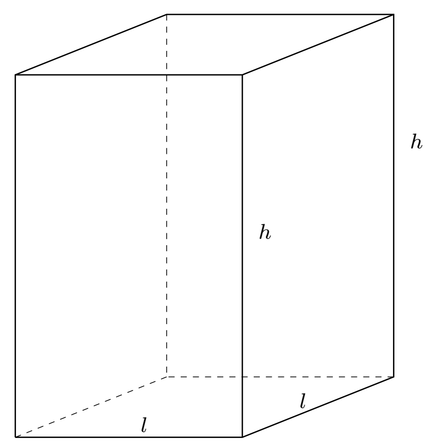
Se concluye que

$$D_f = \left(-\infty, \frac{13}{4}\right] \bigcup \left[\frac{23}{10}, +\infty\right) = \mathbb{R} \text{ pues } \frac{13}{4} > \frac{23}{10}.$$

□

(3) Se desea construir una caja, con base cuadrada y sin tapa de 250 dm^3 de capacidad. El costo de la cara lateral es de 0.35 pesos por dm^2 y el de la base es de 0.40 pesos por dm^2. Determine el costo de la caja como función de la longitud l de un lado de la base.

▼ Dibujemos la caja



El volumen de la caja es

$$V = 250 \text{ dm}^3 = hl^2\,.$$

El área de la base es

$$A = l^2; \text{ por lo tanto, su costo es } 0.40\,l^2.$$

(Observa que todas las longitudes las damos en dm.)

El área lateral de las 4 caras de la caja es $4lh$, y su costo por tanto es $0.35 \times 4lh = 1.40lh$.
De aquí que el costo total será $C = 0.40l^2 + 1.40lh$, expresado en función de l y de h.
Si queremos tenerlo en función únicamente de l, tenemos que expresar h en términos de l, y esto lo podemos hacer a partir de la expresión del volumen $250 = hl^2$, por lo que:

$$h = \frac{250}{l^2};$$

entonces

$$C(l) = 0.40l^2 + 1.40lh = 0.40l^2 + 1.40l\frac{250}{l^2} = 0.40l^2 + \frac{350}{l} \text{ pesos.}$$

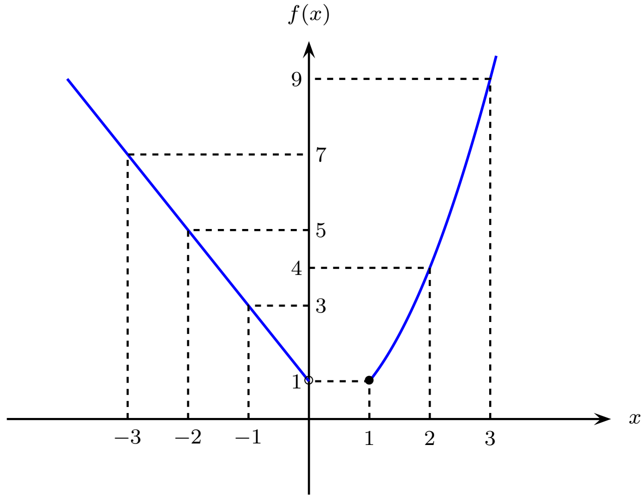
□

(4) Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - 2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Grafique la función f

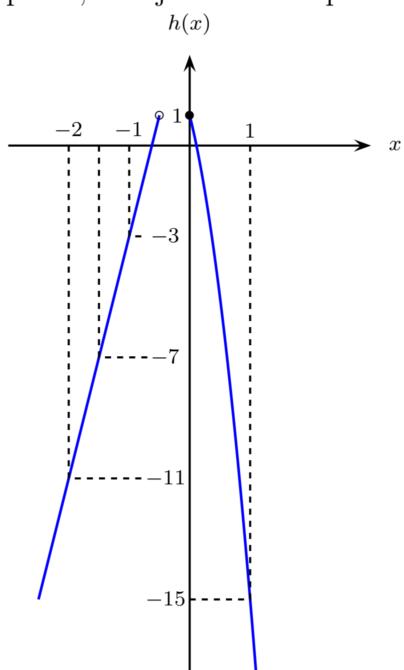
▼ La gráfica es:



□

(b) Usando la gráfica de f, construir la gráfica de la función $h(x) = 3 - 2f(2x + 1)$

▼ Hay que trasladar la gráfica de $f(x)$, $\frac{1}{2}$ unidad hacia la izquierda, comprimirla horizontalmente dos veces, expandirla multiplicando por 2, reflejarla con respecto al eje x y deslizarla hacia arriba 3 unidades.



En efecto, como $f(x)$ varía dependiendo si $x < 0$ o bien si $x \geq 1$, $f(2x + 1)$, cambiará dependiendo si $2x + 1 < 0$ o bien $2x + 1 \geq 1$; esto es, si $x < -\dfrac{1}{2}$ o bien $x \geq 0$.

Observemos que:

(i)

$$x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x < -1 \Rightarrow 2x + 1 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(2x + 1) = 1 - 2(2x + 1) = 1 - 4x - 2 = -1 - 4x\,;$$
$$h(x) = 3 - 2f(2x + 1) = 3 - 2(-1 - 4x) = 3 + 2 + 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = 5 + 8x;$$

(ii)

$$x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow 2x + 1 \geq 1 \Rightarrow f(2x+1) = (2x+1)^2\,;$$
$$h(x) = 3 - 2f(2x+1) = 3 - 2[(2x+1)^2] = 3 - 8x^2 - 8x - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(x) = -8x^2 - 8x + 1\,.$$

Por lo tanto,

$$h(x) = \begin{cases} 5 + 8x & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ -8x^2 - 8x + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

□

(5) Sean:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \& \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

(a) Obtenga los dominios de f y g

▼ Vemos que:

$$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x + 1 \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq -1 \,\right\} = [-1, +\infty)\,; D_g = \mathbb{R}\,.$$

□

(b) Obtenga fórmulas y dominios de las funciones $f+g$, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$

▼ Tenemos:

$$D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = D_f = [-1, +\infty)\,;$$
$$D_{\frac{f}{g}} = \left\{\, D_f \bigcap D_g \,\right\} - \left\{\, x \in D_g \;\middle|\; g(x) = 0 \,\right\} = D_f - \emptyset = D_f = [-1, +\infty)\,;$$
$$D_{f\circ g} = \left\{\, x \in D_g \;\middle|\; g(x) \in D_f \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{x^2+1} \geq -1 \,\right\} = \mathbb{R} \text{ pues } \frac{1}{x^2+1} \geq 0 > -1;$$
$$D_{g\circ f} = \left\{\, x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in D_g \,\right\} = \left\{\, x \in [-1, +\infty) \;\middle|\; \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \,\right\} = [-1, +\infty)\,,$$

pues $x \in [-1, +\infty) \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}\,.$

$$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2+1};$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\dfrac{1}{x^2+1}} = (x^2+1)\sqrt{x+1};$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1} + 1} = \sqrt{\frac{1 + x^2 + 1}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}};$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2 + 1} = \frac{1}{x + 1 + 1} = \frac{1}{x+2}.$$

□