CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E0900

(1) Se desea construir una caja con tapa y base cuadrada de lado x. Se quiere que el lado x sea al menos de 0.20 m y que la altura sea igual al doble del lado de la base. Determinar el intervalo de variación de x para que la superficie total de la caja no exceda los 2.5 m^2.

(2) Sean las funciones $g(x) = \sqrt{x+6}$ & $h(x) = |\,x\,|$. Obtener las siguientes funciones y sus respectivos dominios

$$(g \circ h)(x) \quad \& \quad f(x) = \frac{3g(x) + x^2 + 2}{h(x) - 5}.$$

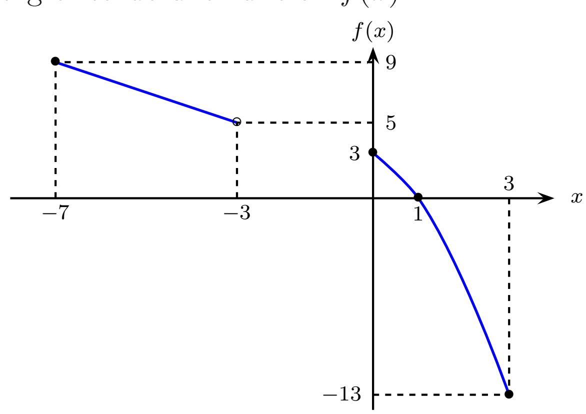
(3) Dada la función

$$g(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{si } -3 \le t < 1 \\ 3t & \text{si } 1 < t < 2. \end{cases}$$

(a) Bosquejar la gráfica de la función g y determinar dominio, rango y raíces
(b) Obtener los intervalos en los que $g(t) \ge 0$ así como aquellos en donde $g(t) < 0$
(c) A partir de la gráfica de g, bosquejar la gráfica de $f(t) = 2g(t+2) - 3$

(4) Un avión que vuela a una altitud de una milla y una velocidad constante de 350 mi/h pasa por una estación de radar en el instante $t = 0$.
(a) Expresar la distancia horizontal d recorrida por el avión (en millas) como función de t, para $t \ge 0$
(b) Expresar la distancia s entre el avión y la estación de radar, como función de d
(c) Expresar la distancia s entre el avión y la estación de radar, como función de t

(5) La siguiente figura es parte de la gráfica de una función $f(x)$:



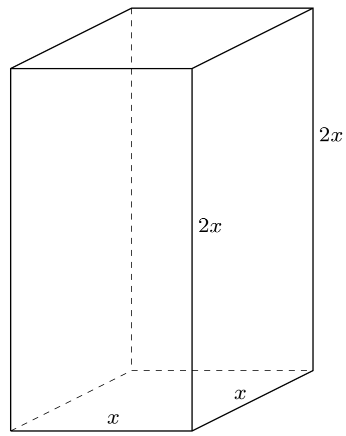
(a) Completar la gráfica sabiendo que es una función par
(b) Determinar dominio, raíces y rango
(c) Determinar los intervalos de monotonía

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Se desea construir una caja con tapa y base cuadrada de lado x. Se quiere que el lado x sea al menos de 0.20 m y que la altura sea igual al doble del lado de la base. Determinar el intervalo de variación de x para que la superficie total de la caja no exceda los 2.5 m^2.

▼ Dibujamos la caja



Y observamos que
x cumple la condición $x \geq 0.20$ m $\Rightarrow x \in [0.2, +\infty)$, ya que se pide que su longitud sea al menos de 0.20 m.

Vamos a calcular el área total de la caja. El área de cada tapa es de x^2. Como son dos tapas tenemos que el área de las tapas es $2x^2$.

El área de cada cara lateral es de $x \times 2x = 2x^2$ y, como son 4 caras, tenemos que el área de todas las caras es de $8x^2$.

Entonces el área total de la caja es de $2x^2 + 8x^2 = 10x^2$.

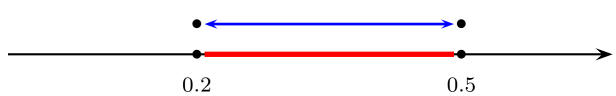
Como se pide que esta superficie no exceda de 2.5 m^2, entonces tenemos la condición

$$10x^2 \leq 2.5 \Rightarrow x^2 \leq 0.25 \Rightarrow |\, x \,| \leq \sqrt{0.25} = 0.5 \Rightarrow x \in [0, 0.5].$$

(Recordemos que x es una longitud y por lo tanto $x \geq 0$.)

La condición que debe cumplir x es

$$x \in [0.2, +\infty) \bigcap [0, 0.5] = [0.2, 0.5]$$



□

(2) Sean las funciones $g(x) = \sqrt{x+6}$ & $h(x) = |\,x\,|$. Obtener las siguientes funciones y sus respectivos dominios

$$(g \circ h)(x) \quad \& \quad f(x) = \frac{3g(x) + x^2 + 2}{h(x) - 5}\,.$$

▼ $D_g = \left\{\, x \,\middle|\, x + 6 \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \,\middle|\, x \geq -6 \,\right\} = [-6, +\infty)$.

Claramente $D_h = \mathbb{R}$.

$(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g(|\,x\,|) = \sqrt{|\,x\,| + 6}$.

Para que $x \in D_{g \circ h}$, x tiene que cumplir las condiciones siguientes:

(a) $x \in D_h = \mathbb{R}$.

(b) $h(x) = |\,x\,| \in D_g = [-6, +\infty)$.

Pero esta última condición siempre se cumple, ya que $|\,x\,| \geq 0 > -6$.

Por lo tanto concluimos que $D_{g \circ h} = \mathbb{R}$.

Por otro lado $f(x) = \dfrac{3g(x) + x^2 + 2}{h(x) - 5} = \dfrac{3\sqrt{x+6} + x^2 + 2}{|\,x\,| - 5}$.

Para que $x \in D_f$, x tiene que cumplir las condiciones siguientes:

(a) $x \in D_g = [-6, +\infty)$.

(b) $x \in D_h = \mathbb{R}$.

(c) $h(x) - 5 = |\,x\,| - 5 \neq 0 \Rightarrow |\,x\,| \neq 5 \Rightarrow x \neq -5$ & $x \neq 5$.

Por lo cual $D_f = [-6, +\infty) - \{-5, 5\} = [-6, -5) \bigcup (-5, 5) \bigcup (5, +\infty)$.

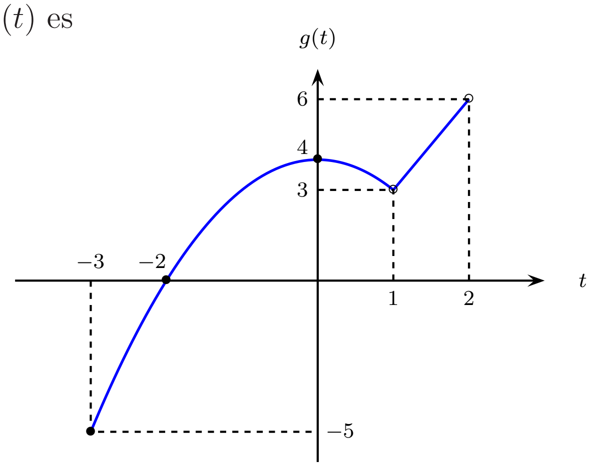
□

(3) Dada la función

$$g(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{si } -3 \leq t < 1 \\ 3t & \text{si } 1 < t < 2. \end{cases}$$

(a) Bosquejar la gráfica de la función g y determinar dominio, rango y raíces

▼ La gráfica de la función $g(t)$ es



Dominio de g: $D_g = [-3, 2) - \{\,1\,\} = [-3, 1) \bigcup (1, 2)$.
Rango de g: $R_g = [-5, 6)$.
Raíces de $g = \{\,-2\,\}$.

□

(b) Obtener los intervalos en los que $g(t) \geq 0$ así como aquellos en donde $g(t) < 0$

▼ $g(t) \geq 0$ si $t \in [-2, 2) - \{1\} = [-2, 1) \bigcup (1, 2)$;

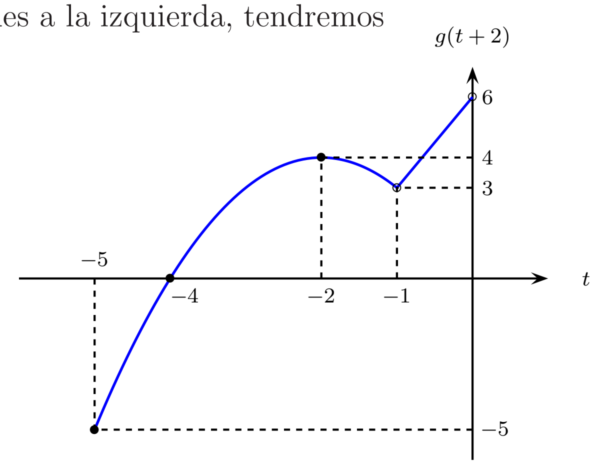
$g(t) < 0$ si $t \in [-3, -2)$.

□

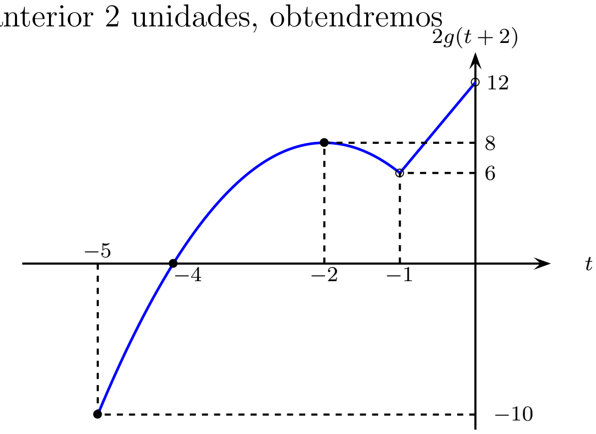
(c) A partir de la gráfica de g, bosquejar la gráfica de $f(t) = 2g(t + 2) - 3$

▼ La gráfica que deseamos se obtiene de la original.

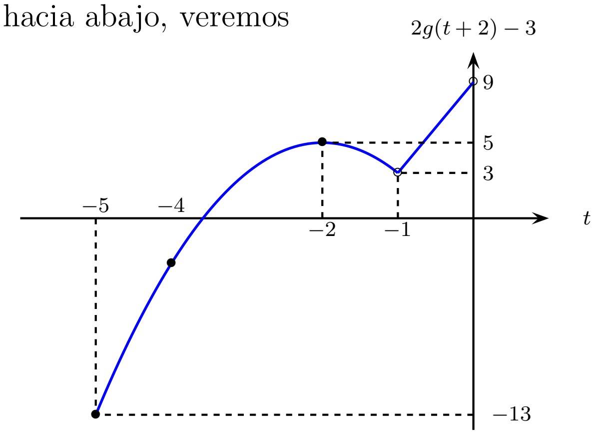
(i) Al desplazarla 2 unidades a la izquierda, tendremos



(ii) Si expandimos la gráfica anterior 2 unidades, obtendremos

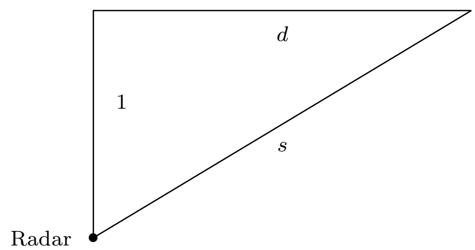


(iii) Al desplazarla 3 unidades hacia abajo, veremos



□

(4) Un avión que vuela a una altitud de una milla y, con una velocidad constante de 350 millas/h, pasa por una estación de radar en el instante $t = 0$.



(a) Expresar la distancia horizontal d recorrida por el avión (en millas) como función de t, para $t \geq 0$

▼ Puesto que tenemos una velocidad constante, $d = 350t$, d en millas y t en horas.

□

(b) Expresar la distancia s entre el avión y la estación de radar, como función de d

▼ Se expresa así $s^2 = 1^2 + d^2 \Rightarrow s = \sqrt{1 + d^2}$.

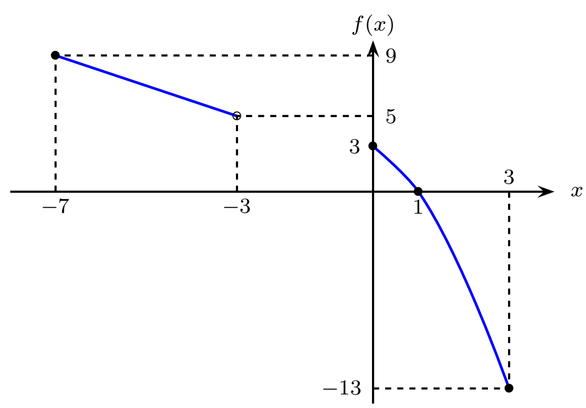
□

(c) Expresar la distancia s entre el avión y la estación de radar, como función de t

▼ Sustituyendo, $s = \sqrt{1 + (350t)^2} = \sqrt{1 + 350^2\, t^2} = \sqrt{1 + 122\,500\, t^2}$.

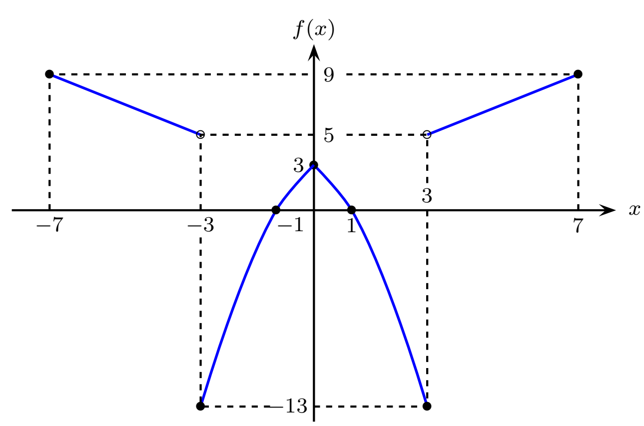
□

(5) La siguiente figura es parte de la gráfica de una función $f(x)$:



(a) Completar la gráfica sabiendo que es una función par

▼ La gráfica es:



□

(b) Determinar dominio, raíces y rango

▼ Dominio de $f(x)$: $D_f = [-7, 7]$.

Raíces: $\{ -1, 1 \}$.

Rango de $f(x)$: $R_f = [-13, 3] \bigcup (5, 9]$.

□

(c) Determinar los intervalos de monotonía

▼ La función decrece en $[-7, -3)$ y en $[0, 3]$.

La función crece en $[-3, 0]$ y en $[3, 7]$.

□