CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E0700
20-10-92, 10:00-11:30 92.O

(1) $0 < | 5 - 8x | \le 7$.

(2) $\dfrac{15 + 2x}{x + 4} \ge x$.

(3) Sean

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \ge -1\,; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 4} & \text{si } -2 < x < 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ge 2, \end{cases}$$

obtener $(f + g)(x)$.

(4) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \le 0 \\ | x - 2 | & \text{si } 0 < x < 4 \\ 3 & \text{si } x \ge 4. \end{cases}$$

(a) Grafique la función
(b) ¿Cuáles son el rango y las raíces de $f(x)$?
(c) ¿Cuáles son los intervalos de monotonía de $f(x)$?
(d) ¿La función $f(x)$ es par o impar? Justifique su respuesta

(5) Sean

$$f(x) = \frac{x}{x + 2} \quad \& \quad g(x) = \frac{x + 2}{x}$$

determine $f \circ g$ y su dominio.

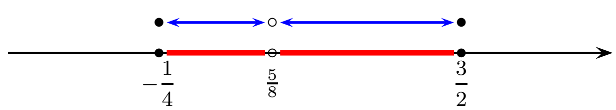
canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $0 < |\, 5 - 8x \,| \le 7$.

▼ Como $|\, 5 - 8x \,| > 0$, entonces $|\, 5 - 8x \,| \ne 0$; luego, $5 - 8x \ne 0$, $5 \ne 8x$, $x \ne \dfrac{5}{8}$.

La desigualdad
$$|\, 5 - 8x \,| \le 7$$
equivale a las desigualdades
$$-7 \le 5 - 8x \le 7.$$
Y si les sumamos -5, tenemos
$$-7 - 5 \le -8x \le 7 - 5;$$
luego,
$$-12 \le -8x \le 2.$$
Y multiplicándolas por $\dfrac{1}{-8}$, tendremos
$$\frac{12}{8} \ge \frac{-8}{-8}x \ge \frac{2}{-8} \Rightarrow \frac{3}{2} \ge x \ge -\frac{1}{4} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right].$$
Agregando la consideración hecha al inicio de que $x \ne \dfrac{5}{8}$, tenemos por último que el conjunto solución de las desigualdades $0 < |\, 5 - 8x \,| \le 7$ es
$$CS = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right] - \left\{\frac{5}{8}\right\}$$



Podemos comprobar, por ejemplo, que $-\dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{3}{2}$ satisfacen las desigualdades
$$0 < |\, 5 - 8x \,| \le 7$$
puesto que
$$\left|\, 5 - 8\left(-\frac{1}{4}\right) \right| = \left|\, 5 + \frac{8}{4} \right| = |\, 5 + 2 \,| = 7$$
y
$$\left|\, 5 - 8\left(\frac{3}{2}\right) \right| = |\, 5 - (4 \times 3) \,| = |\, 5 - 12 \,| = |\, -7 \,| = 7.$$
Sin embargo ni $\dfrac{5}{8}$ ni 2 las satisfacen pues
$$\left|\, 5 - 8\left(\frac{5}{8}\right) \right| = |\, 5 - 5 \,| = |\, 0 \,| = 0$$
y, de la misma manera,
$$|\, 5 - 8(2) \,| = |\, 5 - 16 \,| = |\, -11 \,| = 11.$$

□

(2) $\dfrac{15+2x}{x+4} \geq x.$

▼ Si $x+4>0 \Rightarrow x>-4 \Rightarrow x \in (-4,+\infty)$

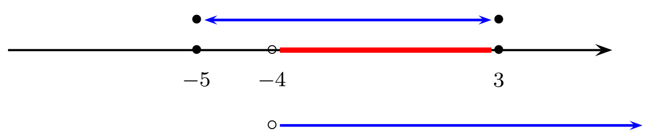
$$\frac{15+2x}{x+4} \geq x \Leftrightarrow 15+2x \geq x(x+4) \Leftrightarrow 15+2x \geq x^2+4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x-2x-15 \leq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-15 \leq 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-3) \leq 0.$$

Elaboremos la tabla para la última desigualdad

	Signo de		
Intervalo	$x+5$	$x-3$	$x^2+2x-15$
$x<-5(<3)$	$-$	$-$	$+$
$-5<x<3$	$+$	$-$	$-$
$x>3(>-5)$	$+$	$+$	$+$

Luego $x \in [-5,3]$ satisface la desigualdad $x^2+2x-15 \leq 0$.
Pero, como además $x \in (-4,+\infty)$, entonces

$$x \in [-5,3] \bigcap (-4,+\infty) = (-4,3]$$



Si ahora $x+4<0 \Rightarrow x<-4 \Rightarrow x \in (-\infty,-4)$, la desigualdad

$$\frac{15+2x}{x+4} \geq x$$

equivale a

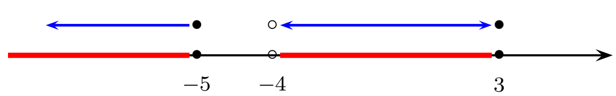
$$15+2x \leq x(x+4) \Leftrightarrow 15+2x \leq x^2+4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x-2x-15 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-15 \geq 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-3) \geq 0.$$

Luego, de la tabla para la desigualdad $(x+5)(x-3) \leq 0$ recién elaborada, vemos que

$$x \in \Big\{ (-\infty,-5] \bigcup [3,\infty) \Big\} \bigcap (-\infty,-4) = (-\infty,-5].$$

Por lo que en resumidas cuentas, el conjunto solución es

$$CS = (-\infty,-5] \bigcup (-4,3].$$



Podemos comprobar que $x=-5$ y $x=3$ satisfacen la desigualdad pues

$$\frac{15+2(-5)}{-5+4} = \frac{15-10}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

y

$$\frac{15 + 2 \times 3}{3 + 4} = \frac{15 + 6}{7} = \frac{21}{7} = 3.$$

Pero que $x = 4$ no lo hace, ya que

$$\frac{15 + 2 \times 4}{4 + 4} = \frac{15 + 8}{8} = \frac{23}{8} < 4\,.$$

□

(3) Sean

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1\,; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 4} & \text{si } -2 < x < 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

obtener $(f + g)(x)$.

▼ Observemos primero que $D_f = \mathbb{R}$ & $D_g = (-2, +\infty)$,
luego $D_{f+g} = D_f \bigcap D_g = D_g$ ya que $(-2, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$.

Como los valores de $f(x)$ se calculan de manera diferente según x esté antes que -1 o bien después y que los valores de $g(x)$ sean diferentes para x antes de 2 o bien después, dividiremos el dominio de $f + g$ en 3 subintervalos: $(-2, -1)$, $[-1, 2)$ y $[2, +\infty)$.
Entonces

$$(f + g)(x) = \begin{cases} 2x + 5 + \sqrt{x + 4} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x^2 + \sqrt{x + 4} & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ x^2 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

□

(4) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ |\, x - 2\,| & \text{si } 0 < x < 4 \\ 3 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

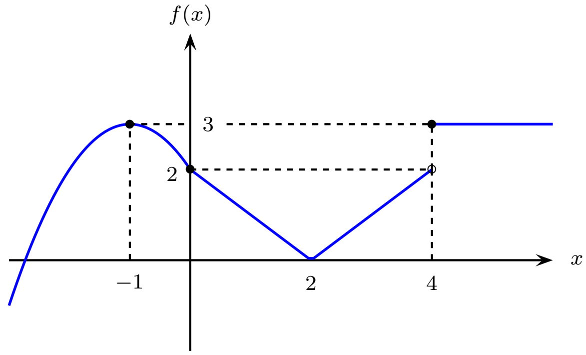
(a) Grafique la función
▼ Como

$$-x^2 - 2x + 2 = -(x^2 + 2x + 1) + 2 + 1 = -(x + 1)^2 + 3$$

resulta que $y = -x^2 - 2x + 2$ es una parábola cuyo vértice es $(-1, 3)$, eje focal paralelo al eje y, la cual dirige su concavidad hacia abajo, por lo que para $x \leq 0$, la gráfica de $f(x)$ es un segmento de tal parábola.

Entre $x = 0$ y $x = 4$ la gráfica de $f(x)$ es igual a la de $g(x) = |\, x\,|$ trasladada hacia la derecha dos unidades.

Por último, si $x \geq 4$, la gráfica es una paralela al eje de las x trazada a una altura de 3.
Por lo tanto la gráfica es:



(b) ¿Cuáles son el rango y las raíces de $f(x)$?

▼ $R_f = (-\infty, 3]$.

Para hallar las raíces no positivas resolvamos la ecuación

$$-x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ o } x^2 + 2x - 2 = 0$$

con lo que obtenemos

$$x = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Luego $x = -1 - \sqrt{3}$ es la única raíz negativa que tiene la función.
La única raíz positiva es $x = 2$, luego sus raíces son $-1 - \sqrt{3}$ y 2.

□

(c) ¿Cuáles son los intervalos de monotonía de $f(x)$?

▼ La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1] \bigcup [2, 4]$.
La función $f(x)$ es decreciente en $[-1, 2]$.
La función $f(x)$ no creciente y no decreciente en $[4, +\infty)$.

□

(d) ¿La función $f(x)$ es par o impar? Justifique su respuesta

▼ La función $f(x)$ no es par pues, por ejemplo, $f(-1) = 3 \neq 1 = f(1)$.
Y tampoco es impar pues $f(-1) = 3 \neq -1 = -f(1)$.

□

(5) Sean

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad \& \quad g(x) = \frac{x+2}{x}$$

determine $f \circ g$ y su dominio.

▼ $$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x+2}{x} + 2} = \frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x+2+2x}{x}} = \frac{x+2}{3x+2}\,;$$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ pues $x + 2 = 0$ si $x = -2$;
$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$;
$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \neq 0 \,\middle|\, \frac{x+2}{x} \neq -2 \right\}$,
pero $\frac{x+2}{x} = -2$ si $x + 2 = -2x \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$.
Luego entonces, $D_{f \circ g} = \left\{ x \neq 0 \,\middle|\, x \neq -\frac{2}{3} \right\} = \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$.

□