CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E1200

(1) Trace la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_{x\to-4} f(x)=0; & \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty; & \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=0;\\
\lim\limits_{x\to0} f(x)=-3; & \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty; & \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2;\\
\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=4; & \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=1; & \lim\limits_{x\to5} f(x)=0;\\
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1; & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5; &
\end{array}$$

(2) Considere la función

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-1}\,.$$

(a) Obtener dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función f
(b) Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función f
(c) Obtener gráfica e imagen de la función f

(3) Se define la función como

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<1\\ a & \text{si } x=1\\ bx^2+1 & \text{si } 1<x<3\\ 2x & \text{si } 3\le x\,. \end{cases}$$

(a) Determinar los valores de las constantes a y b que hacen de f una función continua en $x=1$
(b) Reescriba la función f con los valores calculados de a y b. Estudie la continuidad o discontinuidad de f en el punto 3

(4) La función h tiene la siguiente tabla de valores:

x	$h(x)$
2.99	769.605
2.995	795.755
2.999	816.801
3	822.08
3.001	827.366
3.005	848.58
3.009	869.907

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $(3,h(3))$. Con base en estos resultados, estima un intervalo de variación para la pendiente de la recta tangente a la gráfica de h en $(3,h(3))$.

(5) Se lanza una pelota al aire desde un puente. La posición de la pelota al tiempo $t\ge0$ está dada por

$$y(t)=-16t^2+50t+36$$

(a) ¿Cuál es la altura del puente?

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

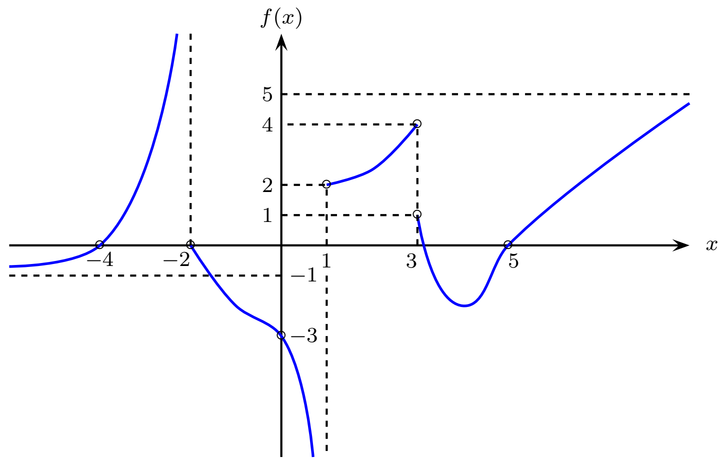
(b) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando se encuentra a 70 m sobre el suelo?

Respuestas

(1) Trace la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to -4} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty; & \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0; \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -3; & \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty; & \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2; \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4; & \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1; & \lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0; \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1; & \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 5; & \end{array}$$

▼ La gráfica posible de la función $f(x)$, con estas condiciones, es:



□

(2) Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}\,.$$

(a) Obtener dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función f

▼

Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2+x-2}{x^2-1} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 1 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \neq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \pm 1 \right\} ;$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{ -1, 1 \} \,.$$

Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ o bien } x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ o bien } x = 1\,.$$

Aparentemente hay dos raíces ($x = -2$ & $x = 1$), pero $x = 1$ no está en el dominio de f; luego entonces, f tiene sólo una raíz: $x = -2$.
Intervalos de continuidad: por ser f una función racional, es continua en todo su dominio; luego entonces, f es continua en $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, \infty)$.

□

(b) Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función f

▼ Asíntotas verticales: analicemos los puntos de discontinuidad

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1+2}{2+1} = \frac{3}{2}\ ;$$

la función f tiene en $x = 1$ una discontinuidad removible; por lo cual, la recta $x = 1$ no es una asíntota vertical. Ahora vemos que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x+1} = \infty$$

ya que

$$\lim_{x\to -1}(x+1) = -1+1 = 0\ \&\ \lim_{x\to -1}(x+2) = -1+2 = 1\,.$$

Aún más:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x+2}{x+1} = -\infty, \text{ ya que } x+2>0 \text{ y que } x+1<0.$$

Además:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+2}{x+1} = \infty, \text{ ya que } x+2>0 \text{ y que } x+1>0.$$

Luego entonces, la recta $x = -1$ es la única asíntota vertical.
Asíntotas horizontales: analicemos en el infinito

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

De igual manera se obtiene que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$.
Luego entonces, la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal.

□

(c) Obtener gráfica e imagen de la función f

▼ Un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ es

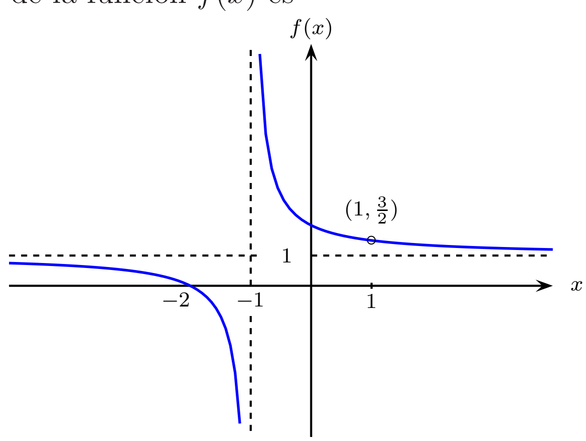


Imagen:
$R_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

□

(3) Se define la función como

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x = 1 \\ bx^2 + 1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 2x & \text{si } 3 \leq x\,. \end{cases}$$

(a) Determinar los valores de las constantes a, b que hacen de f una función continua en $x = 1$

▼ Primero aseguramos la existencia de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, exigiendo la igualdad de los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x) = 2(1) = 2\,;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(bx^2 + 1) = b(1) + 1 = b + 1\,;$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 2 = b + 1 \Leftrightarrow b = 1\,.$$

Entonces, con $b = 1$ aseguramos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.
Luego exigimos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, para asegurar la continuidad de f en $x = 1$.
Ya que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ & $f(1) = a$, entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 = a$; es decir, $a = 2$.
Luego entonces, con $a = 2$ & $b = 1$, aseguramos la continuidad de f en $x = 1$.

□

(b) Reescriba la función f con los valores calculados a, b. Estudie la continuidad o discontinuidad de f en el punto 3

▼ La función f continua en $x = 1$ es

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 2x & \text{si } 3 \leq x\,. \end{cases}$$

¿Es continua f en $x = 3$? Veamos:

$$f(3) = 2(3) = 6\,;$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 + 1) = 3^2 + 1 = 10\,;$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x) = 2(3) = 6\,.$$

Ya que $10 \neq 6$, entonces $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, por lo cual $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.
Por lo tanto, la función f no es continua en $x = 3$; aún más, f tiene en $x = 3$ una discontinuidad esencial de salto.

□

(4) La función h tiene la siguiente tabla de valores:

x	$h(x)$
2.99	769.605
2.995	795.755
2.999	816.801
3	822.08
3.001	827.366
3.005	848.58
3.009	869.907

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $(3, h(3))$. Con base en estos resultados, estima un intervalo de variación para la pendiente de la recta tangente a la gráfica de h en $(3, h(3))$.

▼ Para que el intervalo de variación resulte aceptable, conviene que una recta secante S_1 pase por un punto $(x_1, h(x_1))$ con $x_1 < 3$ y que la otra secante S_2 pase por un punto $(x_2, h(x_2))$ con $x_2 > 3$. Claro está, el resultado será mejor cuando los números x_1 y x_2 sean los más cercanos a 3.
Consideremos que S_1 pasa por los puntos $(2.999, 816.801)$ y $(3, 822.08)$. La pendiente de S_1 es

$$m_1 = \frac{822.08 - 816.801}{3 - 2.999} = \frac{5.279}{0.001} = 5\,279\,.$$

Consideremos que S_2 pasa por los puntos $(3.001, 827.366)$ y $(3, 822.08)$. La pendiente de S_2 es

$$m_2 = \frac{827.366 - 822.08}{3.001 - 3} = \frac{5.286}{0.001} = 5\,286\,.$$

Luego entonces, la pendiente m de la recta tangente a la gráfica de h en el punto $(3, h(3))$, es un número tal que: $5\,279 \leq m \leq 5\,286$.

□

(5) Se lanza una pelota al aire desde un puente. La posición de la pelota al tiempo $t \geq 0$ está dada por $y(t) = -16t^2 + 50t + 36$ pies.

(a) ¿Cuál es la altura del puente?

▼ Ya que $y(t)$ pies es la posición de la pelota (con respecto al suelo) en el segundo $t \geq 0$, entonces la altura del puente es, precisamente,

$$y(t = 0) = 36 \text{ pies.}$$

□

(b) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando se encuentra a 70 pies sobre el suelo?

▼ La velocidad instantánea en $t \geq 0$ es

$$v(t) = \frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}(-16t^2 + 50t + 36) = -32t + 50 \text{ pies/s.}$$

La pelota está a 70 pies sobre el suelo cuando $y(t) = 70$.

$$y(t) = 70 \Leftrightarrow -16t^2 + 50t + 36 = 70 \Leftrightarrow -16t^2 + 50t - 34 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(-8t^2 + 25t - 17) = 0 \Leftrightarrow -8t^2 + 25t - 17 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4(-8)(-17)}}{2(-8)} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 - 544}}{-16} = \frac{-25 \pm 9}{-16} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = \frac{-25 + 9}{-16} = \frac{-16}{-16} = 1 \;\;\&\;\; t_2 = \frac{-25 - 9}{-16} = \frac{-34}{-16} = 2.125\,;$$

es decir, la pelota está a 70 pies sobre el suelo en los instantes $t_1 = 1$ s (cuando la pelota va hacia arriba) y $t_2 = 2.125$ s (cuando va hacia abajo).
Las velocidades en esos instantes son:

$$v_1 = v(t_1) = -32t_1 + 50 = -32(1) + 50 = 18 \text{ pies/s}.$$
$$v_2 = v(t_2) = -32t_2 + 50 = -32(2.125) + 50 = -18 \text{ pies/s}.$$

Esto es, $v_1 = 18$ pies/s (de subida) y $v_2 = -18$ pies/s (de bajada).

$\square$