CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E0400
07-06-2001, 01.P

(1) Si desde el suelo se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/seg. entonces la altura sobre el suelo t segundos después será

$$h(t) = 20t - 5t^2.$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 15 m arriba del suelo?

(2) Se va a contruir un tanque rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar 8 m^3 de aceite. El material para construir la base y la tapa tiene un costo de \$1 000.00 por m^2 y el material para construir los lados tiene un costo de \$500.00 por m^2.
Obtener el costo de la construcción del tanque en función de la longitud x del lado de la base cuadrada.

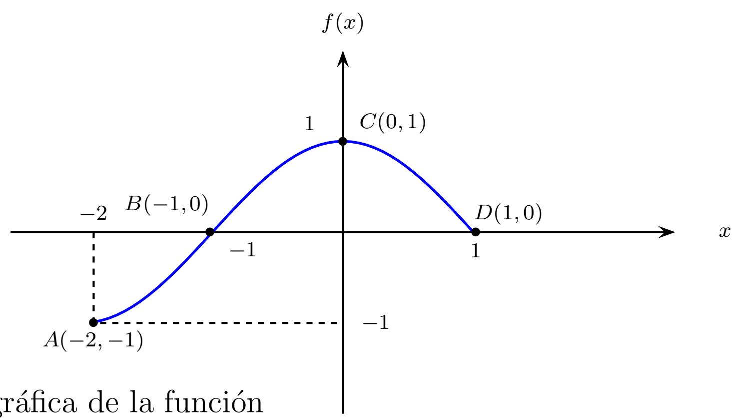
(3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{9-2x}$, $g(x) = |\,3x-4\,|$ & $h(x) = x^2 - 5$,
obtener $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$, $(f \circ g)(x)$, así como los dominios de las funciones $\dfrac{f}{h}$ & $f \circ g$.

(4) Considerando la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -5 < x < -3 \\ 4 - x^2 & \text{si } -3 \le x < 2 \\ 5 + \dfrac{x}{2} & \text{si } 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

(a) Bosquejar la gráfica de $f(x)$
(b) Considerando la gráfica de f, especificar dominio, rango y raíces de la función f; decir además, dónde la función es positiva y dónde es negativa
(c) Considerando la gráfica de f, decir dónde la función es creciente y dónde es decreciente.

(5) Considerando la siguiente como la gráfica de cierta función f



realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$g(x) = -2f(x-1) + 3.$$

Especificar la nueva posición de los puntos $A(-2,-1)$; $B(-1,0)$; $C(0,1)$ & $D(1,0)$.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Si desde el suelo se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/seg. entonces la altura sobre el suelo t segundos después será

$$h(t) = 20t - 5t^2.$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 15 m arriba del suelo?

▼ Estará 15 m arriba del suelo para los t tales que

$$20t - 5t^2 \geq 15 \Rightarrow 5t^2 - 20t + 15 \leq 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 \leq 0\,.$$

Puesto que

$$t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \text{ para } t = 1 \text{ \& para } t = 3.$$

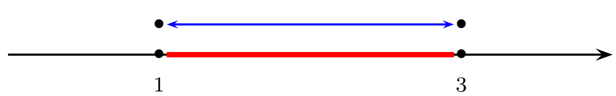
Veamos el signo de t^2-4t+3 en los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ definidos por estos puntos, o sean $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

Con ayuda de la siguiente tabla

	Signo de		
Intervalo	$t-1$	$t-3$	$(t-1)(t-3) = t^2 - 4t + 3$
$t < 1\,(< 3)$	$-$	$-$	$+$
$1 < t < 3$	$+$	$-$	$-$
$t > 3\,(> 1)$	$+$	$+$	$+$

tendremos que $t^2 - 4t + 3 \leq 0$, que es donde $h(t) = 20t - 5t^2 \geq 15$, si

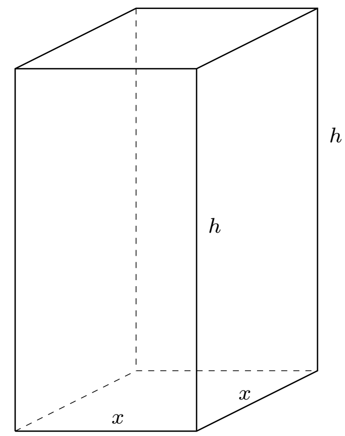
$$t \in [1, 3]$$



□

(2) Se va a contruir un tanque rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar 8 m^3 de aceite. El material para construir la base y la tapa tiene un costo de \$1 000.00 por m^2 y el material para construir los lados tiene un costo de \$500.00 por m^2.
Obtener el costo de la construcción del tanque en función de la longitud x del lado de la base cuadrada.

▼ La figura del tanque corresponde a:



El área de la base cuadrada es x^2, y el de la tapa también es x^2, luego sus áreas sumadas son $2x^2$, y entonces el costo por construirlas, en pesos, será de $2\,000x^2$, estando x expresada en metros.
Una cara lateral del tanque constituye un rectángulo de base x y altura digamos h (expresada también en metros), es decir, xh.
El volumen del tanque es el área de la base multiplicada por la altura, es decir, x^2h, pero como tiene que ser 8 m^3 tenemos que $x^2h = 8$; luego despejando h tenemos que $h = \dfrac{8}{x^2}$.
El área de una cara lateral es $x\dfrac{8}{x^2} = \dfrac{8}{x}$ y el área de las cuatro $4\left(\dfrac{8}{x}\right) = \dfrac{32}{x}$.
Y su costo $\dfrac{32}{x}(500) = \dfrac{16\,000}{x}$.

El costo total de construcción C como función del lado de la base cuadrada x será

$$C(x) = 2\,000x^2 + \frac{16\,000}{x}\,.$$

□

(3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{9 - 2x}$, $g(x) = |\,3x - 4\,|$ & $h(x) = x^2 - 5$,
obtener $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$, $(f \circ g)(x)$, así como los dominios de las funciones $\dfrac{f}{h}$ & $f \circ g$.

▼ Calculamos

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{9 - 2x}}{x^2 - 5}$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(|\,3x - 4\,|) = \sqrt{9 - 2\,|\,3x - 4\,|}\,.$$

Tenemos que:

$$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 9 - 2x \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 9 \geq 2x \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{9}{2} \geq x \,\right\} = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right];$$
$$D_g = \mathbb{R} \text{ y } D_h = \mathbb{R}\,;$$

luego entonces

$$D_{\frac{f}{h}} = \left\{ x \in D_f \bigcap D_h \,\middle|\, h(x) \neq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \bigcap \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 5 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \,\middle|\, x^2 \neq 5 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \,\middle|\, |\, x \,| \neq \sqrt{5} \right\} = \left\{ x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \,\middle|\, x \neq \pm\sqrt{5} \right\} =$$
$$= \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] - \left\{ -\sqrt{5}, \sqrt{5} \right\}.$$

Por último:

$$D_{(f\circ g)} = \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\, 3x - 4 \,| \leq \frac{9}{2} \right\}.$$

Pero

$$|\, 3x - 4 \,| \leq \frac{9}{2} \text{ equivale a } -\frac{9}{2} \leq 3x - 4 \leq \frac{9}{2},$$

sumando 4

$$4 - \frac{9}{2} \leq 3x \leq \frac{9}{2} + 4.$$

Es decir,

$$\frac{8-9}{2} \leq 3x \leq \frac{9+8}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 3x \leq \frac{17}{2}$$

y, multiplicando por $\frac{1}{3}$:

$$-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{17}{6} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right].$$

Entonces

$$D_{(f\circ g)} = \left[-\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right].$$

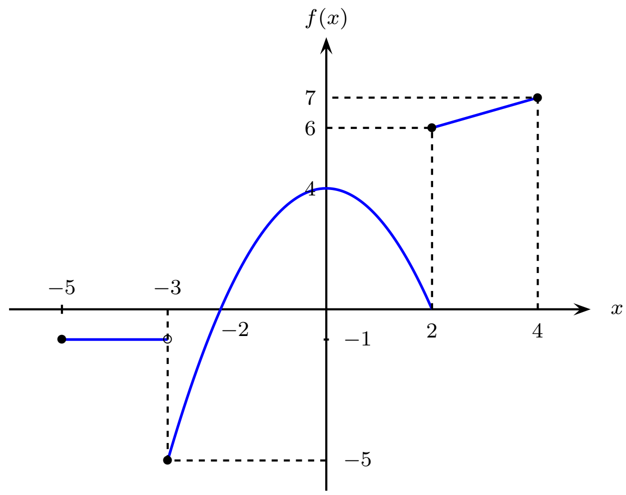
□

(4) Considerando la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -5 < x < -3 \\ 4 - x^2 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ 5 + \dfrac{x}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

(a) Bosquejar la gráfica de $f(x)$

▼ Vemos que en $(-5, -3)$ la función es constante, por lo que su gráfica es un segmento rectilíneo paralelo al eje de las x con altura -1, es decir, parte de la recta $y = -1$.
En $[-3, 2)$ la gráfica es parte de la parábola $y = -x^2 + 4$.
En $[2, 4]$ es parte de la recta $y = \frac{1}{2}x + 5$ de pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen 5.
La gráfica de $f(x)$ es:



□

(b) Considerando la gráfica de f, especificar dominio, rango y raíces de la función f; decir además, dónde la función es positiva y dónde es negativa

▼ Vemos que

$$D_f = (-5, 4],\ R_f = [-5, 4] \bigcup [6, 7].$$

Raíces: $x = -2$ donde $4 - x^2 = 0$ & $-3 \leq x < 2$.

La función f es positiva en $(-2, 4]$ y negativa en $(-5, -2)$.

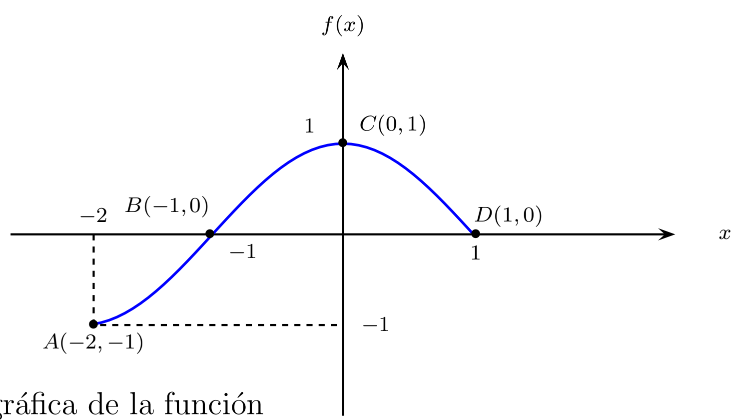
□

(c) Considerando la gráfica de f, decir dónde la función es creciente y dónde es decreciente

▼ La función f crece en $(-3, 0)$ y en $(2, 4)$; decrece en $(0, 2)$.

□

(5) Considerando la siguiente como la gráfica de cierta función f



realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$g(x) = -2f(x-1) + 3.$$

Especificar la nueva posición de los puntos $A(-2, -1)$; $B(-1, 0)$; $C(0, 1)$ & $D(1, 0)$.

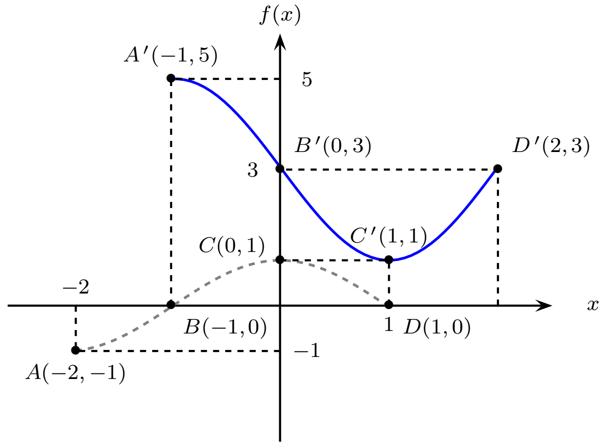
▼ La gráfica de $y = g(x)$ se obtiene a partir de $y = f(x)$, mediante los pasos siguientes:

Se obtiene $y = f(x-1)$, trasladando 1 unidad hacia la derecha la curva $y = f(x)$.

Se obtiene $y = 2f(x-1)$, multiplicando por 2 las ordenadas de los puntos de $y = f(x-1)$.

Se obtiene $y = -2f(x-1)$, reflejando en el eje x la curva $y = 2f(x-1)$.

Se obtiene $y = -2f(x-1) + 3$, trasladando 3 unidades hacia arriba la curva $y = -2f(x-1)$. Obtenemos la gráfica siguiente:



Veamos la nueva posición de los puntos A, B, C y D respectivamente:

$$A'(-1,5); B'(0,3); C'(1,1) \text{ y } D'(2,3).$$

$\square$