CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E1000

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2-5x}{x^2-7x}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x-1}$.

(3) Probar, usando $\epsilon-\delta$ que $\displaystyle\lim_{x\to\pi}(3x-2\pi)=\pi$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}$

(5) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } -2\le x<0\\ -(x^2+2) & \text{si } 0\le x\le 2\,. \end{cases}$$

(a) Calcular $f(-2)$ & $f(2)$
(b) ¿Existe $c\in(-2,2)$ tal que $f(c)=0$?

(6) Hallar los valores de las constantes a, b de manera que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{si } x\in(-\infty,0]\\ x+a & \text{si } 0<x<1\\ b & \text{si } x\in[1,+\infty) \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 5x}{x^2 - 7x}$.

▼ Observamos que

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 5x}{x^2 - 7x} = \frac{x(x^2 - 3x - 5)}{x(x - 7)}$$

y, si $x \neq 0$, entonces

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 5x}{x^2 - 7x} = \frac{x^2 - 3x - 5}{x - 7} \,,$$

por lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3x^2 - 5x}{x^2 - 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 3x - 5}{x - 7} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7} \,.$$

□

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x - 1}$.

▼ Observamos que $x = 1$ es una raîz de $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, luego este último polinomio es divisible entre $x - 1$; efectuando esa división

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 1 \\ \hline x - 1 & x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\ & \underline{-x^3 + x^2} \\ & -x^2 + 2x - 1 \\ & \underline{x^2 - x} \\ & x - 1 \\ & \underline{-x + 1} \\ & 0 \end{array}$$

llegamos al resultado

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x - 1} = x^2 - x + 1 \,.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x^2 - x + 1) = 1 \,.$$

□

(3) Probar, usando $\epsilon - \delta$ que $\lim\limits_{x\to\pi}(3x - 2\pi) = \pi$.

▼ Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, tenemos que hallar $\delta > 0$ tal que $|\,(3x - 2\pi) - \pi\,| < \epsilon$ si $|\,x - \pi\,| < \delta$;
pero, $|\,(3x - 2\pi) - \pi\,| = |\,3x - 3\pi\,| = |\,3||x - \pi\,| = 3\,|\,x - \pi\,|$;
luego entonces $|\,(3x - 2\pi) - \pi\,| < \epsilon$ es lo mismo que $3\,|\,x - \pi\,| < \epsilon$ y, como esta última desigualdad equivale a $|\,x - \pi\,| < \dfrac{\epsilon}{3}$, basta con tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$ para que $|\,x - \pi\,| < \delta$ implique que $|\,(3x - 2\pi) - \pi\,| < \epsilon$.

□

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}$

▼ Sabemos que $x^2-1=(x-1)(x+1)$ y que

$$|\,x-1\,|=\begin{cases} x-1 & \text{si } x-1\ge 0\\ -(x-1) & \text{si } x-1<0\end{cases}=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\ge 1\\ -(x-1) & \text{si } x<1\,;\end{cases}$$

luego entonces

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

y también

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{-1}=\frac{2}{-1}=-2\,.$$

Por lo que no existe $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}$, ya que

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}\,.$$

De hecho, la función $\displaystyle\frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}$ tiene una discontinuidad de salto en $x=1$.

□

(5) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } -2\le x<0\\ -(x^2+2) & \text{si } 0\le x\le 2\,.\end{cases}$$

(a) Calcular $f(-2)$ & $f(2)$

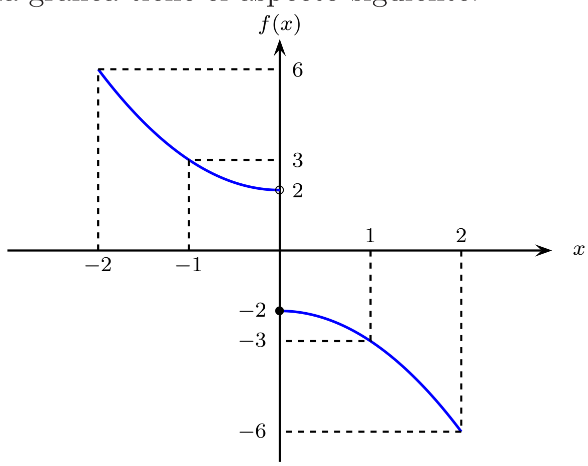
▼

$$f(-2)=(-2)^2+2=4+2=6\,;$$
$$f(2)=-(2^2+2)=-(4+2)=-6\,.$$

□

(b) ¿Existe $c\in(-2,2)$ tal que $f(c)=0$?

▼ No existe tal c; de hecho la gráfica tiene el aspecto siguiente:



Observe que $f(x)$ no es continua en $[-2,2]$, por lo que no cumple con el teorema del Valor Intermedio.

□

(6) Hallar los valores de las constantes a, b de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ x + a & \text{si } 0 < x < 1 \\ b & \text{si } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

▼ Se tiene que cumplir que la función $f(x)$ sea continua en 0 y en 1, luego entonces,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+3) = 0 + 3 = 3$$

y también

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+a) = 0 + a = a;$$

en conclusión, $a = 3$.
Observemos que la función $f(0) = 3$ también, por lo que con $a = 3$ se tiene

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)\,.$$

Análogamente,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+a) = \lim_{x\to 1^-} (x+3) = 1 + 3 = 4\,;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} b = b\,,$$

por lo tanto $b = 4$, que es también $f(1)$.

□