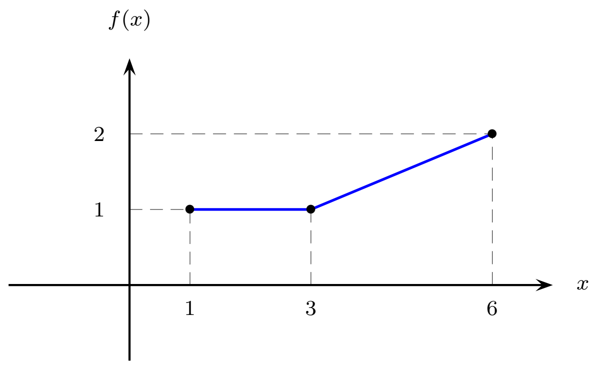
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E1900

(1) Una pista de 400 metros tiene lados paralelos y extremos semicirculares. Encuentre una expresión para el área A encerrada por la pista, en función del diámetro d de los semicírculos.

(2) (a) Encuentre una fórmula para la función f representada por la siguiente gráfica



(b) Elabore la gráfica de la función dada por: $g(x) = 3f(2x-2)+2$

(3) Sean las funciones $f(t) = \sqrt{5-t}$, $g(t) = |\,t^2 - 4\,|$ & $h(t) = t+2$.

(a) Determine $f \circ g$ y su dominio

(b) Determine $f \circ h$ y haga su gráfica

(4) Una máquina está programada para producir placas metálicas rectangulares con longitud (l), una unidad mayor que dos veces su ancho (w). Cuando se introduce el valor de $w = 2$ cm, el diseño de la máquina sólo garantiza que el ancho quedará dentro de una tolerancia de un décimo con respecto a 2. Esto es:

$$2 - 0.1 < w < 2 + 0.1\,.$$

(a) ¿Dentro de qué tolerancia respecto a 5 cm queda la longitud?

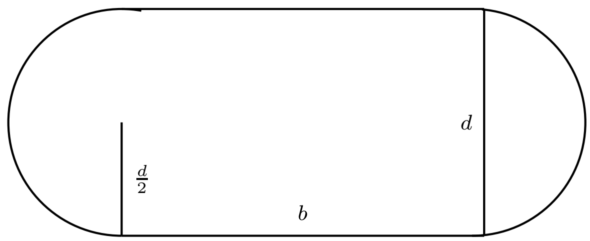
(b) Determine el intervalo de valores del área

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Una pista de 400 metros tiene lados paralelos y extremos semicirculares. Encuentre una expresión para el área A encerrada por la pista, en función del diámetro d de los semicírculos.

▼ Dibujamos la pista.



Vemos que:

$$A = bd + \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = bd + \frac{\pi d^2}{4}.$$

Pero, el perímetro

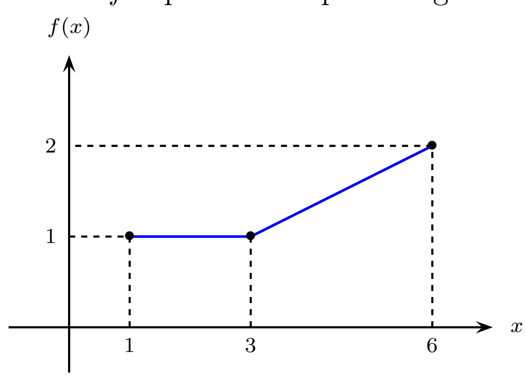
$$P = 2b + \pi d = 400 \text{ por lo que } b = \frac{400 - \pi d}{2}$$

y además,

$$A = \frac{400 - \pi d}{2}d + \frac{\pi d^2}{4} = \frac{800d - \pi d^2}{4} = \frac{d}{4}(800 - \pi d).$$

□

(2) (a) Encuentre una fórmula para la función f representada por la siguiente gráfica



▼ Desde luego $f(x) = 1$ si $x \in [1, 3]$.
Para $x \in [3, 6]$, la gráfica de $f(x)$ es el segmento de recta que pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(6, 2)$, esto es, que tiene de pendiente
$m = \frac{2-1}{6-3} = \frac{1}{3}$ y por ecuación entonces, por pasar por $(3, 1)$ por ejemplo,

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x;$$

(efectivamente su ordenada en el origen es 0), y por último,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1,3] \\ \frac{1}{3}x & \text{si } x \in [3,6]\ . \end{cases} \qquad [\text{Observe que } f(3) = 1]$$

□

(b) Elabore la gráfica de la función dada por: $g(x) = 3f(2x-2)+2$

▼ Calculemos explícitamente $g(x)$.

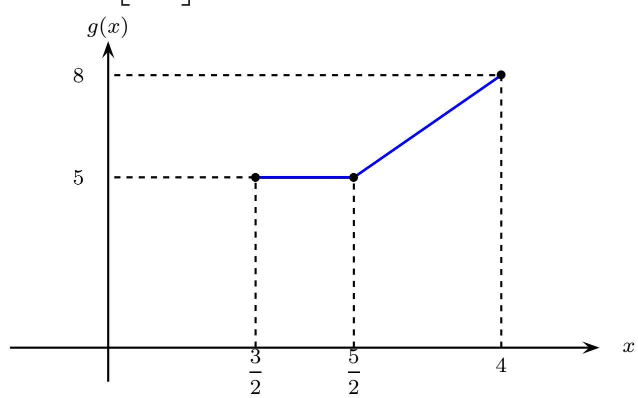
Si $1 \le 2x-2 \le 3 \Rightarrow 3 \le 2x \le 5 \Rightarrow \dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{5}{2}$, entonces

$g(x) = 3f(2x-2)+2 = 3\times 1 + 2 = 3+2 = 5$.

Pero, si $3 \le 2x-2 \le 6 \Rightarrow 5 \le 2x \le 8 \Rightarrow \dfrac{5}{2} \le x \le 4$, entonces

$g(x) = 3f(2x-2)+2 = 3\dfrac{1}{3}(2x-2)+2 = 2x-2+2 = 2x$; luego, tenemos que graficar

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right] \\ 2x & \text{si } x \in \left[\dfrac{5}{2}, 4\right]\ . \end{cases} \qquad \left[\text{Observe que } g\left(\frac{5}{2}\right) = 5\right]$$



□

(3) Sean las funciones f, g & h

$$f(t) = \sqrt{5-t},\ g(t) = \left|\, t^2 - 4 \,\right| \ \&\ h(t) = t+2.$$

(a) Determine $f \circ g$ y su dominio

▼ Vemos que:

$$D_f = (-\infty, 5]\,, D_g = \mathbb{R}\ ;$$
$$D_{f\circ g} = \left\{\, t \in D_g \,\middle|\, g(t) \in D_f \,\right\} = \left\{\, t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|\, t^2 - 4 \,\right| \le 5 \,\right\}.$$

Esta última desigualdad equivale a

$$-5 \le t^2 - 4 \le 5 \Leftrightarrow -1 \le t^2 \le 9.$$

Pero, siempre $t^2 \ge -1$, pues $t^2 \ge 0$ y $0 \ge -1$.

Luego, ambas desigualdades se cumplen si

$$t^2 \le 9 \Leftrightarrow |\,t\,| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le t \le 3 \Leftrightarrow t \in [-3, 3]\,.$$

De aquí se desprende que

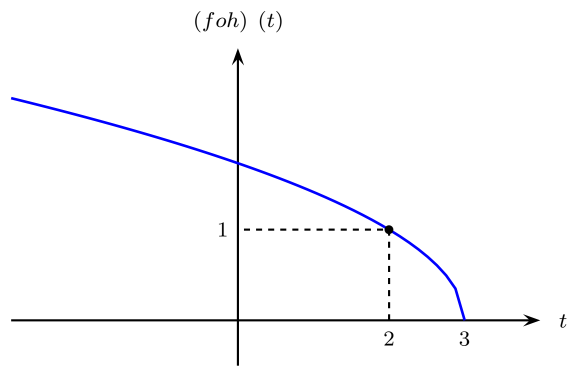
$$D_{f\circ g} = [-3, 3] \ \text{ y } \ (f \circ g)(t) = f[g(t)] = f(\left| t^2 - 4 \right|) = \sqrt{5 - |\, t^2 - 4\,|}\,.$$

□

(b) Determine $f \circ h$ y haga su gráfica

▼ Calculamos:

$$D_h = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f\circ h} = \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; t + 2 \leq 5 \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; t \leq 3 \right\} = (-\infty, 3]\,;$$
$$(f \circ h)(t) = f(t + 2) = \sqrt{5 - t - 2} = \sqrt{3 - t}\,.$$



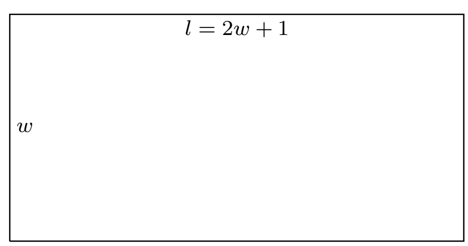
□

(4) Una máquina está programada para producir placas metálicas rectangulares con longitud (l), una unidad mayor que dos veces su ancho (w). Cuando se introduce el valor de $w = 2$ cm, el diseño de la máquina sólo garantiza que el ancho quedará dentro de una tolerancia de un décimo con respecto a 2. Esto es:

(*) $$2 - 0.1 < w < 2 + 0.1$$

(a) ¿Dentro de qué tolerancia respecto a 5 cm queda la longitud?

▼ Primero su dibujo.



Multiplicando por 2 al sistema de desigualdades $(*)$, tenemos

$$4 - 0.2 < 2w < 4 + 0.2\,.$$

Ahora sumando 1

$$5 - 0.2 < 2w + 1 < 5 + 0.2;$$

y como $l = 2w + 1$, tenemos

$$5 - 0.2 < l < 5 + 0.2\,.$$

Constatamos que la longitud queda dentro de una tolerancia de dos décimas con respecto a 5. □

(b) Determine el intervalo de valores del área

▼ El área es $(2w + 1)w$ y como

$$5 - 0.2 < 2w + 1 < 5 + 0.2$$

y además $w > 0$

$$(5 - 0.2)w < (2w + 1)w < (5 + 0.2)w;$$
$$4.8w < (2w + 1)w < 5.2w,$$

de $(*)$ tenemos que

$$1.9 < w < 2.1\,.$$

Luego, multiplicando la primera desigualdad por 4.8 y la segunda por 5.2 obtenemos

$$(1.9)4.8 < 4.8w \;\&\; 5.2w < (2.1)5.2;$$
$$9.12 < 4.8w \;\;\&\; 5.2w < 10.92.$$

Por lo que, en resumidas cuentas tenemos finalmente:

$$9.12 < (2w + 1)w < 10.92.$$

$\square$