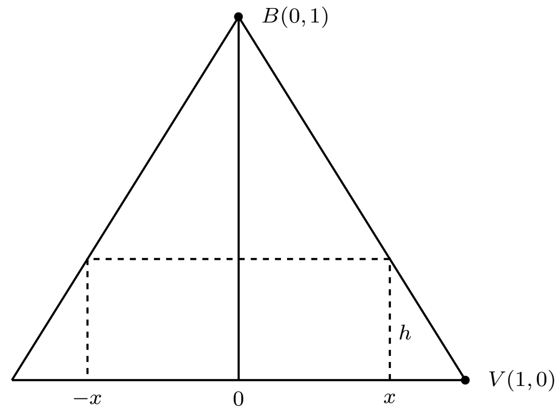
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E0600
08-02-2001, 01.I

(1) Sea
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$
obtenga la gráfica de $h(x) = f(x - 3) - 1$.

(2) La figura que se muestra es la de un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles. Exprese el área del rectángulo en función de x.



(3) Considerando las funciones $f(x) = 1 - x$; $g(x) = |\,x\,|$; $h(x) = 2$ & $k(x) = \sqrt{x}$, determine expresiones para las siguientes funciones:
   (a) $F(x) = ((g \circ f) + h)(x)$; además, trace su gráfica
   (b) ahora para esta otra función $G(x) = k(g(x - 2) - 3)$; calcule su dominio

(4) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = (2x - 3)(x^2 + 5x + 2).$$
   (a) ¿ Para qué valores de x, la gráfica de f está encima del eje x?
   (b) ¿ Para qué valores de x, la gráfica de f interseca al eje x?
   (c) ¿ Para qué valores de x, la gráfica de f está por debajo del eje x?

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

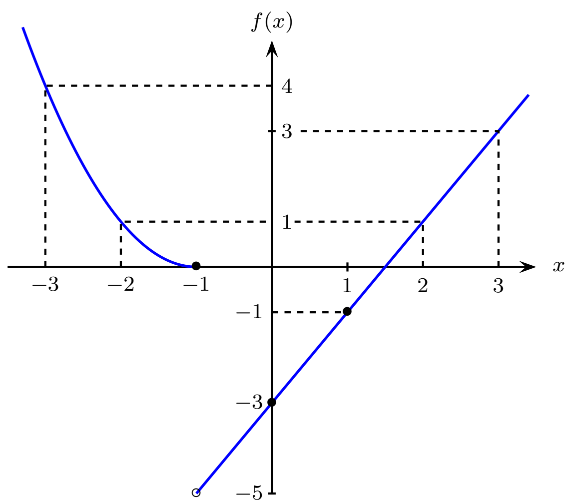
Respuestas

(1) Sea

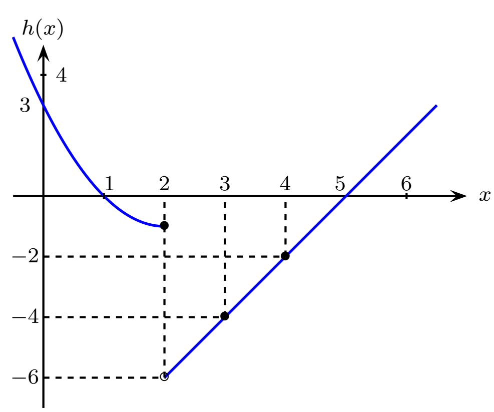
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

obtenga la gráfica de $h(x) = f(x-3) - 1$.

▼ Grafiquemos primero $f(x)$, observando que $f(x) = (x+1)^2$ si ≤ -1.

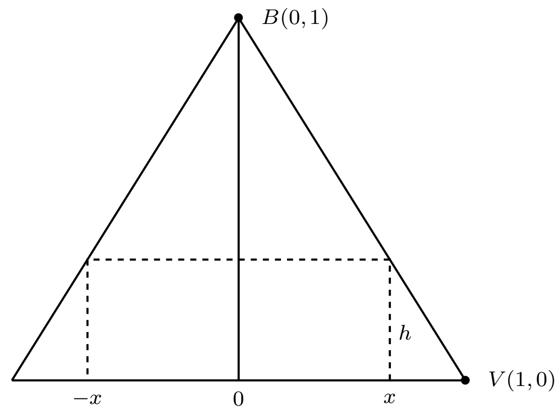


Se obtendrá $h(x)$; trasladando la gráfica de $f(x)$, 3 unidades a la derecha y deslizándola una unidad hacia abajo:



□

(2) La figura que se muestra es la de un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles. Exprese el área del rectángulo en función de x.



▼ Vemos que la base del rectángulo mide $2x$; para calcular la altura h observemos que los dos triángulos rectángulos, los cuales tienen un vértice común en V y uno de sus catetos es h y el otro es OB respectivamente, son semejantes, luego

$$\frac{h}{1-x} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{h}{1-x} = 1 \Rightarrow h = 1 - x.$$

Y por lo tanto, el área del rectángulo que se pide es

$$A = 2x(1-x).$$

□

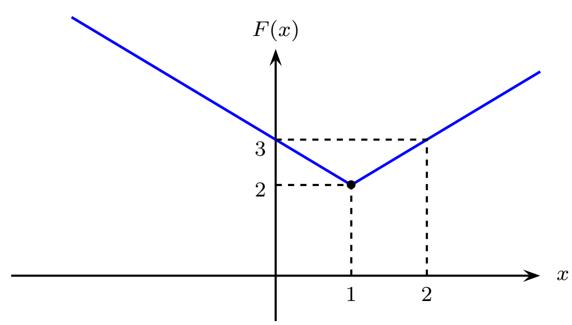
(3) Considerando las funciones $f(x) = 1 - x$; $g(x) = |\,x\,|$; $h(x) = 2$ & $k(x) = \sqrt{x}$, determine expresiones para las siguientes funciones:

(a) $F(x) = ((g \circ f) + h)(x)$; además, trace su gráfica

▼ Tenemos, usando las definiciones correspondientes

$$F(x) = (g \circ f)(x) + h(x) = g[f(x)] + h(x) = g(1-x) + h(x) = |\,1 - x\,| + 2$$

cuya gráfica es



Obtenida observando que

$$|\,1 - x\,| = |\,-(x-1)\,| = |\,x - 1\,|\ ;$$

entonces

$$F(x) = |\,x - 1\,| + 2.$$

Y su gráfica se obtiene a partir de la gráfica de $g(x) = |\,x\,|$ trasladándola a la derecha 1 unidad y deslizándola hacia arriba 2 unidades, o directamente observando que

$$F(x) = |\,1 - x\,| + 2 = |\,x - 1\,| + 2 = \begin{cases} x - 1 + 2 & \text{si } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) + 2 & \text{si } x - 1 < 0\,. \end{cases}$$

Es decir:

$$F(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 3 & \text{si } x < 1\,. \end{cases}$$

□

(b) $G(x) = k(g(x - 2) - 3)$; calcule su dominio

▼ Tenemos que

$$k[g(x - 2) - 3] = k(|\,x - 2\,| - 3) = \sqrt{|\,x - 2\,| - 3}.$$

Para calcular el dominio, consideramos las x tales que $g(x - 2) - 3 \geq 0$, pues $D_k = \mathbb{R}^+ \cup \{\,0\,\}$, por lo que

$$|\,x - 2\,| - 3 \geq 0 \Rightarrow |\,x - 2\,| \geq 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - 2 \geq 3 \;\text{ o bien } x - 2 \leq -3 \Rightarrow x \geq 5 \;\text{ o bien } x \leq -1;$$

es decir,

$$D_G = (-\infty, -1] \bigcup [5, +\infty).$$

□

(4) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 5x + 2)$.

(a) ¿Para qué valores de x, la gráfica de f está encima del eje x?

▼ Véase la respuesta en el inciso (c).

□

(b) ¿Para qué valores de x, la gráfica de f interseca al eje x?

▼ La gráfica de f interseca al eje x cuando $f(x) = 0$, es decir, cuando

$$(2x - 3)(x^2 + 5x + 2) = 0\,.$$

O sea, cuando

$$2x - 3 = 0 \;\text{ o bien } x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \;\text{ o bien } x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

o cuando

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2} \approx \begin{cases} -0.4384471 \\ -4.5615528\,. \end{cases}$$

□

(c) ¿Para qué valores de x, la gráfica de f está por debajo del eje x?

▼ Construyamos la tabla para conocer el signo de $f(x)$ en los cuatro subintervalos de la recta que son determinados por los tres puntos donde la función vale cero:

	Signo de			
Intervalo	$x - \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$	$x - \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$	$x - \frac{3}{2}$	$(2x-3)(x^2+5x+2)$
$x < \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \left(< \frac{-5+\sqrt{17}}{2} < \frac{3}{2} \right)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{-5-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \left(< \frac{3}{2} \right)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\left(\frac{-5-\sqrt{17}}{2} < \right) \frac{-5+\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3}{2}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x > \frac{3}{2} \left(> \frac{-5+\sqrt{17}}{2} > \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \right)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Luego

$$f(x) > 0 \text{ si } x \in \left(\frac{-5-\sqrt{17}}{2}, \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \right) \bigcup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

que es donde la gráfica de $f(x)$ está encima del eje x.

$$\text{Y ahora } f(x) < 0 \text{ si } x \in \left(-\infty, \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \right) \bigcup \left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

que es donde la gráfica de $f(x)$ está por debajo del eje x.

□