# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
# PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E0800
# 21-11-1996, 96.O

(1) $9x + 3 \le 20x - 100 \le 15x + 200$.

(2) $x^2 \ge 3\,|\,x\,| + 4$.

(3) $\dfrac{-2}{x-4} < 7\,$.

(4) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \le 3 \\ 7 & \text{si } 3 < x. \end{cases}$$

(a) Obtener su gráfica
(b) Determinar su dominio y contradominio
(c) Calcular: $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$ & $f(1000)$

(5) Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{x+3} \ \& \ g(x) = \frac{1}{x^2 - 5}\,.$$

Calcular, obtener o determinar, según proceda:
(a) Dominios de $f$, $g$, $f + g$ y $fg$
(b) $f(g(-3))$, $g(f(6))$ y el dominio de $g(f(x))$

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

## Respuestas

(1) $9x + 3 \le 20x - 100 \le 15x + 200$.

▼ La desigualdad $9x + 3 \le 20x - 100$ equivale a

$$9x - 20x \le -100 - 3 \Rightarrow -11x \le -103 \Rightarrow x \ge \frac{-103}{-11} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \ge \frac{103}{11} \Rightarrow x \in \left[\frac{103}{11}, +\infty\right)$$

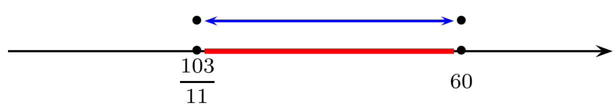
y la desigualdad $20x - 100 \le 15x + 200$ se cumple si y solamente si

$$20x - 15x \le 200 + 100 \Rightarrow 5x \le 300 \Rightarrow x \le \frac{300}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \le 60 \Rightarrow x \in (-\infty, 60]\,;$$

las anteriores se cumplen si

$$x \in (-\infty, 60] \bigcap \left[\frac{103}{11}, +\infty\right) = \left[\frac{103}{11}, 60\right]$$

como se ve en la gráfica que sigue:




$\square$

(2) $x^2 \ge 3\,|\,x\,| + 4$.

▼ La desigualdad $x^2 \ge 3 \mid x \mid + 4$

$$\text{se transforma en } x^2 \ge 3x + 4 \text{ si } x \ge 0$$
$$\text{así como en } x^2 \ge 3(-x) + 4 \Rightarrow x^2 \ge -3x + 4 \text{ si } x < 0.$$

Para resolver

$$x^2 \ge 3x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 \ge 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) \ge 0$$

construimos la siguiente tabla:

| | Signo de | | |
|---|---|---|---|
| Intervalo | $x + 1$ | $x - 4$ | $(x + 1)(x - 4)$ |
| $x < -1\,(< 4)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $-1 < x < 4$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $x > 4\,(> -1)$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Pero como $x \ge 0$, parte del conjunto solución es únicamente $[4, +\infty)$.

Para resolver

$$x^2 \ge -3x + 4 \text{ y } x < 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 \ge 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 1) \ge 0, \text{ con } x < 0$$

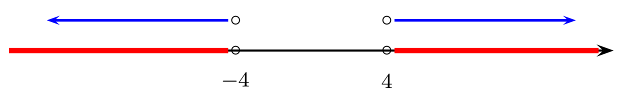
elaboremos la tabla

| | Signo de | | |
|---|---|---|---|
| Intervalo | $x+4$ | $x-1$ | $(x+4)(x-1)$ |
| $x < -4\,(< 0 < 1)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $-4 < x < 0\,(< 1)$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $x > 1\,(> 0 > -4)$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Solamente nos quedamos con $(-\infty, -4]$, pues $x > 1$ implica que $x > 0$ ya que $1 > 0$ y entonces no cumple con la condición $x < 0$.

Entonces el conjunto solución de $x^2 \geq 3\,|\,x\,| + 4$ es

$$CS = (-\infty, -4] \bigcup [4, +\infty) = \mathbb{R} - (-4, 4).$$




Notemos que $-4$ y 4 están en el conjunto solución de la desigualdad $x^2 \geq 3\,|\,x\,| + 4$, pues haciendo

$$x = \pm 4 \text{ obtenemos } 16 = 12 + 4.$$

$\square$

(3) $\dfrac{-2}{x-4} < 7\,.$

▼ La desigualdad $-\dfrac{2}{x-4} < 7$ es la misma que $\dfrac{2}{-(x-4)} < 7 \Rightarrow \dfrac{2}{4-x} < 7.$

Si $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x \in (-\infty, 4)$, la desigualdad es equivalente a

$$2 < 7(4-x) \Rightarrow 2 < 28 - 7x \Rightarrow 7x < 28 - 2 \Rightarrow 7x < 26 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x < \tfrac{26}{7} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \tfrac{26}{7}\right).$$

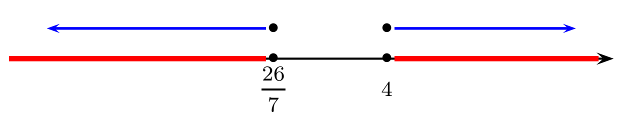
Pero, como también $x \in (-\infty, 4)$, entonces parte del conjunto solución es $\left(-\infty, \frac{26}{7}\right)$ en este caso.
Ahora si $4 - x < 0 \Rightarrow x \in (4, +\infty)$, la desigualdad es equivalente a

$$2 > 7(4-x) \Rightarrow 2 > 28 - 7x \Rightarrow 7x > 28 - 2 \Rightarrow 7x > 26 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x > \tfrac{26}{7} \Rightarrow x \in \left(\tfrac{26}{7}, +\infty\right).$$

Luego $x \in (4, +\infty) \bigcap \left(\frac{26}{7}, +\infty\right) = (4, +\infty)$ es parte del conjunto solución también.

Por lo que el conjunto solución de la desigualdad $-\dfrac{2}{x-4} < 7$ es

$$CS = \left(-\infty, \frac{26}{7}\right) \bigcup (4, +\infty) = \mathbb{R} - \left[\frac{26}{7}, 4\right]$$



Podemos comprobar, por ejemplo, que $\frac{26}{7}$ no satisface a la desigualdad $\dfrac{2}{4-x} < 7$ pues $\dfrac{2}{4-\frac{26}{7}} = \dfrac{2}{\frac{28-26}{7}} = \dfrac{2}{\frac{2}{7}} = 7$ y $7 \not< 7$.

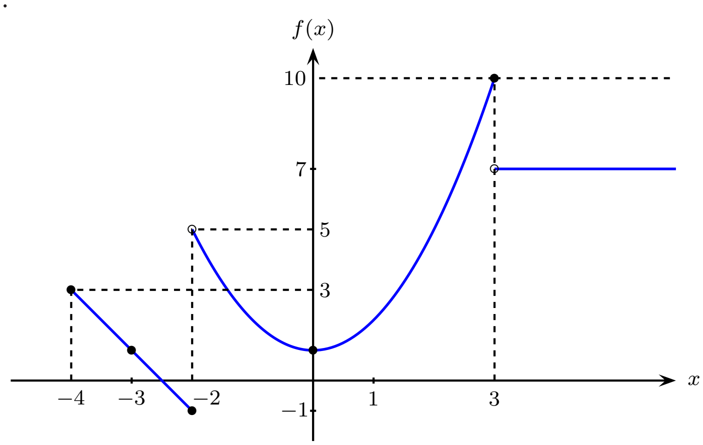
□

(4) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x-5 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2+1 & \text{si } -2 < x \le 3 \\ 7 & \text{si } 3 < x. \end{cases}$$

(a) Obtener su gráfica

▼ La gráfica de $f(x)$ es:




□

(b) Determinar su dominio y contradominio

▼ $D_f = [-4, +\infty)$; $R_f = [-1, 10]$.

□

(c) Calcular $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$ & $f(1000)$

▼ $f(-4) = 3$, $f(-3) = 1$, $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$;
$f(3) = 10$, $f(5) = 7$ y $f(1000) = 7$.

□

(5) Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{x+3} \ \& \ g(x) = \frac{1}{x^2-5}\,.$$

Calcular, obtener o determinar, según proceda:

(a) Dominios de $f$, $g$, $f+g$ y $fg$

▼ Calculamos

$$
\begin{aligned}
D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x+3 \ge 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ge -3 \right\} = [-3, +\infty);\\
D_g &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 5 \ne 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \ne 5 \right\} =\\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\, x\,| \ne \sqrt{5} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ -\sqrt{5}, \sqrt{5} \right\};\\
D_{f+g} &= [-3, +\infty) \bigcap \left\{ \mathbb{R} - \left\{ \pm\sqrt{5} \right\} \right\} = [-3, +\infty) - \left\{ \pm\sqrt{5} \right\} =\\
&= [-3, -\sqrt{5}) \bigcup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \bigcup (\sqrt{5}, +\infty);\\
D_{fg} &= D_f \bigcap D_g = D_{f+g} = [-3, -\sqrt{5}) \bigcup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \bigcup (\sqrt{5}, +\infty).
\end{aligned}
$$

□

(b) $f(g(-3))$, $g(f(6))$ y el dominio de $g(f(x))$

▼ Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
f[g(-3)] &= f\left(\frac{1}{(-3)^2 - 5}\right) = f\left(\frac{1}{9-5}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) =\\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \sqrt{\frac{1+12}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2};\\
g[f(6)] &= g(\sqrt{6+3}) = g(\sqrt{9}) = g(3) = \frac{1}{3^2 - 5} = \frac{1}{9-5} = \frac{1}{4};\\
D_{g\circ f} &= \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in [-3, +\infty) \,\middle|\, \sqrt{x+3} \ne \pm\sqrt{5} \right\} =\\
&= \left\{ x \in [-3, +\infty) \,\middle|\, x+3 \ne 5 \right\} = \left\{ x \in [-3, +\infty) \,\middle|\, x \ne 2 \right\} =\\
&= [-3, 2) \bigcup (2, +\infty).
\end{aligned}
$$

□