CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E0200
08-10-2001, 01-O

(1) La distancia de frenado d (en pies) de un automóvil que viaja a v millas/h se calcula mediante:

$$d = v + \frac{v^2}{20}\,.$$

Encuentre aquellas velocidades que resultan para distancias de frenado no mayores que 75 pies.

(2) Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Expresar el perímetro P del rectángulo como una función de la longitud x de uno de sus lados.

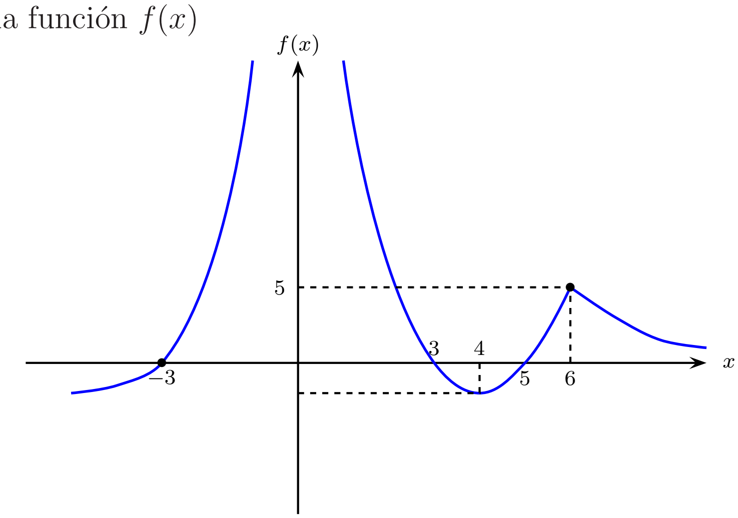
(3) Si $f(x) = \sqrt{9 - x}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$, obtener, reduciendo a su mínima expresión, las funciones $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$.
En cada caso, proporcionar el dominio de la función.

(4) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } 1 \le x \le 3. \end{cases}$$

(a) Determinar dominio, raíces, gráfica e imagen o rango de f
(b) A partir de la gráfica de f, construir la gráfica de $g(x) = |\, f(x)\,|$
(c) Graficar la función $h(x) = -f(x - 1) + 1$

(5) A partir de la gráfica de la función $f(x)$



Determine:
(a) Los intervalos donde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$ así como valores donde $f(x) = 0$
(b) Los intervalos de monotonía de f, es decir, donde es creciente y donde es decreciente

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) La distancia de frenado d (en pies) de un automóvil que viaja a v millas/h se calcula mediante:

$$d = v + \frac{v^2}{20}\,.$$

Encuentre aquellas velocidades que resultan para distancias de frenado no mayores que 75 pies.

▼ Se pide hallar v que cumpla

$$v + \frac{v^2}{20} \leq 75;$$

multiplicando los dos miembros de la desigualdad por 20, para quitar el denominador, nos queda

$$20v + v^2 \leq 20 \times 75\,.$$

Luego tenemos que resolver

$$v^2 + 20v - 1500 \leq 0;$$

y factorizando

$$v^2 + 20v - 1500 = (v - 30)(v + 50).$$

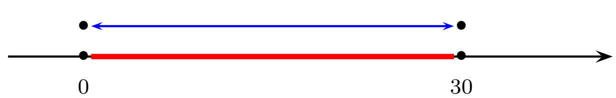
Construyamos la tabla para la desigualdad:

	Signo de		
Intervalo	$v + 50$	$v - 30$	$v^2 + 20v - 1500$
$v < -50\,(< 30)$	$-$	$-$	$+$
$-50 < v < 30$	$+$	$-$	$-$
$v > 30\,(> -50)$	$+$	$+$	$+$

Luego $v^2 + 20v - 1500 \leq 0$ si $v \in [-50, 30]$ y considerando velocidades exclusivamente no negativas, entonces

$$v \in [0, 30]$$

.



□

(2) Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Expresar el perímetro P del rectángulo como una función de la longitud x de uno de sus lados.

▼ Si x y y son las longitudes de los lados del rectángulo, entonces el perímetro es

$$P = 2(x + y);$$

pero como el área

$$A = x \times y = 16$$

obtenemos

$$y = \frac{16}{x}$$

y sustituyendo tenemos

$$P(x) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) \Rightarrow P(x) = 2 \times \frac{x^2+16}{x}.$$

$\square$

(3) Si $f(x) = \sqrt{9-x}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2-3}$, obtener, reduciendo a su mínima expresión, las funciones $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$.

En cada caso, proporcionar el dominio de la función.

▼ Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x^2-3}\right) = \sqrt{9 - \frac{1}{x^2-3}} = \sqrt{\frac{9x^2-27-1}{x^2-3}} = \sqrt{\frac{9x^2-28}{x^2-3}}\,;$$

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{9-x}) = \frac{1}{(\sqrt{9-x})^2 - 3} = \frac{1}{9-x-3} = \frac{1}{6-x}\,.$$

Ahora tenemos

$$D_{f\circ g} = \left\{\, x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \,\right\}$$

y de inmediato

$$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 9 - x \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq 9 \,\right\} = (-\infty, 9]\,;$$

también

$$D_g = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 3 \neq 0 \,\right\};$$

y como

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

tenemos

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{\, -\sqrt{3}, \sqrt{3} \,\right\}$$

y

$$D_{f\circ g} = \left\{\, x \in \mathbb{R} - \left\{\, -\sqrt{3}, \sqrt{3} \,\right\} \mid \frac{1}{x^2-3} \leq 9 \,\right\}.$$

Resolvamos pues la desigualdad

$$\frac{1}{x^2-3} \leq 9.$$

Supongamos que $x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 3 \Rightarrow |\,x\,| > \sqrt{3} \Rightarrow x > \sqrt{3}$ o bien que $x < -\sqrt{3}$.

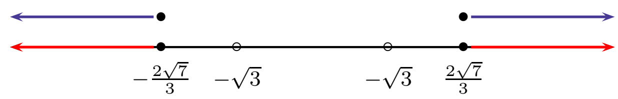
Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $x^2 - 3$, tenemos

$$1 \leq 9(x^2-3) \Rightarrow 1 \leq 9x^2 - 27 \Rightarrow 9x^2 \geq 27 + 1 \Rightarrow 9x^2 \geq 28 \Rightarrow x^2 \geq \frac{28}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\,x\,| \geq \sqrt{\frac{28}{9}} \Rightarrow |\,x\,| \geq \frac{\sqrt{28}}{3} \Rightarrow x \geq \frac{\sqrt{28}}{3} \text{ ó } x \leq -\frac{\sqrt{28}}{3}$$

pero como $\dfrac{\sqrt{28}}{3} > \sqrt{3}$ ya que $28 > 9 \times 3 = 27$ y simétricamente $-\dfrac{\sqrt{28}}{3} < -\sqrt{3}$, tenemos que la desigualdad se cumple si

$$x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{28}}{3}\right] \bigcup \left[\frac{\sqrt{28}}{3}, +\infty\right) = \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{7}}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$$



Suponiendo ahora que $x^2 - 3 < 0 \Rightarrow x^2 < 3 \Rightarrow |\, x\, | < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
y multiplicando a ambos miembros de la desigualdad $\dfrac{1}{x^2-3} \le 9$ por $x^2 - 3$,
tenemos

$$1 \ge 9(x^2 - 3) \Rightarrow 1 \ge 9x^2 - 27 \Rightarrow 9x^2 \le 27 + 1 \Rightarrow 9x^2 \le 28 \Rightarrow |\, 3x\, | \le \sqrt{28} \Rightarrow$$

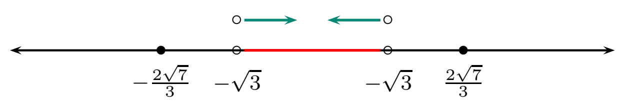
$$\Rightarrow |\, 3\, |\, |\, x\, | \le \sqrt{28} \Rightarrow 3\, |\, x\, | \le \sqrt{28} \Rightarrow |\, x\, | \le \frac{\sqrt{28}}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{28}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{28}}{3};$$

pero como

$$(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \subseteq \left(-2\frac{\sqrt{7}}{3}, 2\frac{\sqrt{7}}{3} \right)$$

en definitiva la desigualdad se cumple si

$$x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$



Y, por último, en cualquier caso la desigualdad $\dfrac{1}{x^2-3} \le 9$ se cumple si

$$x \in \left(-\infty, \frac{\sqrt{28}}{3} \right] \bigcup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \bigcup \left[\frac{\sqrt{28}}{3}, +\infty \right).$$

De aquí concluimos que

$$D_{f\circ g} = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{28}}{3} \right] \bigcup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \bigcup \left[\frac{\sqrt{28}}{3}, +\infty \right).$$

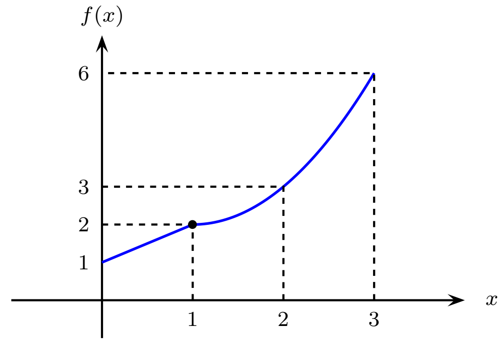
$\square$

(4) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } 1 \le x \le 3. \end{cases}$$

(a) Determinar dominio, raíces, gráfica e imagen o rango de f
▼ $D_f = [0, 3]$.

Raíces de $f = \emptyset$.
La gráfica de $f(x)$:



Rango: $R_f = [1, 6]$.

$\square$

(b) A partir de la gráfica de f, construir la gráfica de $g(x) = |\, f(x) \,|$

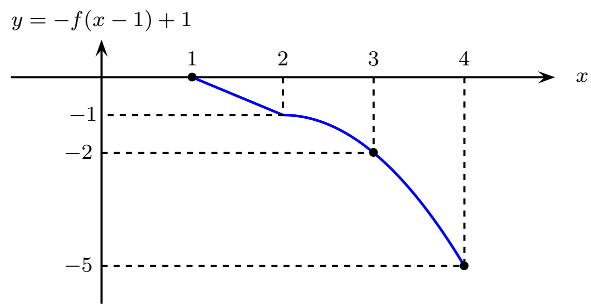
▼ $f(x) = |\, f(x) \,|$ pues $f(x) \geq 0$, luego $f(x) = g(x)$.

$\square$

(c) Graficar la función $h(x) = -f(x-1) + 1$

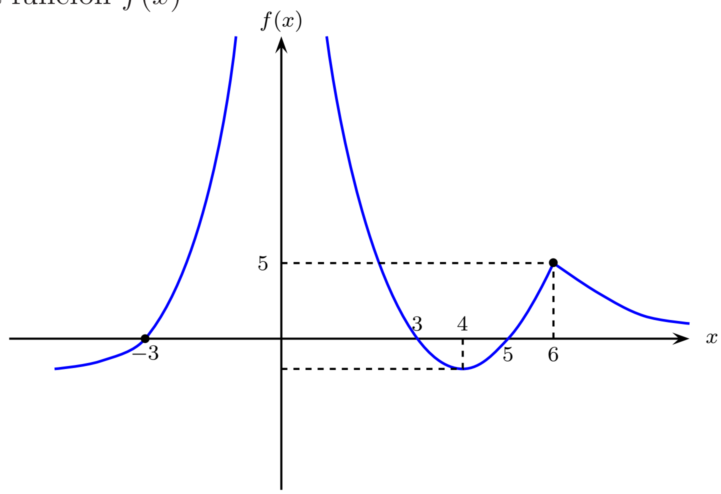
▼ Para obtener la gráfica de h: la curva $y = f(x)$ se traslada 1 unidad a la derecha, luego se refleja en el eje x y finalmente se desplaza 1 unidad hacia arriba.

La gráfica de $h(x)$ es:



$\square$

(5) A partir de la gráfica de la función $f(x)$



determine:

(a) Los intervalos donde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$ así como los valores donde $f(x) = 0$

▼ $f(x) > 0$ en $(-3, 0) \bigcup (0, 3) \bigcup (5, +\infty)$.

$f(x) < 0$ en $(-\infty, -3) \bigcup (3, 5)$.

$f(x) = 0$ en $x = -3$, $x = 3$ y $x = 5$.

□

(b) Los intervalos de monotonía de f, es decir, dónde es creciente y dónde es decreciente

▼ $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \bigcup (4, 6)$.

$f(x)$ es decreciente en $(0, 4) \bigcup (6, +\infty)$.

□