CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E2300

(1) Un clavadista se lanza desde un trampolín de 32 pies de altura y su posición en cualquier instante (segundo) $t \geq 0$ está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 16t + 32 \text{ pies}\,.$$

(a) ¿En qué instante llega al agua?
(b) ¿Durante qué intervalo de tiempo estará el clavadista al menos a 32 pies de la superficie del agua?

(2) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x - 11}$ y $g(x) = |\,3x - 1\,|$.
Obtener:
(a) $(g + f)(x)$ y el dominio de $g + f$
(b) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$
(c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$ y el dominio de $\dfrac{g}{f}$

(3) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3x - 5 & \text{si } 1 < x < 3. \end{cases}$$

(a) Bosquejar su gráfica y determinar su dominio, rango y raíces
(b) Obtener los intervalos donde $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, f es creciente y f es decreciente
(c) A partir de la gráfica de f, bosquejar la gráfica de $g(x) = 2 - f(x - 1)$

(4) Se va a fabricar una caja con base y tapa cuadradas que tenga un volumen de 2 m^3. El costo de fabricación para la base y la tapa es de \$300.00 por m^2 y para las caras laterales es de \$200.00 por m^2. Obtener el costo de fabricación de la caja, en función de la longitud x del lado de la base cuadrada.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Un clavadista se lanza desde un trampolín de 32 pies de altura y su posición en cualquier instante (segundo) $t \geq 0$ está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 16t + 32 \text{ pies}.$$

(a) ¿En qué instante llega al agua?

▼ Llegará cuando

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -16t^2 + 16t + 32 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t - 2 = 0 \text{ o bien } t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ o bien } t = -1.$$

Podemos ignorar este último resultado por considerar que pertenece al pasado, luego llega al agua a los dos segundos de lanzarse.

□

(b) ¿Durante qué intervalo de tiempo estará el clavadista al menos a 32 pies de la superficie del agua?

▼ Debemos hallar t de forma que

$$-16t^2 + 16t + 32 \geq 32 \Leftrightarrow -16t(t-1) \geq 0 \Leftrightarrow t(t-1) \leq 0.$$

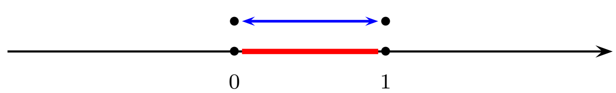
Para $t = 0$ y para $t = 1$ la desigualdad se cumple.
Además

$$0 < t < 1 \Rightarrow t > 0 \,\&\, t - 1 < 0 \Rightarrow t(t-1) < 0.$$

Luego, también se cumple la desigualdad. En cambio si

$$t > 1 (> 0) \Rightarrow t > 0 \,\&\, t - 1 > 0 \Rightarrow t(t-1) > 0\,;$$

constatamos así que en el intervalo $[0, 1]$ el clavadista no está debajo del trampolín.



□

(2) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x - 11}$ y $g(x) = |\,3x - 1\,|$.
Obtener:

(a) $(g + f)(x)$ y el dominio de $g + f$

▼ Caculamos:

$$(g + f)(x) = g(x) + f(x) = |\,3x - 1\,| + \sqrt{x - 11}\,;$$
$$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x - 11 \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq 11 \,\right\} = [11, +\infty)\,;$$
$$D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = D_f \text{ pues } D_f \subseteq D_g\,;$$

□

(b) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$

▼ Tenemos también:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(|\,3x - 1\,|) = \sqrt{|\,3x - 1\,| - 11}\,;$$
$$D_{f \circ g} = \left\{\, x \in D_g \;\middle|\; g(x) \in D_f \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; g(x) \geq 11 \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\,3x - 1\,| \geq 11 \,\right\}\,;$$

esta última desigualdad equivale a las dos desigualdades

$$\begin{array}{ccc}
3x-1\geq 11 & \text{o bien} & 3x-1\leq -11\\
3x\geq 12 & \text{o bien} & 3x\leq -10\\
x\geq \dfrac{12}{3} & \text{o bien} & x\leq -\dfrac{10}{3}\\
x\geq 4 & \text{o bien} & x\in\left(-\infty,-\dfrac{10}{3}\right]\\
x\in[4,+\infty)\,; & &
\end{array}$$

entonces $D_{f\circ g}=\left(-\infty,-\dfrac{10}{3}\right]\bigcup[4,+\infty)$.

Podemos constatar, por ejemplo, que $-\dfrac{10}{3}\;\&\;4\in D_{f\circ g}$; de hecho

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)\left(-\frac{10}{3}\right)&=\sqrt{\left|3\left(-\frac{10}{3}\right)-1\right|-11}=\sqrt{|-10-1|-11}=\\&=\sqrt{|-11|-11}=\sqrt{11-11}=\sqrt{0}=0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)(4)&=\sqrt{|3\times 4-1|-11}=\sqrt{|12-1|-11}=\sqrt{|11|-11}=\\&=\sqrt{11-11}=\sqrt{0}=0.\end{aligned}$$

□

(c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$ y el dominio de $\dfrac{g}{f}$

▼ Ahora:

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x)&=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{|3x-1|}{\sqrt{x-11}};\\
D_{\frac{g}{f}}&=(D_g\bigcap D_f)-\left\{x\in D_f\;\middle|\;f(x)=0\right\}=\\
&=[\mathbb{R}\bigcap[11,+\infty)]-\left\{x\in[11,+\infty)\;\middle|\;\sqrt{x-11}=0\right\}=\\
&=[11,+\infty)-\left\{x\in[11,+\infty)\;\middle|\;x-11=0\right\}=\\
&=[11,+\infty)-\left\{x\in[11,+\infty)\;\middle|\;x=11\right\}=[11,+\infty)-\{11\}=(11,+\infty)\,.\end{aligned}$$

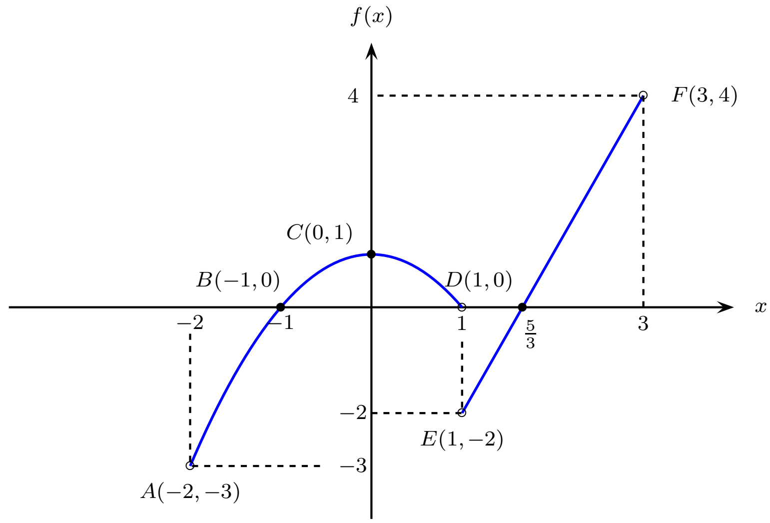
□

(3) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } -2\leq x<1\\ 3x-5 & \text{si } 1<x<3.\end{cases}$$

(a) Bosquejar su gráfica y determinar su dominio, rango y raíces

▼ La gráfica es:



$D_f = [-2, 1) \bigcup (1, 3)$.
$R_f = [-3, 4)$.
Raíces

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |\,x\,| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1\,.$$

Pero, como $1 \notin [-2, 1)$, que es donde $f(x) = 1 - x^2$, $x = 1$ no es raíz:

$$3x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \in (1, 3)\ .$$

Luego, $f(x)$ tiene dos raíces: $x = -1$ & $x = \dfrac{5}{3}$.

□

(b) Obtener los intervalos donde $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, f es creciente y f es decreciente

▼ $f(x) > 0$ si $x \in (-1, 1) \bigcup \left(\dfrac{5}{3}, 3\right)$;

$f(x) < 0$ si $x \in (-2, -1) \bigcup \left(1, \dfrac{5}{3}\right)$;

$f(x)$ es creciente en $[-2, 0]$ y en $(1, 3)$;

$f(x)$ es decreciente en $[0, 1)$.

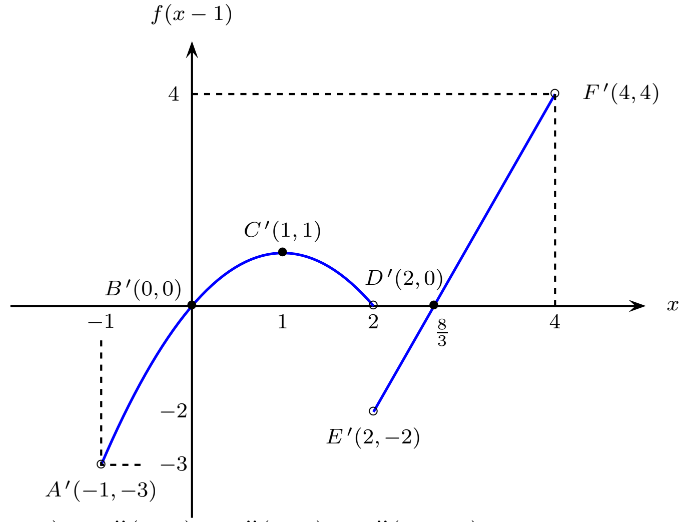
□

(c) A partir de la gráfica de f, bosquejar la gráfica de $g(x) = 2 - f(x - 1)$

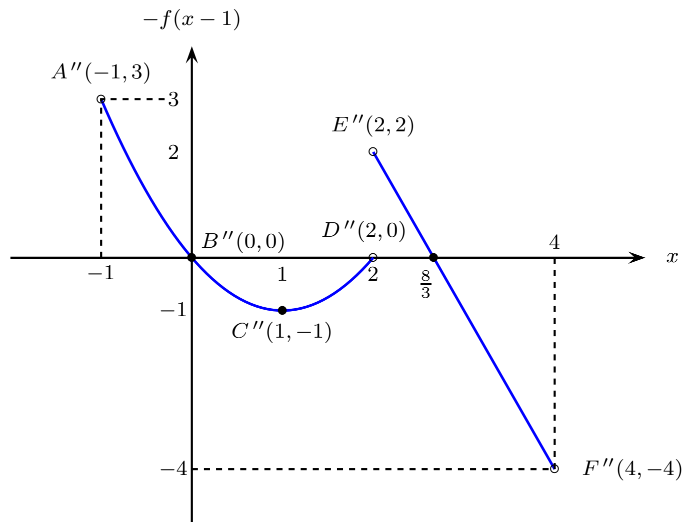
▼ Se trata de desplazar la gráfica de $f(x)$ 1 unidad a la derecha, después reflejarla con respecto al eje x y por último desplazarla hacia arriba 2 unidades.

De esa forma los puntos $A(-2, -3)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$, $D(1, 0)$, $E(1, -2)$,$F(3, 4)$ pasan a ser sucesivamente:

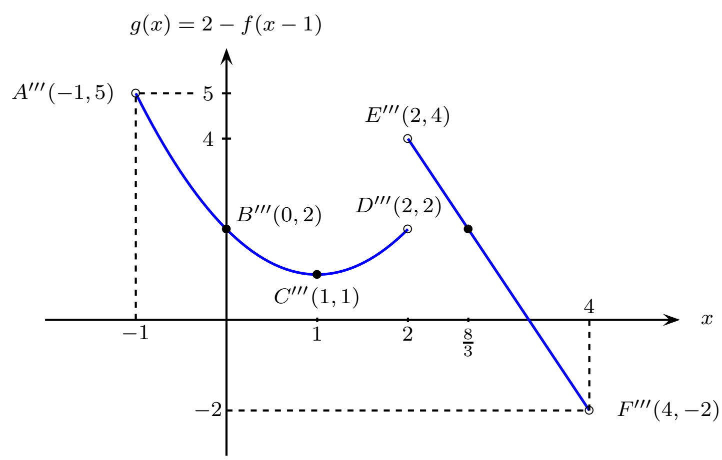
$$A'(-1, -3),\ B'(0, 0),\ C'(1, 1),\ D'(2, 0),\ E'(2, -2),\ F'(4, 4).$$



$A''(-1,3)$, $B''(0,0)$, $C''(1,-1)$, $D''(2,0)$, $E''(2,2)$, $F''(4,-4)$.



$A'''(-1,5)$, $B'''(0,2)$, $C'''(1,1)$, $D'''(2,2)$, $E'''(2,4)$, $F'''(4,-2)$; por último,



Así el $D_f = [-2,1)\bigcup(1,3)$ se transforma en el $D_g = [-1,2)\bigcup(2,4)$ y los puntos $x = -2$, 1^- ,1^+, 3^- en $x = -1$, 2^-, 2^+, 4^- respectivamente y además

$$g(-1) = 2 - f(-1-1) = 2 - f(-2) = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5;$$
$$g(2^-) = 2 - f(2^- - 1) = 2 - f(1^-) = 2 - 0 = 2;$$

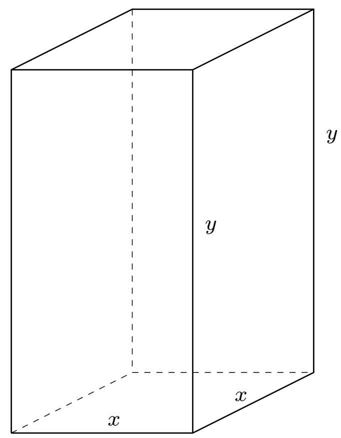
$$g(2^+) = 2 - f(2^+ - 1) = 2 - f(1^+) = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4;$$
$$g(4^-) = 2 - f(4^- - 1) = 2 - f(3^-) = 2 - 4 = -2;$$

y los puntos $A(-2,-3)$, $B(-1,0)$, $C(0,1)$, $D(1,0)$, $E(1,-2)$, $F(3,4)$ de la gráfica de f pasan a ser respectivamente $A'''(-1,5)$, $B'''(0,2)$, $C'''(1,1)$, $D'''(2,2)$, $E'''(2,4)$, $F'''(4,-2)$ de la gráfica de g.

□

(4) Se va a fabricar una caja con base y tapa cuadradas que tenga un volumen de 2 m^3. El costo de fabricación para la base y la tapa es de \$300.00 por m^2 y para las caras laterales es de \$200.00 por m^2. Obtener el costo de fabricación de la caja, en función de la longitud x del lado de la base cuadrada.

▼ Usamos el siguiente dibujo.



Sabemos que el volumen de la caja es el área de la base por la altura, esto es, $V = x^2y$, pero esta cantidad debe de ser 2 m^3, por lo que:

$$x^2y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x^2}\,.$$

El costo de fabricar la base y la tapa es su área (en m^2) multiplicado por \$300.00:

$$2x^2 \times 300 = 600x^2.$$

Entonces, el costo de fabricar las cuatro caras laterales será

$$4xy \times 200 = 800xy.$$

Para tenerla en función de x, sustituimos en lugar de $y = \dfrac{2}{x^2}$, con lo que tenemos que el costo, en función de x es:

$$C(x) = 600x^2 + 800x \times \frac{2}{x^2} = 600x^2 + \frac{1600}{x}\,.$$

□