CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E2100

(1) Se lanza una piedra hacia arriba, desde la orilla de la azotea de un edificio de 128 pies de alto. La altura de la piedra con respecto al suelo, está dada por:

$$h(t) = -16t^2 + 32t + 128$$

en el instante t, medido en segundos. ¿Durante qué intervalo de tiempo la piedra estará entre 32 pies y el suelo?

(2) Una ventana inglesa tiene la forma de rectángulo coronado con un triángulo equilátero, como se muestra en la figura. Si el perímetro de la ventana es de 30 m, exprese el área de la ventana en función de su ancho.

(3) Si

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \le x < -4 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } -4 \le x \le 0 \\ 2x - 3 & \text{si } \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

encontrar:

(a) Un esbozo gráfico de la función

(b) Dominio, rango, raíces, paridad, monotonía e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$

(c) Un esbozo gráfico para la función $g(x) = -f(x-1) + 2$

(4) Si

$$f(x) = \sqrt{5 - |\, 2 - 3x \,|}, \quad g(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 1} \quad \& \; h(x) = \sqrt{5 - 2x}$$

determinar:

(a) El dominio de $f(x)$, $g(x)$ y el de $h(x)$

(b) $(f + g)(x)$ y su dominio

(c) $(g \circ h)(x)$ y su dominio

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Se lanza una piedra hacia arriba, desde la orilla de la azotea de un edificio de 128 pies de alto. La altura de la piedra con respecto al suelo, está dada por:

$$h(t) = -16t^2 + 32t + 128$$

en el instante t, medido en segundos. ¿Durante qué intervalo de tiempo la piedra estará entre 32 pies y el suelo?

▼ Resolver el problema es equivalente a resolver las desigualdades:

$$0 \le h(t) \le 32.$$

Sustituyendo, tendremos

$$0 \le -16t^2 + 32t + 128 \le 32.$$

Resolvemos por separado las desigualdades e intersecamos las soluciones:

(a) $0 \le -16t^2 + 32t + 128$.

Multiplicamos por $-\frac{1}{16}$, con lo que cambia de sentido la desigualdad:

$$0 \ge t^2 - 2t - 8.$$

Se calcula ahora fácilmente $t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2)$.
Para conocer dónde la cuadrática es negativa, usamos la tabla

	Signo de		
Intervalo	$t+2$	$t-4$	$(t+2)(t-4)$
$t < -2 (< 4)$	$-$	$-$	$+$
$-2 < t < 4$	$+$	$-$	$-$
$t > 4 (> -2)$	$+$	$+$	$+$

La solución es

$$x \in [-2, 4]\,.$$

Pero $t \ge 0$, por lo tanto

$$x \in [0, 4]\,.$$

(b) $-16t^2 + 32t + 128 \le 32$.

Tenemos que

$$-16t^2 + 32t + 128 - 32 \le 0 \Rightarrow -16t^2 + 32t + 96 \le 0.$$

Multiplicamos la útima desigualdad por $-\frac{1}{16}$ y cambia de sentido la desigualdad

$$t^2 - 2t - 6 \ge 0.$$

Calculamos los ceros o raíces de la cuadrática

$$t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} \approx$$
$$\approx \frac{2 \pm 5.2215}{2} \approx \begin{cases} 3.64575 \\ -1.64575\,. \end{cases}$$

Para conocer dónde la cuadrática es positiva, usamos la tabla

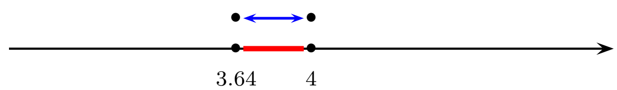
	Signo de		
Intervalo	$t + 1.64$	$t - 3.64$	$(t + 1.64)(t - 3.64)$
$t < -1.64 (< 3.64)$	$-$	$-$	$+$
$-1.64 < t < 3.64$	$+$	$-$	$-$
$t > 3.64 (> -1.64)$	$+$	$+$	$+$

Sólo consideramos la parte positiva; la solución es entonces

$$x \in [3.64, +\infty).$$

La solución final es la intersección de las soluciones anteriores, es decir,

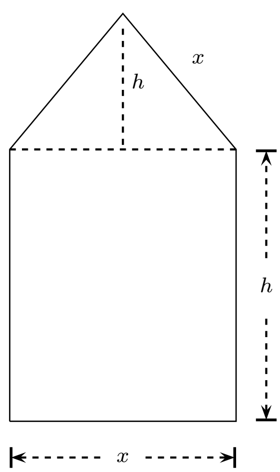
$$t \in [0, 4] \bigcap [3.64, +\infty) = [3.64, 4]$$



□

(2) Una ventana inglesa tiene la forma de rectángulo coronado con un triángulo equilátero, como se muestra en la figura. Si el perímetro de la ventana es de 30 m, exprese el área de la ventana en función de su ancho.

▼ Usamos la siguiente gráfica:



Calculamos el perímetro e igualamos con la restricción dada

$$P = 3x + 2h = 30. \qquad (a)$$

El área total consta de dos partes:

(i) El área del rectángulo

$$A_R = xh.$$

(ii) El área del triángulo superior

Para calcular este área usamos el teorema de Pitágoras para conocer la altura $\overline{h}$:

$$(\overline{h})^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow (\overline{h})^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow \overline{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

El área del triángulo es entonces:

$$A_T = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

El área total es:

$$A = A_R + A_T = xh + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2. \qquad (b)$$

Despejamos de (a) la variable h y obtenemos:

$$h = 15 - \frac{3}{2}x.$$

Sustituimos este valor en (b):

$$A = x(15 - \frac{3}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 15x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 15x + \frac{-6+\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Es ésta la función solicitada.

□

(3) Si

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \leq x < -4 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } -4 \leq x \leq 0 \\ 2x - 3 & \text{si } \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

encontrar:

(a) Un esbozo gráfico de la función

▼ La función consta de tres pedazos:

(i) En $[-6, -4)$, es un segmento de recta paralelo al eje x de altura 3.

(ii) En $[-4, 0]$, es una parábola abierta hacia arriba. Para obtener mayor información, completamos el cuadrado:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = x^2 + 2x + 1 - 4 = (x+1)^2 - 4\,.$$

De aquí vemos que es una parábola cuyo vértice es $(-1, -4)$ y que se obtiene de la canónica x^2 desplazándola a la izquierda 1 unidad y hacia abajo 4 unidades.

Otra información útil son los ceros de la cuadrática:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1\,. \end{cases}$$

Desechamos 1, ya que no se encuentra dentro del intervalo considerado.

Vamos a evaluar la función en los extremos del intervalo:

x	$x^2 + 2x - 3$
-4	$16 - 8 - 3 = 5$
0	-3

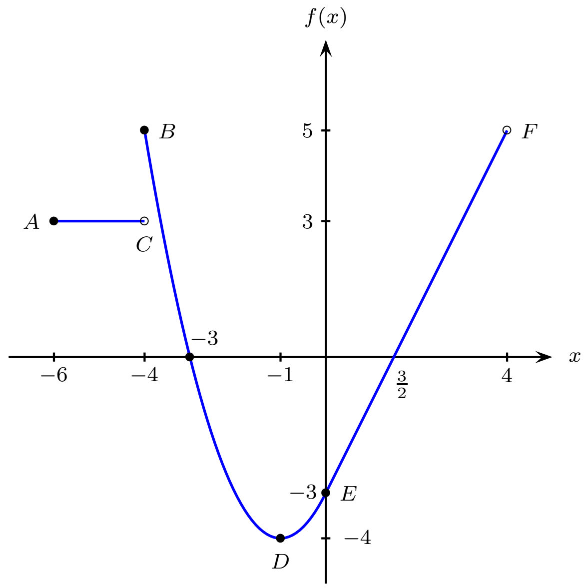
(iii) En $(0, -4)$, es un segmento de recta de pendiente 2 y ordenada en el origen -3.

Esta recta tiene como raíz: $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} = 1.5$, la cual se encuentra dentro del intervalo.

Vamos a evaluar la recta en los extremos del intervalo:

x	$2x - 3$
0	-3
4	5

Con la información anterior, hacemos el esbozo de la gráfica:



$\square$

(b) Dominio, rango, raíces, paridad, monotonía e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$

▼ Dominio: $D_f = [-6, 4)$.
Rango: $R_f = [-4, 5]$.
Raíces: $x = -3, x = 1.5$.
No es par ni impar.
La función decrece si $x \in [-4, -1]$.
La función crece si $x \in [-1, 4)$.
La función es positiva $f(x) > 0$ si $x \in (-6, -3) \bigcup (1.5, 4)$.
La función es negativa $f(x) < 0$ si $x \in (-3, 1.5)$.

$\square$

(c) Un esbozo gráfico para la función $g(x) = -f(x - 1) + 2$

▼ Cada valor de la nueva gráfica se obtiene de la anterior desplazándola 1 unidad a la derecha, reflejándola con respecto al eje x y subiéndola 2 unidades.

Vamos a obtener los valores de los puntos elegidos:

$$A(-6, 3) \to (-5, 3) \to (-5, -3) \to A'(-5, -1);$$
$$B(-4, 5) \to (-3, 5) \to (-3, -5) \to B'(-3, -3);$$
$$C(-4, 3) \to (-3, 3) \to (-3, -3) \to C'(-3, -1);$$
$$D(-1, -4) \to (0, -4) \to (0, 4) \to D'(0, 6);$$
$$E(0, -3) \to (1, -3) \to (1, 3) \to E'(1, 5);$$

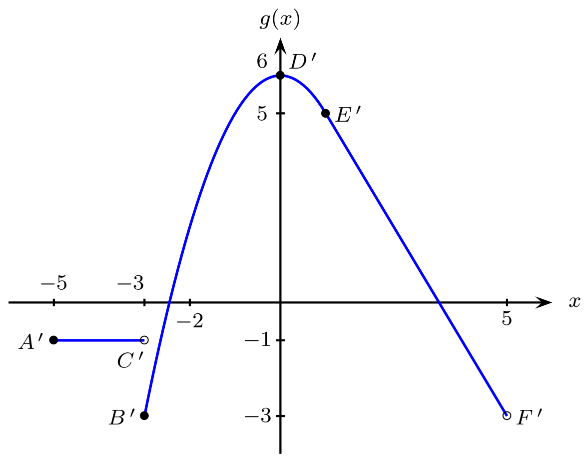
$$F(4,5) \to (5,5) \to (5,-5) \to F'(5,-3).$$

Que conste que esto lo podemos comprobar calculando directamente $D_g = [-5, 5)$ y; entonces,

$$\begin{aligned}
g(-5) &= -f(-5-1)+2 = -f(-6)+2 = -3+2 = -1;\\
g(-3^-) &= -f(-3^- - 1)+2 = -f(-4^-)+2 = -3+2 = -1;\\
g(-3) &= -f(-3-1)+2 = -f(-4)+2 = -5+2 = -3;\\
g(0) &= -f(0-1)+2 = -f(-1)+2 = -f(-4)+2 = 4+2 = 6;\\
g(1) &= -f(1-1)+2 = -f(0)+2 = -(-3)+2 = 3+2 = 5;\\
g(5^-) &= -f(5^- - 1)+2 = -f(4^-)+2 = -5+2 = -3;
\end{aligned}$$

por lo que los puntos $(-5,-1)$, $(-3^-,-1)$, $(0,6)$, $(1,5)$, $(5^-,-3) \in f_g$ de hecho son respectivamente A', C', B', D', E', F'.

Con la información anterior, hacemos el esbozo de la gráfica



□

(4) Si

$$f(x) = \sqrt{5 - |\,2-3x\,|}, \quad g(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1} \quad \& \; h(x) = \sqrt{5-2x}$$

determinar:

(a) El dominio de $f(x)$, $g(x)$ y el de $h(x)$

▼ Dominio de $f(x)$:

Para que la raíz esté definida se debe cumplir

$$5 - |\,2-3x\,| \ge 0 \Leftrightarrow 5 \ge |\,2-3x\,| \Leftrightarrow -5 \le 2-3x \le 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -7 \le -3x \le 3 \Leftrightarrow \frac{7}{3} \ge x \ge -1.$$

Así

$$D_f = \left[-1, \frac{7}{3}\right].$$

Dominio de $g(x)$:

La función no está definida en los ceros del denominador

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ x = 1.$$

Así
$$D_g = \mathbb{R} - \{ -1, 1 \} \; .$$
Dominio de $h(x)$:
Para que la raíz esté definida se debe cumplir
$$5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} \, .$$
Así
$$D_h = \left(-\infty, \frac{5}{2} \right] \; .$$
□

(b) $(f + g)(x)$ y su dominio
▼ Calculamos:
$$(f + g)(x) = \sqrt{5 + |\, 2 - 3x \,|} + \frac{x^2 + 4}{x^2 - 1} \, .$$
Además
$$D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = \left[-1, \frac{7}{3} \right] \bigcap \{ \, \mathbb{R} - \{ -1, 1 \} \, \} = \left(-1, \frac{7}{3} \right] - \{1\}.$$
□

(c) $(g \circ h)(x)$ y su dominio
▼ Tenemos que:
$$(g \circ h)(x) = g\,[h(x)] = g\left(\sqrt{5 - 2x}\right) = \frac{\left(\sqrt{5 - 2x}\right)^2 + 4}{\left(\sqrt{5 - 2x}\right)^2 - 1} = \frac{-2x + 9}{-2x + 4} \, .$$
Para calcular $D_{g \circ h}$ se requieren las condiciones:

(i) $x \in D_h \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{2} \right]$;

(ii) $h(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{5 - 2x} \in \mathbb{R} - \{ -1, 1 \}$;

$\sqrt{5 - 2x}$ es positivo, no puede ser igual a -1
$$\sqrt{5 - 2x} = 1 \Rightarrow 5 - 2x = 1 \Rightarrow x = 2.$$
Con esto obtenemos
$$D_{g \circ h} = \left(-\infty, \frac{5}{2} \right] - \{ 2 \} \, .$$
□