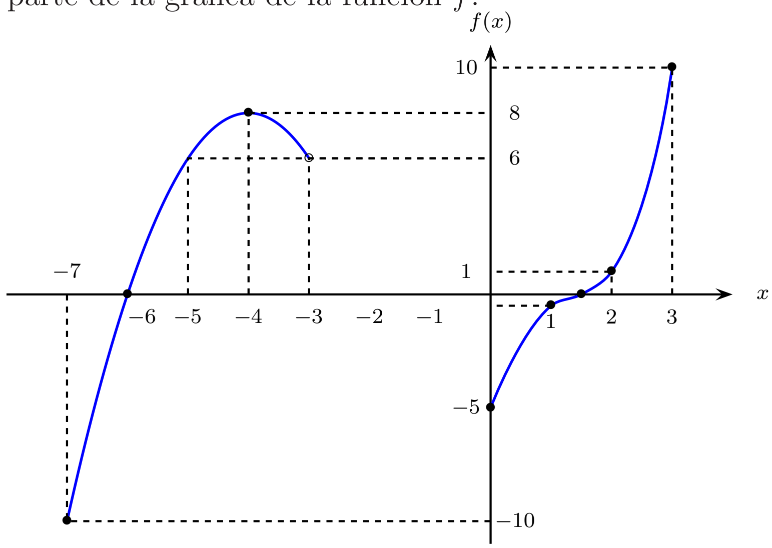
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E0300
02.I

(1) La gripe se está extendiendo en una escuela pequeña. Después de un tiempo t, medido en días, hay

$$E(t) = 20t - t^2 \text{ enfermos.}$$

  (a) ¿A partir de qué día ya no hay enfermos de gripe?
  (b) Determine los intervalos de días en los cuales hay al menos 96 enfermos de gripe

(2) En el dibujo aparece una parte de la gráfica de la función f.

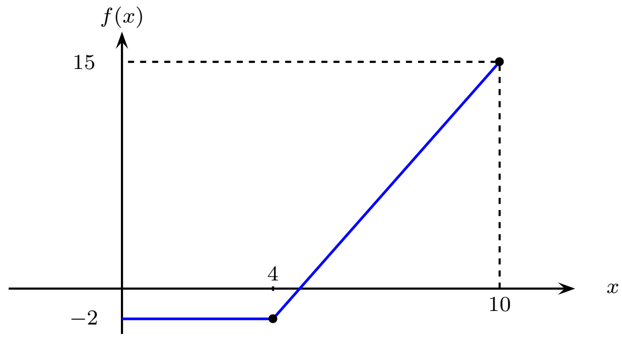


  (a) Complete la gráfica de f sabiendo que se trata de una función par y también determine su dominio, raíces y rango (imagen)
  (b) Determine las soluciones de las desigualdades $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$
  (c) Determine los intervalos donde f es
    (i) creciente
    (ii) decreciente

(3) Una pecera de 1.5 pies de altura ha de contener un volumen de 6 pies cúbicos. Si x es el largo de la base, y su ancho es y:
  (a) Determine y como función de x. Además, grafique esta función
  (b) Hallar la cantidad en pies cuadrados de material necesario para construir la pecera en función de x

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

(4) La siguiente es la gráfica de una función $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$.



(a) Determine su fórmula

(b) Considere la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -10 \leq x < 0 \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de g. Determine su dominio, imagen y raíces.

(c) Sea $h(x) = g(x+1) - 2$, a partir de la gráfica de g obtenga la de h

(5) Determinar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{10 - |\,3 - 8x\,|}$.

Respuestas

(1) La gripe se está extendiendo en una escuela pequeña. Después de un tiempo t, medido en días, hay

$$E(t) = 20t - t^2 \text{ enfermos.}$$

(a) ¿A partir de qué día ya no hay enfermos de gripe?

▼ Ya no habrá enfermos de gripe con $t > 0$ cuando $E(t) = 0$, es decir, si

$$20t - t^2 = 0 \Rightarrow t(20 - t) = 0;$$

esto es, cuando $20 - t = 0$; o sea, cuando $t = 20$, luego a partir del vigésimo día no hay enfermos de gripe.

□

(b) Determine los intervalos de días en los cuales hay al menos 96 enfermos de gripe

▼ Debemos determinar t de manera que

$$20t - t^2 \geq 96 \Rightarrow t^2 - 20t + 96 \leq 0;$$

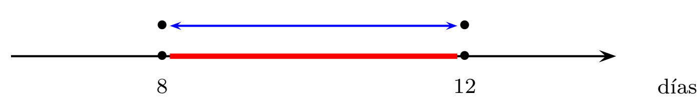
como

$$t^2 - 20t + 96 = (t - 8)(t - 12) \Rightarrow t^2 - 20t + 96 = 0 \Rightarrow t = 8 \text{ o bien } t = 12\,.$$

Veamos ahora cuál es el signo del trinomio en el complemento de esos números construyendo la tabla siguiente:

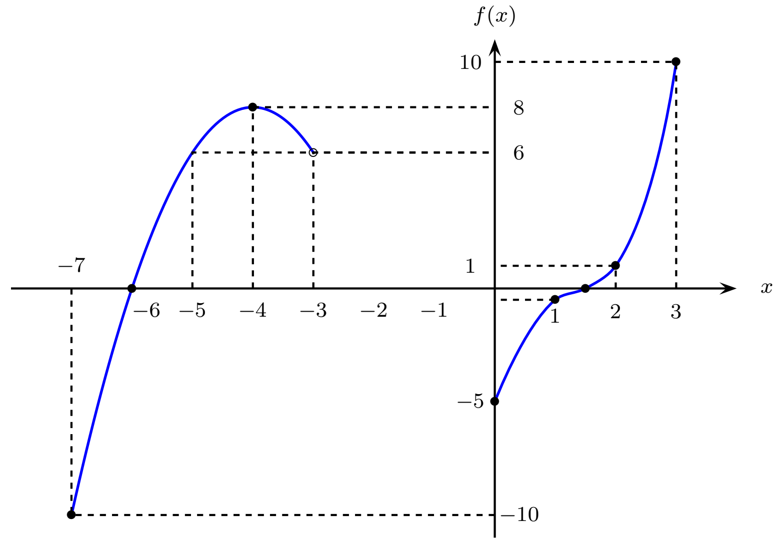
	Signo de		
Intervalo	$t - 8$	$t - 12$	$(t-8)(t-12) = t^2 - 20t + 96$
$t < 8\,(< 12)$	$-$	$-$	$+$
$8 < t < 12$	$+$	$-$	$-$
$t > 12\,(> 8)$	$+$	$+$	$+$

Luego, entre los 8 y 12 días hay al menos 96 enfermos de gripe en la escuela.



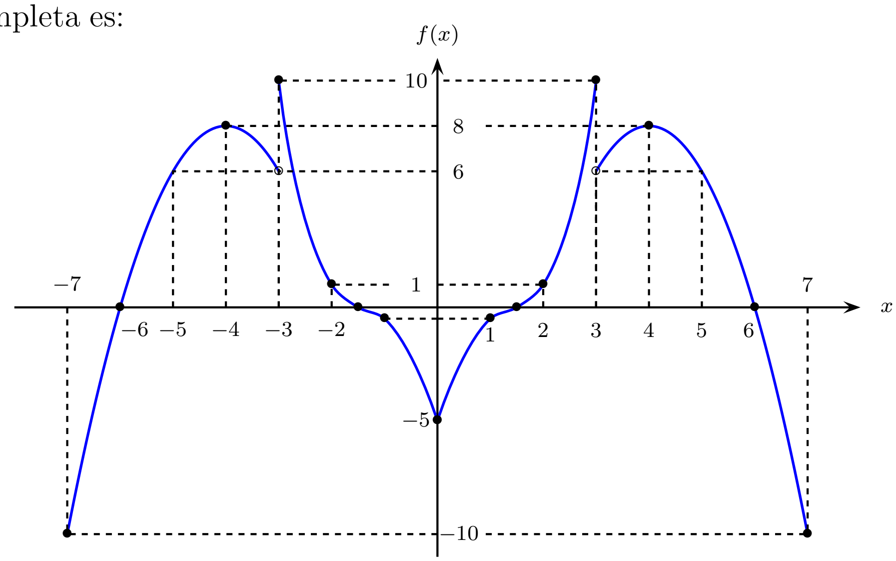
□

(2) En el dibujo aparece una parte de la gráfica de la función f.



(a) Complete la gráfica de f sabiendo que se trata de una función par y también determine su dominio, raíces y rango (imagen)

▼ La gráfica completa es:



Y así resulta que $D_f = [-7, 7]$.

Raíces: $-6, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}$ y 6.

$R_f = [-10, 10]$.

$\square$

(b) Determine las soluciones de las desigualdades $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$

▼ $f(x) > 0$ si $x \in \left(-6, -\dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{3}{2}, 6\right)$;

$f(x) < 0$ si $x \in [-7, -6) \bigcup \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \bigcup (6, 7]$.

$\square$

(c) Determine los intervalos donde f es

(i) creciente

▼ La función $f(x)$ es creciente en $(-7, -4) \bigcup (0, 3) \bigcup (3, 4)$;

$\square$

(ii) decreciente

▼ La función $f(x)$ es decreciente en $(-4,-3)\bigcup(-3,0)\bigcup(4,7)$.

□

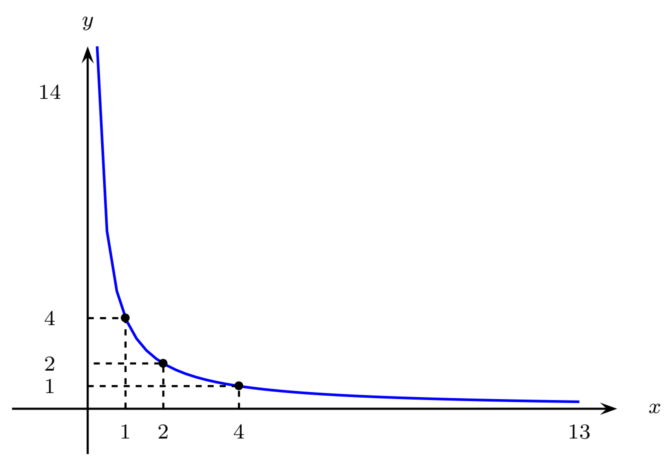
(3) Una pecera de 1.5 pies de altura ha de contener un volumen de 6 pies cúbicos. Si x es el largo de la base, y su ancho es y:

(a) Determine y como función de x. Además, grafique esta función

▼ Como el volumen de un prisma recto rectangular es el área de la base por la altura, en el caso de la pecera tenemos que $1.5xy = 6$, entonces

$$y = \frac{6}{1.5x} \Rightarrow y = \frac{4}{x}\,.$$

Cuya gráfica es:

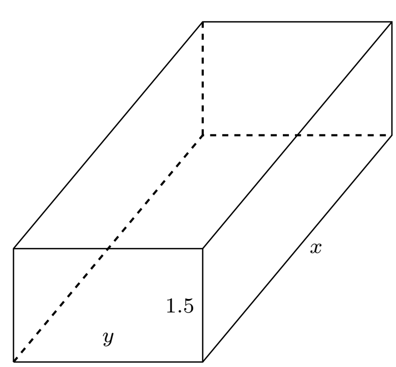


Su dominio son los reales positivos y su rango es el intervalo $(0,+\infty)$.

□

(b) Hallar la cantidad en pies cuadrados de material necesario para construir la pecera en función de x

▼ Ahora el área total del material que se requiere, puesto que la pecera no tiene tapa, es la suma de las áreas de 5 rectángulos, el fondo que tiene por área xy y las 4 caras laterales que son iguales por parejas, 2 de área $1.5x$ y 2 con $1.5y$.



En total

$$A = 2(1.5x) + 2(1.5y) + xy = 3x + 3y + xy = 3(x + y) + xy.$$

Sustituyendo y por $\dfrac{4}{x}$ obtenemos, por último:

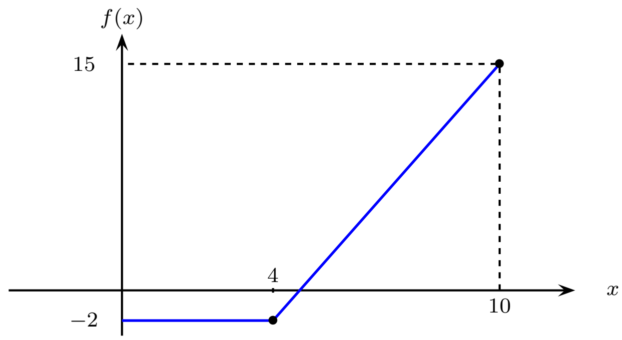
$$A = 3\left(x + \frac{4}{x}\right) + x\left(\frac{4}{x}\right)$$

y ahora simplificando,

$$A(x) = 3\left(x + \frac{4}{x}\right) + 4.$$

□

(4) La siguiente es la gráfica de una función $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$



(a) Determine su fórmula

▼ En $[0, 4]$ la gráfica de f es el segmento de la recta $y = -2$.
En $[4, 10]$ la gráfica de f es el segmento de la recta que une los puntos $(4, -2)$ y $(10, 15)$, es decir, que tiene de pendiente

$$m = \frac{15 - (-2)}{10 - 4} = \frac{15 + 2}{6} = \frac{17}{6}\,.$$

Por pasar por el punto $(4, -2)$ su ecuación es:

$$y + 2 = \frac{17}{6}(x - 4).$$

Así:

$$y = \frac{17}{6}x - \frac{17(2)}{3} - 2 = \frac{17}{6}x - \frac{34 + 6}{3} = \frac{17}{6}x - \frac{40}{3}$$

y entonces la fórmula para f será:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ \dfrac{17}{6}x - \dfrac{40}{3} & \text{si } 4 \le x \le 10. \end{cases}$$

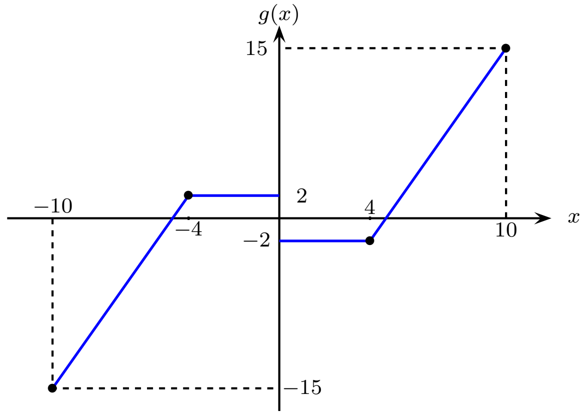
□

(b) Considere la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -10 \le x < 0 \\ f(x) & \text{si } 0 \le x \le 10. \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de g. Determine su dominio, imagen y raíces.

▼ La gráfica de $g(x)$ es:

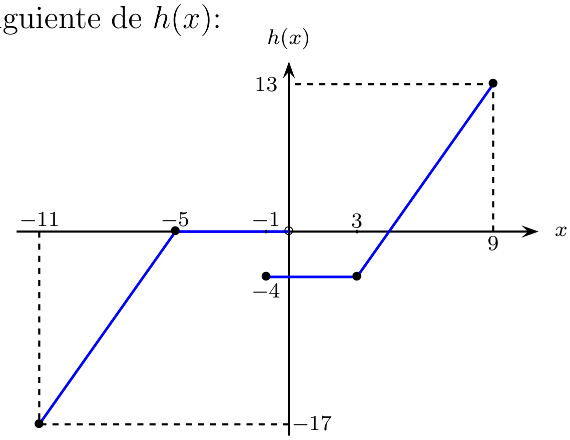


$D_g = [-10, 10]$, dominio de g.
$R_g = [-15, 15]$, imagen o rango de g.
Raíces: Si $\dfrac{17}{6}x - \dfrac{40}{3} = 0 \Rightarrow \dfrac{17}{6}x = \dfrac{40}{3} \Rightarrow x = \dfrac{40 \times 6}{17 \times 3} = \dfrac{40 \times 2}{17} = \dfrac{80}{17}$. Así también $x = -\dfrac{80}{17}$.

□

(c) Sea $h(x) = g(x + 1) - 2$, a partir de la gráfica de g obtenga la de h

▼ A la curva $y = g(x)$ se le traslada 1 unidad hacia la izquierda y luego 2 unidades hacia abajo. Resulta entonces la gráfica siguiente de $h(x)$:



□

(5) Determinar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{10 - |\, 3 - 8x \,|}$.

▼ Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, el radicando $10 - |\, 3 - 8x \,|$ debe ser mayor o igual que cero,

$$10 - |\, 3 - 8x \,| \geq 0 \Leftrightarrow 10 \geq |\, 3 - 8x \,| \Leftrightarrow |\, 3 - 8x \,| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq 3 - 8x \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -13 \leq -8x \leq 7 \Leftrightarrow \frac{13}{8} \geq x \geq -\frac{7}{8} \Leftrightarrow -\frac{7}{8} \leq x \leq \frac{13}{8},$$

es decir,

$$D_f = \left[-\frac{7}{8}, \frac{13}{8}\right] .$$

□