CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E0500
31-05-2001, 01.P

(1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -7 \le x < -2 \\ -x^2+3 & \text{si } -2 \le x \le 3 \\ 4 & \text{si } 3 < x \le 6. \end{cases}$$

(a) Dibuje su gráfica
(b) Determine su dominio y su rango; también encuentre sus raíces
(c) A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento
(d) A partir de la gráfica, encuentre los intervalos dónde la función es positiva y dónde es negativa

(2) Sean las funciones $f(x) = \sqrt{4-2x}$ & $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$, encuentre $g \circ f$ & $f \circ g$. Halle los dominios correspondientes.

(3) Se deja caer una piedra en un lago, que crea una ola circular la cual viaja hacia afuera a una velocidad de 60 cm/seg.
(a) Exprese el radio de este círculo como función del tiempo t (en segundos)
(b) Si A es el área de este círculo como función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprete esta composición

(4) Una partícula A parte del origen según la ley de movimiento

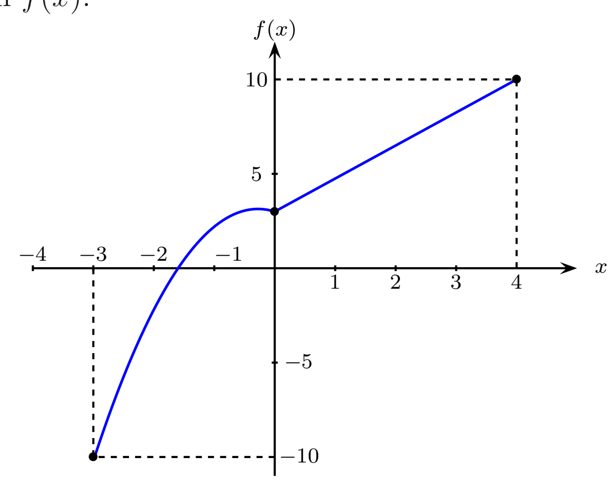
$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t,\ t \ge 0.$$

Otra partícula B parte del origen al mismo tiempo, según la ley de movimiento

$$y(t) = 3t.$$

Determine los intervalos de tiempo en que la distancia al origen de la partícula A es mayor que la de la partícula B.

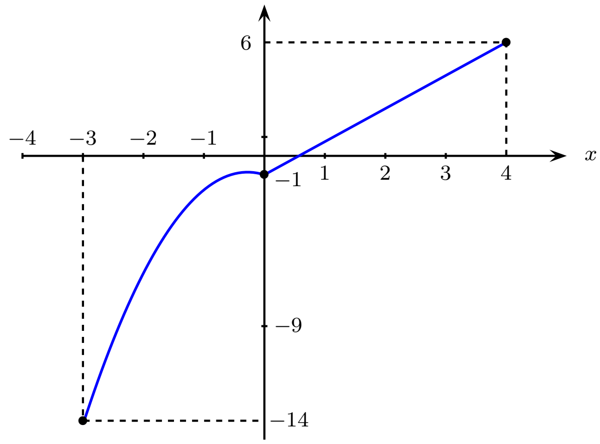
(5) Dada la gráfica de una función $f(x)$:



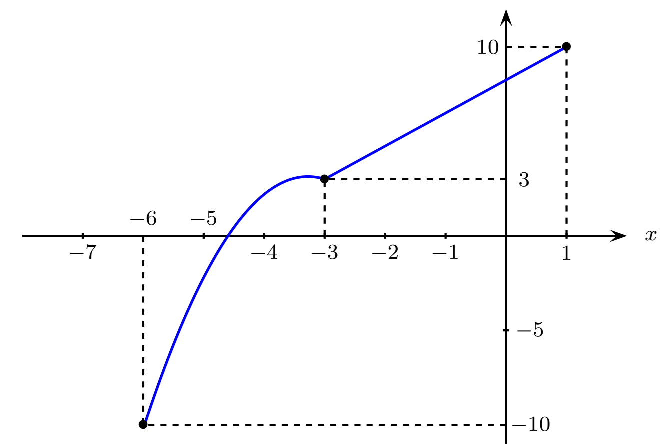
asocie cada una de las siguientes funciones $f(x+3)$, $-2f(x)$ y $f(x)-4$ con su gráfica correspondiente.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

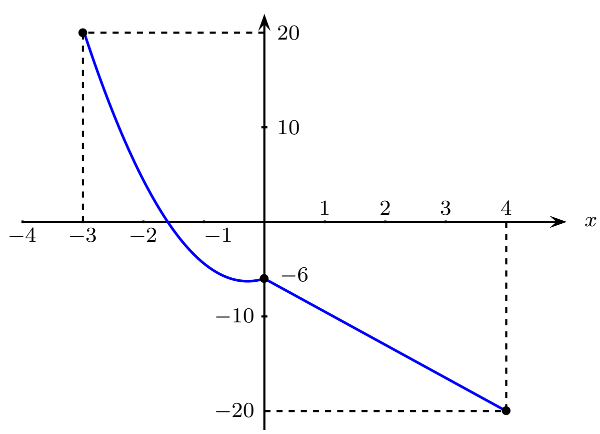
(a) ▼



(b) ▼



(c) ▼



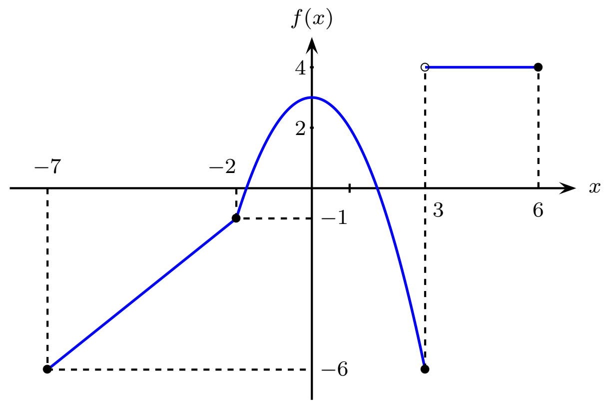
Respuestas

(1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -7 \le x < -2 \\ -x^2+3 & \text{si } -2 \le x \le 3 \\ 4 & \text{si } 3 < x \le 6. \end{cases}$$

(a) Dibuje su gráfica

▼ La gráfica de $f(x)$ es



□

(b) Determine su dominio y su rango; también encuentre sus raíces

▼ Vemos que:

$$D_f = [-7, 6] \text{ y } R_f = [-6, 3] \bigcup \{\, 4 \,\}\, .$$

La función es cero solamente cuando

$$-x^2+3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow |\, x \,| = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3},$$

que son sus raíces.

□

(c) A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento

▼ En $[-7, 0]$ la función es creciente y en $[0, 3]$ es decreciente.
En $(3, 6]$ es no creciente y no decreciente (es constante).

□

(d) A partir de la gráfica, encuentre los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa

▼ Observamos que

$$f(x) > 0 \text{ si } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \bigcup (3, 6];$$
$$f(x) < 0 \text{ si } x \in [-7, -\sqrt{3}) \bigcup (\sqrt{3}, 3].$$

□

(2) Sean las funciones $f(x) = \sqrt{4-2x}$ & $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$, encuentre $g \circ f$ & $f \circ g$. Halle los dominios correspondientes.

▼ Calculamos

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{4-2x}) &= \frac{(\sqrt{4-2x})^2-4}{(\sqrt{4-2x})^2-9} = \\
&= \frac{4-2x-4}{4-2x-9} = \frac{-2x}{-5-2x}\,; \\
(g\circ f)(x) &= \frac{2x}{5+2x}\,; \\
(f\circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) &= \sqrt{4-2\frac{x^2-4}{x^2-9}} = \\
&= \sqrt{\frac{4(x^2-9)-2(x^2-4)}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{4x^2-36-2x^2+8}{x^2-9}}\,; \\
(f\circ g)(x) &= \sqrt{\frac{2x^2-28}{x^2-9}}\,.
\end{aligned}
$$

Ahora tenemos

$$
\begin{aligned}
D_f &= \left\{\, x\in\mathbb{R} \,\middle|\, 4-2x\geq 0 \,\right\} = \left\{\, x\in\mathbb{R} \,\middle|\, 4\geq 2x \,\right\} = \left\{\, x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{4}{2}\geq x \,\right\} = \\
&= \left\{\, x\in\mathbb{R} \,\middle|\, 2\geq x \,\right\} = (-\infty, 2]
\end{aligned}
$$

y

$$D_g = \left\{\, x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x^2-9\neq 0 \,\right\};$$

y como

$$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow |\,x\,|=3 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

luego entonces tenemos

$$D_g = \left\{\, x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x\neq\pm 3 \,\right\} = (-\infty,-3)\bigcup(-3,3)\bigcup(3,+\infty)$$

y

$$D_{g\circ f} = \left\{\, x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g \,\right\} = \left\{\, x\in(-\infty,2] \,\middle|\, \sqrt{4-2x}\neq\pm 3 \,\right\}.$$

Calculamos cuando $\sqrt{4-2x}=\pm 3$. Elevando al cuadrado esta igualdad, equivale a

$$4-2x=9 \Rightarrow 2x=4-9 \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}\,.$$

Luego efectivamente

$$D_{g\circ f} = (-\infty,2]-\left\{-\frac{5}{2}\right\}.$$

Por último tenemos que

$$D_{g\circ f} = \left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\bigcup\left(-\frac{5}{2},2\right].$$

Ahora

$$D_{f\circ g} = \left\{\, x\in D_g \,\middle|\, g(x)\in D_f \,\right\} = \left\{\, x\neq\pm 3 \,\middle|\, \frac{x^2-4}{x^2-9}\leq 2 \,\right\}.$$

Resolvamos pues esta última desigualdad:

$$\frac{x^2-4}{x^2-9}\leq 2.$$

Consideremos los siguientes casos:

Si

$$x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow |\,x\,| > 3 \Rightarrow x > 3 \text{ o bien } x < -3$$

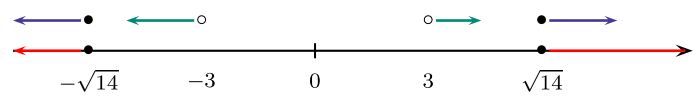
entonces

$$x^2 - 4 \le 2(x^2 - 9) \Rightarrow x^2 - 4 \le 2x^2 - 18 \Rightarrow 2x^2 - x^2 \ge 18 - 4 \Rightarrow x^2 \ge 14 \Rightarrow |\,x\,| \ge \sqrt{14}\,;$$

así mismo

$$x \ge \sqrt{14} \text{ o bien } x \le -\sqrt{14}.$$

En resumidas cuentas,



$$x \in (-\infty, -\sqrt{14}] \bigcup [\sqrt{14}, +\infty), \text{ pues } -\sqrt{14} < -3 \text{ y } 3 < \sqrt{14} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \ge \sqrt{14} \Rightarrow x > 3 \text{ y } x \le -\sqrt{14} \Rightarrow x < -\sqrt{3}\,.$$

En el otro caso

$$x^2 - 9 < 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow |\,x\,| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3.$$

La desigualdad $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \le 2$ equivale a

$$x^2 - 4 \ge 2(x^2 - 9) \Rightarrow x^2 - 4 \ge 2x^2 - 18 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 - x^2 \le 18 - 4 \Rightarrow x^2 \le 14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\,x\,| \le \sqrt{14} \Rightarrow -\sqrt{14} \le x \le \sqrt{14}.$$

Por lo tanto

$$x \in (-3, 3).$$

Y en resumidas cuentas

$$D_{f \circ g} = (-\infty, -\sqrt{14}] \bigcup (-3, 3) \bigcup [\sqrt{14}, +\infty).$$

□

(3) Se deja caer una piedra en un lago, que crea una ola circular la cual viaja hacia afuera a una velocidad de 60 cm/seg.

(a) Exprese el radio de este círculo como función del tiempo t

▼ La expresión de r (en centímetros) como función de t (en segundos) es

$$r = 60t$$

ya que, en un movimiento rectilíneo uniforme como es el que tiene todo punto del frente de la onda circular, el espacio recorrido es igual a la velocidad (constante) por el tiempo empleado (t).

□

(b) Si A es el área de este círculo como función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprete esta composición

▼ Sabemos que

$$A(r) = \pi r^2.$$

Luego en resumidas cuentas

$$(A \circ r)(t) = A[r(t)] = A(60t) = \pi(60t)^2 = 3\,600\pi t^2\,,$$

que es el área del círculo (en cm^2) como función del tiempo t (en segundos). □

(4) Una partícula A parte del origen según la ley de movimiento

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t,\ t \geq 0.$$

Otra partícula B parte del origen al mismo tiempo, según la ley de movimiento

$$y(t) = 3t.$$

Determine los intervalos de tiempo en que la distancia al origen de la partícula A es mayor que la de la partícula B.

▼ Tenemos que resolver la desigualdad $S(t) \geq y(t)$

$$t^3 - 12t^2 + 36t > 3t \Rightarrow t^3 - 12t^2 + 36t - 3t > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^3 - 12t^2 + 33t > 0 \Rightarrow t(t^2 - 12t + 33) > 0.$$

Sabemos que

$$t(t^2 - 12t + 33) = 0.$$

Tanto si $t = 0$

como si

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{2} = 6 \pm \frac{\sqrt{12}}{2} =$$
$$= 6 \pm \frac{\sqrt{4 \times 3}}{2} = 6 \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} = 6 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} 7.7320508 \\ 4.2679492\,. \end{cases}$$

Luego

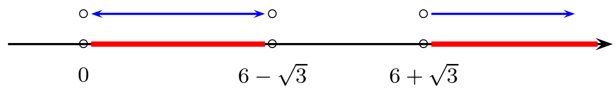
$$t^3 - 12t^2 + 33t \text{ será} \neq 0 \text{ fuera de esos tres puntos.}$$

Veamos de hecho su signo en tales intervalos conforme a la tabla siguiente:

	Signo de			
Intervalo	t	$t - 6 + \sqrt{3}$	$t - 6 - \sqrt{3}$	$t^3 - 12t^2 + 33t$
$t < 0\,(< 6 - \sqrt{3} < 6 + \sqrt{3})$	$-$	$-$	$-$	$-$
$0 < t < 6 - \sqrt{3}\,(< 6 + \sqrt{3})$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(0 <)\,6 - \sqrt{3} < t < 6 + \sqrt{3}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$t > 6 + \sqrt{3}\,(> 6 - \sqrt{3} > 0)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Luego $t^3 - 12t^2 + 33t > 0$ si

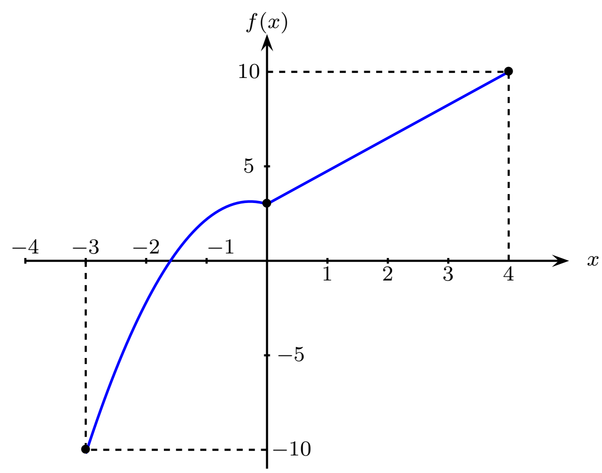
$$t \in (0, 6 - \sqrt{3}) \bigcup (6 + \sqrt{3}, +\infty)$$



que es cuando la partícula A dista del origen más que la partícula B.

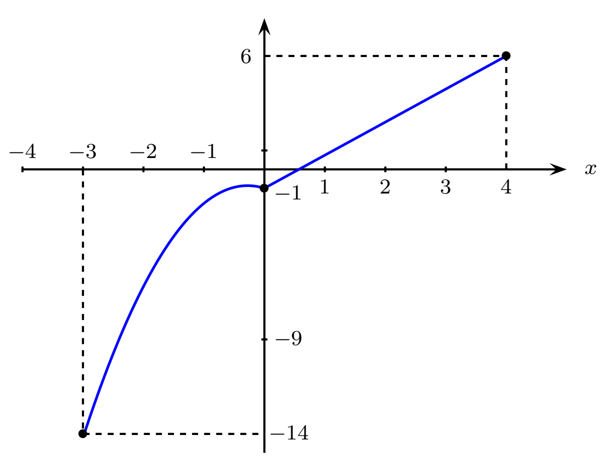
□

(5) Dada la gráfica de una función $f(x)$:



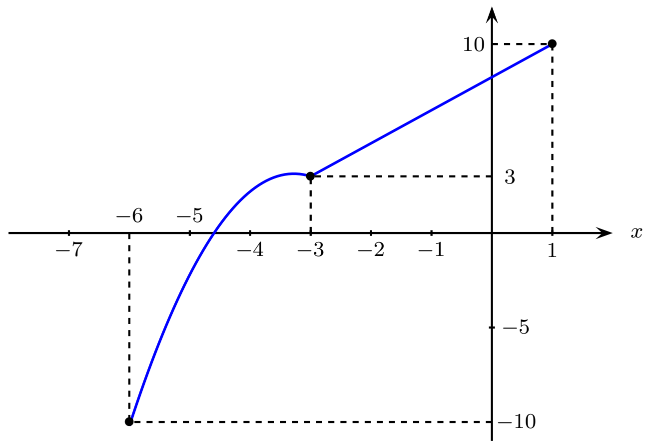
asocie cada una de las siguientes funciones $f(x+3)$, $-2f(x)$ y $f(x)-4$ con su gráfica correspondiente.

(a) ▼ Ésta es la función $f(x)-4$.



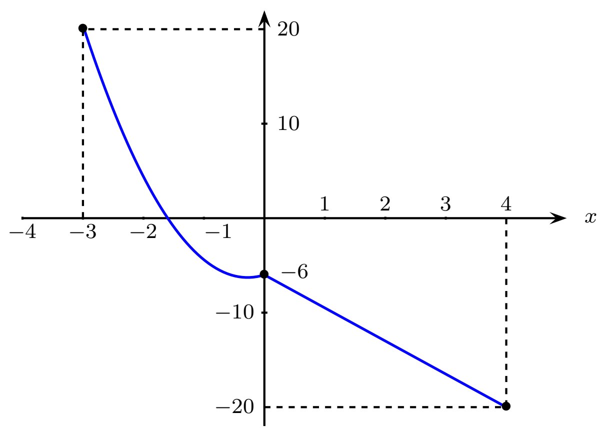
□

(b) ▼ Ésta es la función $f(x+3)$.



□

(c) ▼ Ésta es la función $-2f(x)$.



□