CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E0100
10-10-2000, 00.O

(1) Si se lanza una pelota hacia arriba desde la azotea de un edificio que tiene 20 m de altura con una velocidad inicial de 5 m/seg., entonces la altura sobre el suelo t segundos después será

$$h(t) = 20 + 5t - 5t^2.$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 10 m arriba del suelo?

(2) Una caja con base y tapa cuadradas de lado x tiene una superficie total de 600 m^2. Expresar el volumen V de la caja como función de x.

(3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{7 - x}$ & $g(x) = |\,5 - 8x\,|$, obtener el dominio de f, $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

(4) Considerando la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) realizar un bosquejo de la gráfica de la función f
(b) Realizar un bosquejo de la gráfica de la función
$g(x) = f(x - 3) - 2$
(c) Obtener dominio, rango y raíces de la función g

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Si se lanza una pelota hacia arriba desde la azotea de un edificio que tiene 20 m de altura con una velocidad inicial de 5 m/seg., entonces la altura sobre el suelo t segundos después será

$$h(t) = 20 + 5t - 5t^2.$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 10 m arriba del suelo?

▼ Ya que la altura de la pelota viene dada por la función $h(t)$, resolver la desigualdad

$$20 + 5t - 5t^2 \geq 10$$

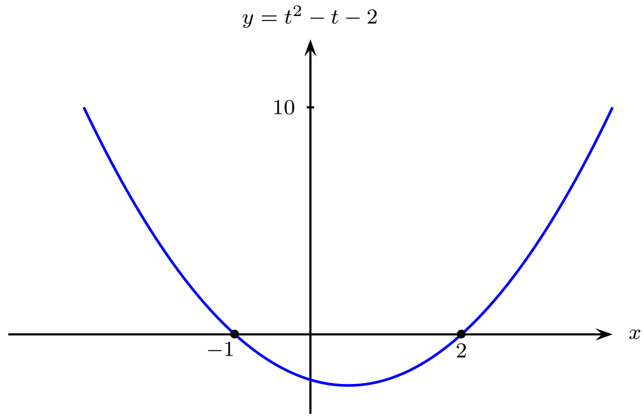
es la respuesta a la pregunta del problema.
Se tiene:

$$-5t^2 + 5t + 10 \geq 0 \Rightarrow -5(t^2 - t - 2) \geq 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 \leq 0.$$

Para resolver esta desigualdad factorizamos el trinomio e igualamos a cero:

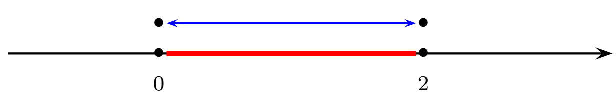
$$(t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \text{, las raíces son -1 y 2.}$$

Graficamos la parábola $y = t^2 - t - 2$:



Aquí se ve que la solución de la última desigualdad es $[-1, 2]$.
Para este problema se tiene que $t \geq 0$, por lo tanto la solución definitiva es

$$CS = [0, 2]$$



Y siendo así, la pelota estará 10 m arriba del suelo los primeros 2 segundos.
Observa que $h(0) = 20$ y $h(2) = 10$.

La desigualdad $20 + 5t - 5t^2 \geq 10$ también se puede resolver por otros procedimientos.

A partir de la factorización $(t-2)(t+1) \leq 0$ para resolver esta desigualdad se consideran 2 casos:

(a) $t - 2 \leq 0$ & $t + 1 \geq 0$
Tenemos $t \leq 2 \Rightarrow t \in (-\infty, 2]$.
Además $t \geq -1 \Rightarrow t \in [-1, \infty)$.
La solución en este caso es $(-\infty, 2] \bigcap [-1, \infty) = [-1, 2]$.

(b) $t-2 \geq 0$ y $t+1 \leq 0$
Tenemos $t \geq 2 \Rightarrow t \in [2, \infty)$.
Además $t \leq -1 \Rightarrow \in (-\infty, -1]$.
La solución en este caso es $(-\infty, -1] \bigcap [2, \infty) = \emptyset$.

Asimismo, por otro método, a partir de:

$$20 + 5t - 5t^2 \geq 10 \Rightarrow 5t - 5t^2 \geq -10 \Rightarrow t - t^2 \geq -2 \Rightarrow t^2 - t \leq 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^2 - t + \frac{1}{4} \leq 2 + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \left|t - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq t - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -1 \leq t \leq 2 \Rightarrow t \in [-1, 2].$$

También, para resolver $(t-2)(t+1) \leq 0$, podemos usar la tabla:

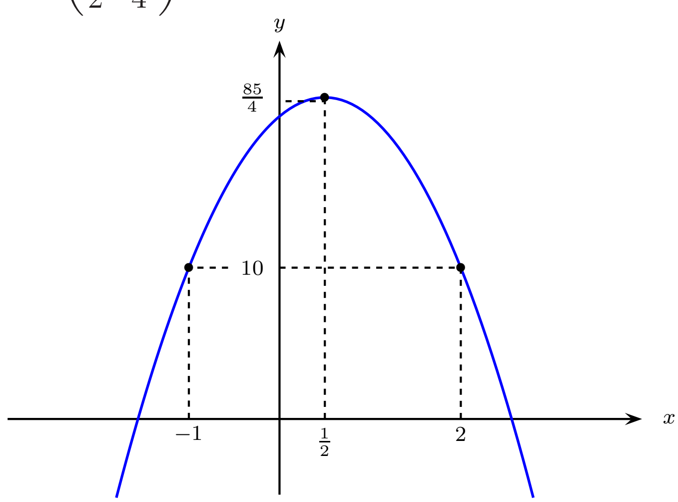
	Signo de		
Intervalo	$t+1$	$t-2$	$(t+1)(t-2)$
$t < -1\,(< 2)$	$-$	$-$	$+$
$-1 < t < 2$	$+$	$-$	$-$
$t > 2\,(> -1)$	$+$	$+$	$+$

$(t-2)(t+1) \leq 0$ sólo si $t \in [-1, 2]$.

Posiblemente la forma más natural de resolver este ejercicio, aunque sin usar desigualdades, es teniendo en cuenta que $y = -5t^2 + 5t + 20$ es una parábola que dirige su concavidad hacia abajo.

$$-5t^2 + 5t + 20 = -5\left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) + 20 + \frac{5}{4} = -5\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{85}{4};$$

la parábola tiene su vértice en $V\left(\frac{1}{2}, \frac{85}{4}\right)$:



La parábola corta a la recta $y = 10$ cuando:

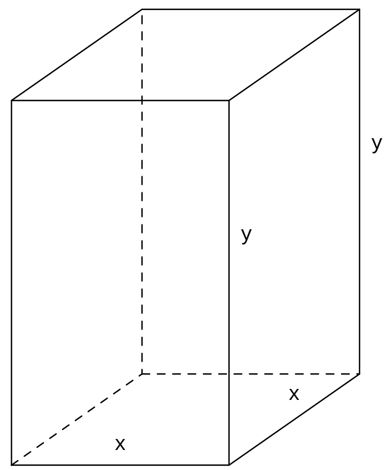
$$-5t^2 + 5t + 20 = 10 \Leftrightarrow -5t^2 + 5t + 10 = 0 \Leftrightarrow -5(t^2 - t - 2) = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ o bien } t = 2;$$

luego, $t \in [0, 2] \Rightarrow -5t^2 + 5t + 20 \geq 10$.

$\square$

(2) Una caja con base y tapa cuadradas de lado x tiene una superficie total de 600 m^2. Expresar el volumen V de la caja como función de x.

▼ La figura de la caja.



La superfice total de la caja es

$$2x^2 + 4xy = 600.$$

Despejando y se tiene

$$y = \frac{600 - 2x^2}{4x}.$$

El volumen de la caja viene dado por la expresión

$$V = x^2 y.$$

Sustituyendo la variable y despejada anteriormente se tiene

$$V = x^2 \frac{600 - 2x^2}{4x} = \frac{600x - 2x^3}{4} = \frac{300x - x^3}{2}.$$

Ésta es la expresión solicitada.

$\square$

(3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{7 - x}$ & $g(x) = |\,5 - 8x\,|$, obtener el dominio de f, $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

▼ El dominio de $f(x) = D_f$ viene dado por el conjunto de las x que satisfacen

$$7 - x \geq 0 \Rightarrow 7 \geq x \Rightarrow x \in (-\infty, 7].$$

Por otro lado:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(|\,5 - 8x\,|) = \sqrt{7 - |\,5 - 8x\,|}.$$

Para calcular $D_{f \circ g}$, primero $x \in D_g$. Se ve de inmediato que $D_g = R$.

Segundo

$$g(x) \in D_f \Rightarrow g(x) \in (-\infty, 7] \Rightarrow |\,5 - 8x\,| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 5 - 8x \leq 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12 \leq -8x \leq 2 \Rightarrow \frac{12}{8} \geq x \geq -\frac{2}{8} \Rightarrow \frac{3}{2} \geq x \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right].$$

Las dos condiciones anteriores nos dan

$$D_{f\circ g} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right].$$

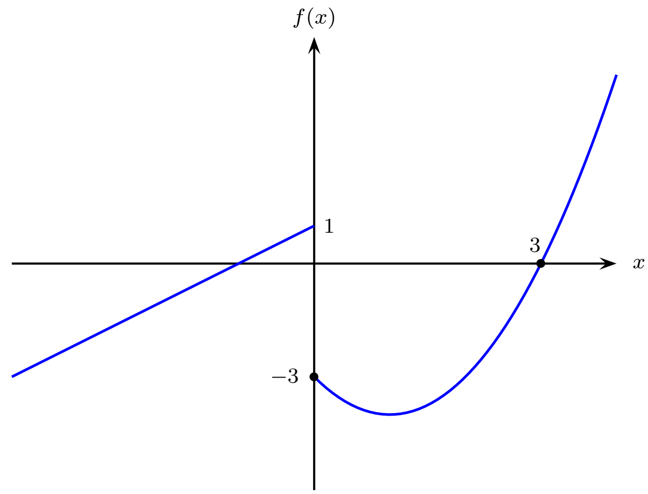
□

(4) Considerando la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) realizar un bosquejo de la gráfica de la función f

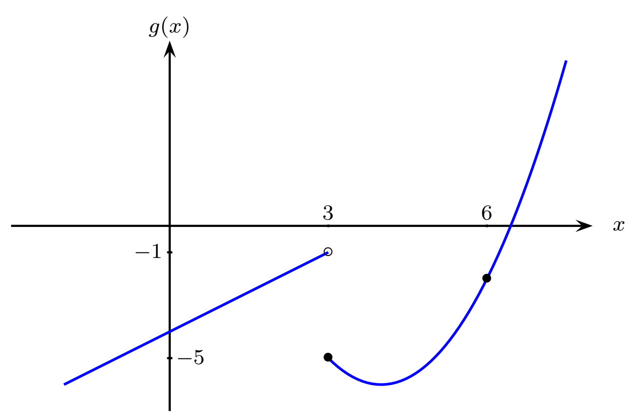
▼ A la izquierda de $x = 0$ la gráfica coincide con la recta $y = x + 1$ y, a partir de $x = 0$, con la parábola $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ que pasa por los puntos $(0, -3)$ y $(3, 0)$, por ejemplo.
La gráfica de $f(x)$ es:



□

(b) Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = f(x-3) - 2$

▼ Trasladamos primero la gráfica de $f(x)$ horizontalmente hacia la derecha 3 unidades y después verticalmente hacia abajo 2 unidades.
La gráfica de $g(x)$ es:



□

(c) Obtener dominio, rango y raíces de la función g

▼ Dominio: todos los números reales. Dividido en dos pedazos: $(-\infty, 3)$ y $[3, \infty)$.
Rango: todos los números reales.
Raíces: la función $g(x)$ es:

$$g(x) = \begin{cases} [(x-3)+1]-2 & \text{si } x < 3 \\ [(x-3)^2 - 2(x-3) - 3] - 2 & \text{si } x \geq 3; \end{cases}$$

o sea,

$$g(x) = \begin{cases} x-4 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 8x + 10 & \text{si } x \geq 3; \end{cases}$$

$x - 4$ no tiene raíces para $x < 3$;
$x^2 - 8x + 10$ tiene una raíz $4 + \sqrt{6}$ para $x \geq 3$.
Observa que $g(4+\sqrt{6}) = (4+\sqrt{6})^2 - 8(4+\sqrt{6}) + 10 = 16 + 8\sqrt{6} + 6 - 32 - 8\sqrt{6} + 10 = 0$.

□